



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion

Janke, Alphons

Köln a. Rh., 1902

Inhalt.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76011](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76011)

Inhalt.

	Seite
Einleitung	7
Erster Abschnitt: Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten.	
1. Kapitel: Richtung und Neigungswinkel der Lichtstrahlen	9
2. Kapitel: Die Konstruktion der Schlagschatten auf die Projektionsebenen.	
a) Schlagschatten von Punkten	9
b) Schlagschatten von Linien	10
c) Schlagschatten von ebenen Figuren	11
d) Lichtstrahl-Flächen — Schnitte projizierender Lichtstrahlebenen	12
e) Schlag- und Kernschatten von Körpern	14
3. Kapitel: Die Konstruktion der Schlagschatten auf beliebige Flächen	17
a) Schlagschatten von Punkten	17
b) Schlagschatten von Linien	17
c) Schlagschatten von ebenen Figuren	18
d) Schlagschatten von Körpern	18
4. Kapitel: Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten von Körper auf Körper	18
5. Kapitel: Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten bei Rotationskörpern	19
6. Kapitel: Anwendungen	20
Zweiter Abschnitt: Einiges über die Beleuchtung und Lichtverteilung	21

Einleitung.

Tafel 1.

Sehr häufig wird bei technischen Zeichnungen, um die Deutlichkeit derselben zu erhöhen, an die dargestellten Gegenstände der Schatten konstruiert. Der Teil der darstellenden Geometrie, welcher sich hiermit beschäftigt, heißt die Schattenlehre.

Die von einer Lichtquelle Q (Fig. 1) nach einem Körper ausgehenden Lichtstrahlen L stehen zu den Begrenzungsflächen des Körpers in zweifacher Beziehung; nämlich:

- 1) gewisse Begrenzungsflächen werden von den Lichtstrahlen getroffen, oder, wie man sagt, beleuchtet, so z. B. die Flächen $1 \cdot 5 \cdot I \cdot V$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$,
- 2) gewisse Begrenzungsflächen werden von den Lichtstrahlen nicht getroffen, also nicht beleuchtet, oder, wie man sagt, sie liegen im Schatten; so z. B. die Flächen $5 \cdot 4 \cdot V \cdot IV$, $4 \cdot 3 \cdot IV \cdot III$ und $3 \cdot 2 \cdot III \cdot II$.

Die beleuchteten Flächen erscheinen dem Auge hell, die nicht beleuchteten dagegen dunkel. Die Helligkeit der beleuchteten, als auch die Dunkelheit der nicht beleuchteten Flächen eines Körpers ist, wie die Erfahrung bestätigt, je nach der Lage der Flächen zu den Lichtstrahlen eine verschiedene.

Nach einem optischen Gesetz pflanzen sich die Lichtstrahlen im Raum geradlinig fort, sie können demnach in der Zeichnung als gerade Linien dargestellt werden.

Es kann vorkommen, daß eine oder mehrere, von den Lichtstrahlen nicht getroffene Begrenzungsflächen eines Körpers eine solche Lage haben, daß sämtliche Lichtstrahlen, welche man an ihre Eckpunkte legen kann, mit der Fläche zusammenfallen, z. B. die Fläche $5 \cdot 4 \cdot V \cdot IV$. In diesem Falle streifen die Lichtstrahlen die Fläche, und man sagt, dieselbe liegt im Streiflicht oder Kernschatten. Die Erfahrung lehrt, daß von den sämtlichen im Schatten liegenden Flächen eines Körpers diejenigen, welche im Streiflichte liegen, am dunkelsten sind.

Es ist weiter zu beobachten, daß jede Kante eines Körpers, in welcher sich eine beleuchtete und eine nicht beleuchtete Begrenzungsfläche schneiden, z. B. die Kante $4 \cdot 3$, irgendwohin einen Schatten $d e$ wirft, etwa wie in der Fig. 1 auf die wagerechte Ebene E . Dieser Schatten, den die entsprechenden Kanten eines Körpers auf andere Flächen werfen, in Fig. 1 das Vieleck $I \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot IV \cdot III \cdot II \cdot I$, heißt der Schlagschatten.

Man sieht ohne weiteres, daß jeder Schlagschattenpunkt der Durchgang eines Lichtstrahls mit der schattenaufnehmenden Fläche ist, weshalb die Konstruktion der Schlagschatten den Durchdringungen in der darstellenden Geometrie angegliedert werden kann.

Die Grundfläche I·II·III·IV·V des Körpers liegt auf der Ebene E, kann also keinen Schatten werfen.

Bei den Figuren im ersten Abschnitt ist auf die verschiedene Helligkeit und Dunkelheit der Flächen keine Rücksicht genommen.

Die Lichtquelle Q kann wie in Fig. 1 im Endlichen angenommen werden, z. B. bei Kerzen- oder Lampenbeleuchtung, oder sie befindet sich im Unendlichen, wie dies bei der natürlichen Beleuchtung durch Sonnenlicht der Fall ist. Bei der ersten, im technischen Zeichnen nicht vorkommenden Annahme, schneiden sich die Lichtstrahlen in Q, während sie in der anderen unter sich parallel sind, Fig. 2.

Sämtliche Lichtstrahlen, welche durch die schattenwerfenden Punkte eines Körpers gelegt werden können, bilden nach der Annahme in Fig. 1 eine Pyramide mit der Spitze Q und nach der Annahme in Fig. 2 ein Prisma. Der Schlagschatten des Körpers ist dann die Durchgangsfigur dieser Pyramide bezw. dieses Prismas mit der schattenaufnehmenden Fläche E. Hieraus erkennt man auch die geometrische Verwandtschaft zwischen der Schattenlehre und der Polar- bezw. Parallelperspektive.

Erster Abschnitt.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten.

1. Kapitel.

Richtung und Neigungswinkel der Lichtstrahlen. (Taf. 1.)

Man ist übereingekommen, bei der Konstruktion der Schatten in technischen Zeichnungen die Lichtstrahlen parallel zur Richtung einer körperlichen Diagonale eines Würfels zu nehmen. Dieser Würfel, Fig. 3, wird zu den Projektionsebenen so gelegt, daß seine Kanten entsprechend parallel zu den Projektionsachsen gerichtet sind; alsdann wählt man als Lichtstrahlrichtung L die Diagonale, welche die vordere, obere, linke Würfecke V_{01} mit der hinteren, unteren, rechten H_{ur} verbindet. Der Lichteinfall erfolgt von oben nach unten und von links nach rechts. Die Projektionen l_1 , l_2 und l_3 dieses Lichtstrahles L zeigen sich auf den drei Ebenen als 45° Linien zu den Achsen. Fig. 4 giebt die geometrische, Fig. 3 die isometrische Darstellung der Lichtstrahlen an.

Wie die Projektionen l_1 , l_2 und l_3 des Lichtstrahles L mit den Achsen gleiche Winkel einschließen, so sind auch die Neigungswinkel γ des räumlichen Lichtstrahles L zu den drei Projektionsebenen unter sich gleich. Diese Neigungswinkel γ betragen jedoch nicht 45° , sondern nur ungefähr $35\frac{1}{2}^\circ$. Die Bestimmung des Neigungswinkels γ erfolgt durch Umlappung in Fig. 5 oder durch Drehung in Fig. 6; die schraffierten Dreiecke enthalten gegenüber ihrer kleineren Kathete den Winkel γ .

2. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlagschatten auf die Projektionsebenen.

a) Schlagschatten von Punkten. (Taf. 2.)

Ist nach Fig. 7 der Schlagschatten eines Punktes p zu suchen, so legt man sich durch denselben einen Lichtstrahl l; der erste Durchgangspunkt s des Lichtstrahles mit einer der beiden Projektionsebenen ist der Schatten des Punktes p. Der

Schatten s_1 befindet sich in Fig. 7a auf dem Fußboden, weil der Punkt dem Fußboden näher als der Vorderwand liegt, im anderen Fall, Fig. 7b, wird der Schatten in die Vorderwand geworfen. Hat der Punkt p (Fig. 7c), von beiden Projektionsebenen gleichen Abstand, so kommt sein Schatten s in die Projektionsachse zu liegen.

b) Schlagschatten von Linien. (Taf. 2.)

Ohne weiteres erkennt man, daß der Schatten einer geraden Linie auf eine Ebene im allgemeinen wiederum eine Gerade ist.

In den Beispielen auf Tafel 2 ist der Schatten kräftig ausgezogen und an seinen Endpunkten durchgängig mit a und b bezeichnet, zum Unterschied von den Projektionen der Linien, die mit a , b , bzw. a'' , b'' , oder a''' , b''' , benannt sind.

Befindet sich die Schatten werfende Linie zwischen zwei Ebenen, dem Grundriß und dem Aufriß, so sind hinsichtlich des Schattens zwei Möglichkeiten vorhanden:

- 1) Der Schatten ab liegt nur in einer Projektionsebene (Fig. 8a und b, 9a, 10, 11 und 13).
- 2) Der Schatten ab liegt in den beiden Projektionsebenen (Fig. 8c, 9b und c, 12, 14 und 15).

Die Lösung beim ersten Fall besteht einfach darin, daß man von den beiden Endpunkten die Schatten a und b konstruiert, deren gerade Verbindungslinie der Schatten ab ist.

Im zweiten Falle hat der Schatten ab in der Projektionsachse einen Knickpunkt k , der mit den Schatten a und b der beiden Endpunkte verbunden, die Schattenlinie akb ergibt.

Die gerade Verbindungslinie ab der Schatten der Endpunkte, z. B. in Fig. 8c, ist nicht der Schlagschatten der Geraden ab , sondern eine Linie ohne jede projektive Bedeutung.

Lotrechte Linien. (Fig. 8.) Regel: Der Schatten von lotrechten Linien hat im Grundriß die 45° Richtung der Lichtstrahlen und ist im Aufriß senkrecht zur Projektionsachse gerichtet.

Der Knickpunkt k , Fig. 8c, ergibt sich hiernach ohne weiteres.

Linien, senkrecht zum Aufriß. (Fig. 9.) Regel: Der Schatten von Linien, die senkrecht zum Aufriß stehen, hat im Aufriß die 45° Richtung der Lichtstrahlen und ist im Grundriß senkrecht zur Projektionsachse gerichtet.

Der Knickpunkt k , Fig. 9b und c, ergibt sich hiernach ohne weiteres.

Linien, parallel zur Projektionsachse. (Fig. 10.) Regel: Die Schatten von Linien, die parallel zur Projektionsachse liegen, haben Schatten, welche parallel mit dieser Achse verlaufen.

Etwas allgemeiner ist nach Fig. 11 und 12 folgende Regel: Linien, die parallel zu einer Projektionsebene liegen, haben in dieser Ebene einen Schatten, welcher parallel der entsprechenden Projektion ist.

Liegt z. B. die Linie parallel zum Grundriß, Fig. 11a, so ist ihr Schatten ab im Grundriß parallel zur Grundrißprojektion a , b .

Der Knickpunkt k wird hierbei am einfachsten erhalten als Schnittpunkt der zur Projektion parallelen Schattenlinie mit der Projektionsachse. (Fig. 12a.)

Linien, schräg zu beiden Projektionsebenen. (Fig. 13 und 14.) Regel: Der Schatten von Linien, welche zu beiden Projektionsebenen schräg liegen, ist zu keiner ihrer Projektionen parallel.

Der Knickpunkt k wird am einfachsten erhalten unter Benutzung des zweiten Durchgangspunktes. Soll z. B. in Fig. 14a der Schatten $a k b$ der Linie $a b$ konstruiert werden, so sucht man zunächst die Schatten a und b der beiden Endpunkte und hierauf den Durchgangspunkt s , des Lichtstrahles von b mit dem hinteren Grundriß. Die Gerade $a s$, ist dann der Schatten der ganzen Linie auf dem Grundriß und schneidet die Projektionsachse in dem Knickpunkt k . In Fig. 14b ist zu demselben Zwecke der Durchgangspunkt $s_{,,}$ mit dem unteren Aufriß ermittelt.

Aus der Projektionslehre ist bekannt, daß durch zwei vollständig bekannte Projektionen eines Gegenstandes sich dessen dritte Projektion unzweifelhaft ergibt. Mit anderen Worten: durch die beiden Aufrisse ist der Grundriß, durch Grund- und Vorderriß ist der Seitenriß und endlich durch den Grund- und Seitenriß ist der Vorderriß gegeben. Hiervon wird vielfach im praktischen Konstruieren der Schlagschatten mit Nutzen Gebrauch gemacht.

In Fig. 15 ist eine Gerade in ihren drei Projektionen gezeichnet, ihr Schatten $a k b$ soll konstruiert werden. Derselbe ergibt sich nach dem bisher angewendeten Verfahren aus Grund- und Vorderriß oder unter Benutzung des Seitenrisses. In dem Seitenriß sind nach Maßgabe der Fig. 4 die dritten Projektionen der Lichtstrahlen eingezeichnet. Der Schattenpunkt a z. B. kann gefunden werden entweder durch den Lichtstrahl aus $a_{,,}$ und a , oder durch den Lichtstrahl aus $a_{,,}$ und $a_{,,}$. Die Projektionen k , und $k_{,,}$ des Knickpunktes k sind unmittelbar aus dem Seitenriß abzuleiten. Da sich nämlich dieser Punkt k in dem Seitenriß im Achsenschnitt O projiziert, ist der Schnitt des Lichtstrahles aus O mit $a_{,,}$ $b_{,,}$ die dritte Projektion $k_{,,}$ des Knickpunktes, aus welcher sich weiter die beiden anderen k , und $k_{,,}$ ergeben.

Der Schatten $a z b$ einer krummen Linie ist im allgemeinen ebenfalls eine Kurve. Man erhält ihn meistens, indem man nicht nur von den beiden Endpunkten a und b , sondern von möglichst vielen Zwischenpunkten z den Schatten konstruiert und die so gefundenen Punkte sinngemäß miteinander verbindet (Fig. 18). In vielen Fällen werden aber auch hier Vereinfachungen der Konstruktion möglich sein. Die Kurven in Fig. 16 liegen zu einer Projektionsebene parallel und ist ihr Schatten deshalb, wie die Figuren erkennen lassen, der entsprechenden Projektion parallel. Ist die Kurve ein Kreisbogen, welcher parallel mit einer Projektionsebene verläuft, z. B. mit dem Fußboden, Fig. 16b, so kann die Konstruktion des Schattens mittels Zwischenpunkten unterbleiben. Durch den Schatten der Endpunkte a und b , sowie des Mittelpunktes m ist mit Hilfe des Zirkels der Schattenbogen $a b$ konstruierbar.

Wie in Fig. 15, ist auch bei einer Kurve in Fig. 17 der Schatten unter Verwendung der dritten Projektion ermittelt und der hier vorkommende Knickpunkt k durch den Lichtstrahl $O k_{,,}$ direkt zu finden.

c) Schlagschatten von ebenen Figuren. (Taf. 3.)

In den Beispielen auf Tafel 3 ist der Schatten der Figuren schraffiert und, wenigstens bei den geradlinig begrenzten Figuren, mit a , b u. s. w. bezeichnet, während die Projektionen der Figuren nicht schraffiert und mit a , b , u. s. w. benannt sind.

Die Konstruktion dieser Schatten beruht auf der Wiederholung der Konstruktion der Schatten von Punkten und Linien. Fallen die Schatten der beiden Endpunkte irgend einer Seite der Figur in dieselbe Projektionsebene, so ist der Schatten dieser Seite die gerade Verbindungslinie der Schatten der beiden Endpunkte, z. B. $a b$ in Fig. 19b. Kommen dagegen die Schatten der beiden Endpunkte irgend einer Seite

der Figur in verschiedene Projektionsebenen, so ist der Schatten dieser Seite geknickt und der Knickpunkt k nach einem der angegebenen Verfahren zu finden; siehe z. B. Fig. 19b bei der Seite $a c$.

Ohne weiteres ergibt sich die Regel: Liegt eine ebene Figur parallel zu einer Projektionsebene, so ist ihr Schatten auf dieser Ebene parallel zu der entsprechenden Projektion. Es ist z. B. in Fig. 19b das Quadrat parallel zum Vorderriß, und demnach der Schatten $abkk$ im Vorderriß parallel zu a, b, c, d .

Ist die ebene Figur ein Kreis, wie in Fig. 23 und 24, so ist der Schatten desselben ein Kreis in der Projektionsebene, zu welcher er parallel liegt, in der anderen dagegen eine Ellipse.

d) Lichtstrahl-Flächen; Schnitte projizierender Lichtstrahlebenen. (Taf. 4 und 5.)

Lichtstrahlflächen. Die sämtlichen Lichtstrahlen L , welche bei einer Geraden AB den Schatten hervorrufen, bilden eine Lichtstrahlebene, siehe Fig. 25a, b und c. Der Schnitt dieser Lichtstrahlebene mit einer oder beiden Projektionsebenen ist der Schatten der Geraden AB . Steht die schattenwerfende Gerade AB senkrecht zu einer Projektionsebene, so steht die Lichtstrahlebene zu dieser Ebene ebenfalls senkrecht und ist demnach eine sogen. projizierende Lichtstrahlebene. So ist in Fig. 25a die Lichtstrahlebene zum Grundriß und in Fig. 25b zum Aufriß projizierend.

Ist die schattenwerfende Linie eine Kurve, z. B. ein Kreis, wie in Fig. 25d, so bilden die sämtlichen Lichtstrahlen, welche den Schatten der Kurve entstehen lassen, eine cylindrische Lichtstrahlfläche, deren Schnitt mit einer oder beiden Projektionsebenen der Schatten der Kurve ist.

Man ersieht auch hieraus wieder, daß die Schattenkonstruktion auf der Lehre der Durchdringung beruht, und welche Ähnlichkeit sie mit der schiefen Projektion hat.

Zu den auf den Tafeln 2 und 3 dargestellten Schatten von Punkten, Linien und ebenen Figuren treten noch einige besondere Fälle, die hier aufgeführt werden mögen.

1) Fällt eine Gerade mit der Lichtstrahlrichtung zusammen, so ist ihr Schatten ein Punkt. Fig. 26a und b.

2) Fällt eine Gerade mit einer projizierenden Lichtstrahlebene zusammen, so ist ihr Schatten, sofern er auf beide Projektionsebenen zu liegen kommt, eine gebrochene Linie, deren Teile Winkel von 90° bzw. 45° mit der Projektionsachse einschließen. Fig. 26c und d. Es entsteht also derselbe Schatten wie in Fig. 8c bzw. 9b.

3) Fällt eine ebene Figur mit einer projizierenden Lichtstrahlebene zusammen, so ist ihr Schatten, sofern er auf beide Projektionsebenen zu liegen kommt, eine gebrochene Gerade, deren Teile Winkel von 90° bzw. 45° mit der Projektionsachse einschließen. Fig. 26e und f. Es entsteht also derselbe Schatten wie in Fig. 26c und d, als auch wie in Fig. 8c bzw. 9b.

Das über die Lichtstrahlflächen von Linien Gesagte kommt selbstverständlich auch vor, wenn der schattenwerfende Gegenstand ein Körper ist.

Sind bei einem Körper, Fig. 27a, sämtliche schattenwerfende Kanten gerade Linien, so bilden ihre Lichtstrahlebenen ein Prisma, dessen Durchschnitt mit den Projektionsebenen der Schatten des Körpers ist.

Bei einem Cylinder, Fig. 27b, berühren die Lichtstrahlen dessen Mantelfläche in zwei Mantellinien AC und BD , bilden also zwei Lichtstrahlebenen $ACIa$ und

BD II b, während die Lichtstrahlen, die durch den rechten, oberen Bogen AB hindurchgehen, eine cylindrische Lichtstrahlfläche ABba erzeugen. Die beiden Mantellinien AC und BD, in welchen der Cylinder von den Lichtstrahlen berührt wird, sind seine Kernschattenlinien, und sind deren Schlagshatten CI und DII bezw. Ia und II b unter sich bezüglich parallel.

Der Kegel in Fig. 27c wird von den Lichtstrahlen in zwei Mantellinien AS und BS berührt. Es entstehen dadurch zwei Lichtstrahlebenen, ASI_s und BSI_s. Die beiden Mantellinien AS und BS bilden den Kernschatten des Kegels, und sind deren Schlagshatten AI und BI, bezw. Is_s und IIs_s, unter sich nicht parallel. Sie schneiden sich in s, bezw. in s_s; dieses sind die Durchgangspunkte des Lichtstrahls von der Spitze S mit dem Grundriß, bezw. Aufriß.

Schnitte projizierender Lichtstrahlebenen. Um zu erkennen, welche Flächen eines Körpers beleuchtet sind, und welche sich im Schatten befinden, legt man am einfachsten durch den Körper eine projizierende Lichtstrahlebene zum Grundriß. Die Grundrißspur dieser lotrechten Lichtstrahlebene fällt mit dem Lichtstrahlgrundriß l, zusammen. Fig. 28 bis 30.

Der Schnitt der projizierenden Lichtstrahlebene mit dem Körper ist in den Figuren auf der Tafel 5 durch Schraffur hervorgehoben.

In Fig. 28a wird das vierseitige Prisma durch die lotrechte Lichtstrahlebene in dem Viereck 1·2·3·4 geschnitten. Aus dem Aufriß dieses Viereckes und den Lichtstrahlen l_s ersieht man, daß dieselben die Seiten 1·4 und 1·2 beleuchten, weshalb auch die entsprechenden Seitenflächen des Prismas beleuchtet sind. Die Seiten 2·3 und 3·4 werden von den Lichtstrahlen l_s nicht getroffen, liegen also, wie auch die zugehörigen Seitenflächen, im Schatten. Ferner erkennt man, daß die Punkte 2 und 4, als auch die durch sie hindurchgehenden Seitenkanten, Schatten werfen müssen. Die in Fig. 28b und c gezeichneten Prismen stehen im Grundriß auf, und können aus diesem Grund ihre Aufstandsflächen keine Schatten werfen.

Der Schnitt des Prismas in Fig. 28b mit der projizierenden Lichtstrahlebene ist ein Dreieck, dessen eine Seite 2·3 mit der Richtung der Lichtstrahlen l_s zusammenfällt. Diese Seite 2·3, wie auch die entsprechende Seitenfläche des Prismas liegen in der Richtung der Lichtstrahlen, befinden sich also im Streiflicht.

Bei dem Prisma in Fig. 28c ergibt sich aus dem Schnittdreieck 1·2·3, daß die Seiten 1·2 und 2·3, als auch demnach die entsprechenden, oberen Seitenflächen des Prismas beleuchtet sind. Der kleinere Schnitt 4·5·6·7 durch das Prisma ist so gewählt, daß die eine seiner Ecken 6 auf der rechten oberen Seite des hinteren Dreiecks liegt. Da nun der Punkt 6 Schatten wirft, so gilt dies auch von der Dreiecksseite des Prismas, auf welcher er sich befindet.

In ganz ähnlicher Weise kann das eben angedeutete Verfahren auch bei anderen Körpern benutzt werden.

Soll bei dem Cylinder in Fig. 29 erörtert werden, in welcher Beziehung seine Mantelfläche zu den Lichtstrahlen steht, so wird durch ihn wiederum eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt. Der Schnitt dieser Ebene mit dem Cylinder ist eine Ellipse, die sich im Aufriß als Kreis projiziert. Dieser Kreis wird von den Lichtstrahlaufrissen l_s in den beiden Punkte b₂ berührt und demnach auch der Cylinder. Durch die Punkte b₂ sind die Mantellinien des Cylinders bestimmt, die im Kernschatten liegen. Der Teil b₂ h b₂ des Cylindermantels liegt lichtzugewendet, ist also hell, der andere Teil b₂ d b₂ ist lichtabgewendet, also dunkel.

Von der in Fig. 30 gezeichneten Kugel ist klarzulegen, in welcher Beziehung die Lichtstrahlen, die sich nach l_1 projizieren, zur Kugeloberfläche stehen. Es wird zu diesem Behuf durch l_1 eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt. Dieselbe schneidet die Kugel in einem Kreis, welcher sich im Aufriß als die anschriffierte Ellipse darstellt. Die Lichtstrahlaufrisse l_2 berühren die Ellipse in den beiden Punkten b_2 und demnach auch die Kugel. Beide Punkte sind Kernschattenpunkte der Kugel.

Die genaue Ermittlung der Punkte b_2 hängt besonders von der genauen Zeichnung der Schnittellipse ab. Sicherer und schneller können die Berührungspunkte b durch folgendes Verfahren bestimmt werden. Man nimmt zu der lotrechten Lichtstrahlebene durch l_1 (Fig. 30) eine parallele Ebene an, welche den Grundriß in der Achse GG schneidet. Auf diese neue, dritte Projektionsebene projiziert man sodann den Schnittkreis der Kugel mit der lotrechten Lichtstrahlebene, als auch die Lichtstrahlen selbst. Darauf dreht man die neue Projektionsebene mit dem auf ihr befindlichen Schnittkreis und den Lichtstrahlaufrissen l_3 um die Achse GG so lang, bis sie in den Grundriß zu liegen kommt. Die Lichtstrahlen l_3 ergeben die Berührungspunkte b_3 mit dem, in der Figur unten rechts befindlichen, anschriffierten Schnittkreis. Durch Zurückdrehen und weiteres Projizieren erhält man dann die Punkte b_1 und b_2 .

Bezüglich der Projektionen auf der neuen Projektionsebene ist zu bemerken, daß der Mittelpunkt m_3 des Schnittkreises dieselbe Höhenlage hat, wie der Kugelmittelpunkt m_2 ; ferner, daß die Lichtstrahlen l_3 mit der Achse GG keine Winkel von 45° , sondern den Neigungswinkel γ der Lichtstrahlen einschließen. Die Berührungspunkte b_3 befinden sich auf den wagerechten Kugelkreisen P_u und P_o , die ihrerseits parallel zum Kugeläquator AA liegen.

Nach Fig. 31 ist dieselbe Aufgabe mit einer Kugel gelöst durch eine projizierende Lichtstrahlebene zum Aufriß, die durch l_2 geht. Die Lösung ist ähnlich der eben besprochenen eine doppelte. Die Berührungspunkte b_1 ergeben sich aus den Lichtstrahlen l_1 und der Schnittellipse, oder aus den Lichtstrahlen l_3 und dem Schnittkreis.

e) Schlag- und Kernschatten von Körpern. (Taf. 6 bis 8.)

Der Schlagsschatten der auf den Tafeln 6 bis 8 dargestellten Körper ist parallel zur Projektionsachse, der sichtbare, im Schatten liegende Teil der Körper dagegen senkrecht zu dieser Achse schraffiert.

Prisma, Cylinder, Pyramide und Kegel. Die Konstruktion der Schatten von Körpern ist, wenn dieselben selbst einfache sind und eine einfache Lage zu den Projektionsebenen haben, wie es in den praktischen Anwendungen meistens der Fall ist, ohne sonderliche Schwierigkeiten. Man überlege, welche Kanten von den Körpern Schatten werfen können und erhält mit Konstruktion der Schatten dieser Kanten den Schlagsschatten des Körpers. Z. B. in Fig. 32 ersieht man sofort aus dem Grundriß, daß die Flächen I-II-1-2, II-III-2-3 und 1-2-3-4 des Würfels beleuchtet sind und demnach die Kanten I-1, 1-4, 4-3 und 3-III schattenwerfend sind. Der Schlagsschatten des Würfels ist das Vieleck I-k-s₁-s₄-k-s₃-III-IV-I.

Bei dem Cylinder in Fig. 36a wird der Schlagsschatten erzeugt durch die beiden Mantellinien I-1, 5-V und den Kreisbogen 1-2-3-4-5. Der Schlagsschatten des Cylinders in Fig. 36b entsteht durch den Schatten der beiden Mantellinien I-1, 5-V, des hinteren Kreisbogens I-VIII-VII-VI-V und des vorderen Kreisbogens 1-2-3-4-5. Nach Fig. 37 ist der Schlagsschatten eines Cylinders mit Hilfe des Seitenrisses gefunden.

Der Schlagsschatten der Pyramide in Fig. 38 ist derselbe wie der des Dreiecks

1 · s · 3. Die Knickpunkte k_1 und k_2 werden am sichersten erhalten, indem man sich den Schatten s'_s der Spitze s auf den verlängerten Grundriß konstruiert; sie sind dann der Schnitt der Schatten $1s'_s$ und $3s'_s$ mit der Projektionsachse.

Der Schatten des Kegels in Fig. 39 wird erhalten, indem zuerst der Schlag Schatten s'_s der Spitze s auf dem verlängerten Grundriß gesucht wird. Hierauf zieht man von s'_s die Tangente $1s'_s$ und rs'_s an den Grundrißkreis des Kegels und erhält damit die Berührungspunkte l und r . Die Verbindungslinien von l bezw. r mit s , sind Mantellinien und zugleich der Kernschatten des Kegels. Der Schlag Schatten des letzteren ist der des Dreiecks $1s, r$.

Der Winkel β , welchen die Grundrisse der Kernschattenlinien einschließen, hängt ab von dem Spitzwinkel α des Kegels bei s ,, er kann nie 180° sein, sondern ist immer kleiner. In den beiden Punkten l und r , können nicht, wie bei dem Cylinder z. B. in Fig. 36 a an I und V Tangenten an den Grundkreis gezogen werden, welche mit den Grundrisse der Lichtstrahlen zusammenfallen. Stellt man sich vor, die Spitze des Kegels in Fig. 39 sänte nach und nach tiefer, so würden sich gleichzeitig die Punkte r und l nähern und schließlich einmal zusammenfallen. Ein Kegel, bei welchem dies zutrifft, ist in Fig. 40 a gezeichnet, derselbe hat nur eine Kernschattenlinie s, ss . Sinkt die Spitze des Kegels noch tiefer, (Fig. 40 b) so ist überhaupt ein Kernschatten nicht mehr möglich, und wird die gesamte Mantelfläche des Kegels beleuchtet.

Die Konstruktion des Schattens eines Kegels, welcher nicht im Grundriß aufsteht, ist aus Fig. 41 zu ersehen. Zur Erhaltung der Kernschattenpunkte wird vom Grundkreis des Kegels der Schatten auf den Grundriß konstruiert.

Kugel. Wie der Schlag Schatten beim Cylinder und Kegel aus ihrem Kernschatten gefunden wird, so ist es auch bei der Kugel. Der Konstruktion des Kernschattens der Kugel liegt folgende Betrachtung zu Grunde. Die Lichtstrahlen, welche den Kernschatten erzeugen, bilden in ihrer Gesamtheit einen Cylinder. Dieser sogen. Lichtstrahlcylinder berührt mit seinem Normalkreis die Kugel in einem größten Kreis, welcher der Kernschatten ist. Da nun der Lichtstrahlcylinder zu beiden Projektionsebenen schräg steht, so stellt sich der Kernschatten im Auf- und Grundriß als Ellipse dar.

Die Konstruktion auf Tafel 7 wird zurückgeführt auf den Fall in Fig. 30. Man bildet von der Kugel und dem Lichtstrahlcylinder eine neue dritte Projektion. Dieselbe befindet sich auf einer Projektionsebene, welche parallel zum Lichtstrahlgrundriß l_1 gerichtet ist und senkrecht zum Grundriß steht. Der Schnitt der neuen Projektionsebene mit dem Grundriß ist die Gerade GG . Um diese Gerade wird nun die neue Projektionsebene mit der auf ihr befindlichen Projektion der Kugel und des Lichtstrahlcylinders gedreht, bis sie in den Grundriß zu liegen kommt, siehe Fig. 44. Der Lichtstrahlcylinder bildet mit seiner, durch den Kugelmittelpunkt m_3 gehenden Achse L und der Achse GG den Neigungswinkel γ der Lichtstrahlen. Der Berührungskreis von Kugel und Lichtstrahlcylinder ist die Gerade $1 \cdot m_3 \cdot 5$.

Die Punkte 1 und 5 dieses Kreises kommen in dem Grundriß Fig. 43 auf die projizierende Lichtstrahlebene, die durch l_1 geht, zu liegen. Auf dem Äquator AA , Fig. 44, befinden sich die Kreispunkte 3 und 7 , die sich im Grundriß ebenfalls auf dem Äquator projizieren müssen. Soll nun weiter von einem beliebigen Kreispunkt, z. B. 8 , auf $1 \cdot m_3 \cdot 5$ liegend, der Grundriß gewonnen werden, so geschieht dies, indem man durch ihn einen wagerechten Parallelskreis P_n legt. Genannter Kreis erscheint im Grundriß in seiner wahren Größe und wird auf ihm durch das Ziehen der Senkrechten $8 \cdot 8$ zur Achse GG der Grundrißpunkt 8 gefunden. Auf diese Weise

können im Grundriß Fig. 43 so viel Ellipsenpunkte gefunden werden, als zum genauen Zeichnen dieser Kurve erforderlich ist.

Die gewonnenen Grundrißpunkte der Ellipse in Fig. 43 werden in dem Aufriß Fig. 42 mit Hilfe der Ordinaten und Parallelkreise P konstruiert.

Man sieht aus den Figuren, daß die beiden Kernschatten-Ellipsen im Grund- und Aufriß kongruent sind. Ihre großen Achsen sind $3 \cdot 7$ bzw. $g \cdot g$, ihre kleinen die Linien $1 \cdot 5$ bzw. $k \cdot k$. Die tiefsten und höchsten Punkte 1 und 5 des Kernschattens bestimmen sich im Aufriß durch die Parallelkreise P_t und P_h , deren Entfernung b vom Äquator AA aus Fig. 44 zu entnehmen ist.

Nachdem die Projektionen des Kernschattens gefunden sind, ist der Schlagschatten der Kugel zu konstruieren. Derselbe ist der Schlagschatten der Kernschattenellipsen. Die Konstruktion der Schlagschatten-Ellipsen ist aus der Figur zu ersehen.

Ring, Fig. 45. Die Kernschattenpunkte s und σ , die ein beliebiger Lichtstrahl l auf der Ringfläche hervorruft, sind die Berührungspunkte dieses Lichtstrahles mit der Ringfläche. Zur Konstruktion dieser Punkte kann durch den Lichtstrahlgrundriß l_1 eine projizierende Lichtstrahlebene gelegt werden, deren Schnitt mit der Ringfläche im Aufriß durch Schraffur hervorgehoben ist. Die Berührungspunkte der Lichtstrahlrichtungen l_2 an diese Schnittfigur sind die Aufrisse s'' und σ'' , der gesuchten Kernschattenpunkte, ihre Grundrisse s_1 und σ_1 liegen auf l_1 . Durch mehrfaches Wiederholen dieses Verfahrens können die Kernschattenkurven gezeichnet werden.

Einfacher und genauer findet man den Kernschatten beim Ring mit Hilfe des Kernschattens einer Kugel nach Tafel 8. Den Ring (Fig. 46 und 47) kann man sich entstanden denken durch eine Kugel, deren Mittelpunkt sich auf dem Kreis m_1, m_2, \dots, m_8 bewegt. An die rotierende Kugel ist der Kernschatten konstruiert worden, ihr Grund- und Aufriß sind in Fig. 48 und 49 dargestellt. Von der rotierenden Kugel sind in dem Grundriß des Ringes (Fig. 47) acht Lagen gezeichnet. In jeder Lage berührt sich die Kugel mit der Ringfläche in einem lotrechten Meridiankreis. Sie haben also in jeder Lage einen Meridiankreis gemeinsam und ebenso die auf diesem Kreis befindlichen Kernschattenpunkte. Da nun aus Fig. 48, dem Grundriß der Kugel, bekannt ist, wo die Kernschattenpunkte eines jeden Meridianes liegen, können diese Punkte ohne weiteres nach Fig. 47, dem Grundriß des Ringes übertragen werden. So entspricht z. B. der Ringmeridian $2M6$ dem Kugelmeridian $2m6$, von welchem letzterem die Kernschattenpunkte 2 und 6 sind. Beide Punkte 2 und 6 haben gleiche Entfernung von m , dieselbe wird in Fig. 47 von m_2 , bzw. m_8 radial nach 2 und II, bzw. VI und 6 abgetragen, womit 4 Kernschattenpunkte des Ringes erhalten werden.

Der Ring wird von den Lichtstrahlen in einer äußeren und einer inneren Kernschattenkurve berührt. Die erstere ist mit arabischen, die andere mit römischen Zahlen bezeichnet.

Mit Hilfe des Kugelaufrißes Fig. 49 ist man nun imstande, auch den Aufriß der Kernschattenkurven des Ringes in Fig. 46 zu finden. Den Abstand, den die Kernschattenpunkte der Kugel von ihrer Äquatorebene AA haben, besitzen auch die entsprechenden Punkte der Kernschattenlinie des Ringes von der Äquatorebene AA des letzteren.

Die Konstruktion des Schlagschattens ist auf der Tafel mit angegeben.

3. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlagschatten auf beliebige Flächen.

Bei den bisherigen Aufgaben wurde immer nur der Schlagschatten auf die Projektionsebenen konstruiert, während er im Folgenden auf ganz beliebigen Flächen gefunden werden soll.

Auf den zu diesem Kapitel gehörenden Tafeln 9 bis 12 ist der Deutlichkeit halber von der schattenaufnehmenden Fläche der Schlagschatten auf die Projektionsebenen nicht dargestellt worden.

a) Schlagschatten von Punkten. (Taf. 9.)

Der Schatten eines Punktes mit irgend einer Fläche ist der Durchgangspunkt seines Lichtstrahles mit dieser Fläche.

Diese Aufgabe löst man am besten mit Lotrechten Lichtstrahlebenen. Ist z. B. vom Punkt p in Fig. 50b der Schatten auf dem Dreieck 1.2.3 zu suchen, so wird durch den Grundriß seines Lichtstrahles eine Lotrechte Lichtstrahlebene gelegt, welche das Dreieck in der Linie $a b$ schneidet. Der Schnittpunkt $p_{s''}$ dieser Linie mit dem Lichtstrahlaufriß ist die zweite Projektion des Schattens, die erste Projektion p_s ist durch die Ordinate aus $p_{s''}$ bestimmt. In derselben Weise sind auf Tafel 9 sämtliche Schatten konstruiert; nur in Fig. 50c ist die Lichtstrahlebene ausnahmsweise einmal senkrecht zum Aufriß gelegt worden.

Da der Schatten der Punkte mittels Schnitten von Lichtstrahlebenen gefunden wird, bezeichnet man dieses Verfahren mit Schnittmethode.

Nach Fig. 50a bis c, in welchen der Schatten auf ebene Flächen fällt, reihen sich in d und e, sowie in Fig. 51a Aufgaben mit Cylinderflächen an. Auch bei diesen ist zur Auflösung dieselbe Methode angewendet. Soll z. B. auf dem schrägen Cylinder in Fig. 51a vom Punkt p der Schatten gefunden werden, so wird durch den Lichtstrahl aus p eine Lotrechte Ebene gelegt. Diese Ebene schneidet den Cylinder in einer Ellipse, deren Aufriß mit Hilfe des ungeklappten Normalschnittes, d. i. der anschraffierte Kreis im Grundriß, gezeichnet wird. Der Schnitt des Lichtstrahlaufrisses aus $p_{s''}$ mit der Ellipse ist der Schattenpunkt $p_{s''}$, der Grundriß p_s ergibt sich sofort durch Projektion.

Der Schatten eines Punktes auf einer Regelfläche (Fig. 51b), auf einer Kugelfläche (Fig. 51c) und endlich auf einer Ringsfläche (Fig. 51d) wird ebenfalls mit Benutzung von Lotrechten Lichtstrahlebenen konstruiert. Bei der Kugelfläche sind noch zwei andere Lösungen mit angegeben. Nach der einen wurde durch den Punkt eine projizierende Lichtstrahlebene zum Grundriß gelegt, nach der anderen eine solche zum Aufriß. Die Schnittkreise dieser Ebenen mit der Kugel, der Punkt und der von diesem ausgehende Lichtstrahl wurden, wie bei Fig. 30 und 31 besprochen, auf eine neue dritte Projektionsebene projiziert, wodurch sich in dieser die Schattenpunkte $p_{s'''}$ ergeben und aus diesen schließlich p_s und $p_{s''}$.

b) Schlagschatten von Linien. (Taf. 10.)

Die Lösung derartiger Aufgaben beruht auf zwei- oder mehrmaliger Anwendung des eben besprochenen Verfahrens der Schnittmethode.

Die Schatten der Linien sind in den Figuren auf Tafel 10 zum Unterschied von den Projektionen kräftig ausgezogen.

In den Fig. 52a bis e sind Schatten von Geraden auf ebene Figuren, in f der Schatten von einer Kurve auf ein Dreieck konstruiert. Im letzten Fall ist es notwendig, zum genauen Verzeichnen der Schattenkurve Zwischenpunkte z zu verwenden. Dasselbe ist auch erforderlich bei den Fig. 53a bis d, nach welchen der Schatten von Geraden auf Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen fällt.

c) Schlagschatten von ebenen Figuren. (Taf. 11.)

Die Schlagschatten sind durch Schraffur hervorgehoben.

Der Schatten des Kreises in Fig. 55c ist der Durchgang des Lichtstrahlcylinders mit dem Viertelkegel und deshalb eine doppelt gekrümmte Kurve.

d) Schlagschatten von Körpern. (Taf. 12.)

Auch bei derartigen Aufgaben gründet sich die Lösung auf die von Punkten.

Der Schlagschatten der Körper ist auf Tafel 12 parallel, der im Schatten liegende Teil des Körpers zum Unterschied dagegen senkrecht zur Projektionsachse schraffiert.

4. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten von Körper auf Körper. (Taf. 13 und 14.)

Auf der Tafel 13 sind von einigen Körperzusammenstellungen unter Angabe der Konstruktionslinien die Schlag- und Kernschatten dargestellt. In der unteren Reihe dieser Tafel und auf Tafel 14 befinden sich Konstruktionen der Schlagschatten bei Nischen.

Bei der Cylindernische in Fig. 60e wirft der linke, vordere Achtelkreis Schatten auf den Hohlzylinder, die übrigen Punkte des oberen Kreises sind beleuchtet. In Fig. 61a ist eine Cylindernische gezeichnet, welche oberhalb durch eine Viertelkugel geschlossen ist. Der Schlagschatten liegt zum Teil auf der Kugel-, zum andern Teil auf der Cylinderfläche. Um vom Punkt p den Schatten zu finden, wird durch ihn eine Lotrechte Lichtstrahlebene gelegt, welche die Kugel in einem Kreisbogen und den Cylinder in einer Lotrechten Geraden schneidet. Der Kreisbogen stellt sich im Aufriß als Ellipsenbogen dar, der durch Annahme der Horizontalschnitte h konstruiert werden kann. Der Schnitt des Lichtstrahlaufrißes durch p , mit dem Ellipsenbogen ist der Schatten von p . Der letzte schattenwerfende Punkt t ist der Tangentialpunkt der Lichtstrahlrichtung mit dem Halbkreis der Kugel.

Von der halben Hohlkugel Fig. 61b wird der Schlagschatten ebenso wie bei der Cylindernische gefunden. Die letzten schattenwerfenden Punkte t sind die Tangentialpunkte der Lichtstrahlrichtung an den Äquatorkreis der Kugel.

Von der Kegelnische in Fig. 61c werden die Tangentialpunkte t gefunden, indem durch einen Lichtstrahl die Kegelspitze S auf die vordere, Lotrechte Begrenzungsfläche nach s_1 und s_2 projiziert wird. Durch die Tangenten von s_2 an den größten Nischenkreis erhält man beide t . Der Schatten eines jeden Punktes p wird auch hier wieder durch Lotrechte Lichtstrahlebenen ermittelt. Diese Ebenen schneiden den Kegel in Ellipsen.

Der Schatten vom Punkt m kann bequem durch eine projizierende Lichtstrahlebene zum Aufriß konstruiert werden. Dieselbe, durch m gelegt, geht durch die Kegelspitze und schneidet den Kegel in dem Dreieck mSa . Der Schnitt des Lichtstrahles aus m , mit S, a , ist der Schatten von m .

Weitere Nischen mit dem zugehörigen Schlagshatten sind in Fig. 62 und 63 gezeichnet. In Fig. 62 sind die Nischen oben durch Cylinderflächen abgeschlossen, Fig. 63 ist der umgekehrte Fall von Fig. 61a.

5. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten bei Rotationskörpern. (Taf. 15.)

Von dem auf Tafel 15 in Fig. 64 und 65 gezeichneten Rotationskörper ist zunächst der Kernschatten seines unteren Ringtheiles mit Hilfe der Kugel in Fig. 66 konstruiert worden.

Der Kernschatten am mittleren Teil des Rotationskörpers wird am leichtesten und genauesten mit Benutzung von Tangentialkegeln gefunden. Der Horizontalschnitt hh schneidet den Rotationskörper in einem horizontalen Kreis tt . Diesen Kreis kann man als Grundfläche eines Kegels auffassen, dessen Achse mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfällt, und von welchem die Mantellinien st die Tangenten in t an der Meridiankurve des Rotationskörpers sind. Dieser Tangentialkegel und der Rotationskörper haben also hiernach den Kreis tt gemein und in diesem gleiche Kernschattenpunkte. Konstruiert man sich nun von dem Tangentialkegel den Schlagshatten s_s seiner Spitze s auf die horizontale Ebene hh , so ergeben sich die im Grundriß gezeichneten Kernschattenlinien Tt und Ts , deren untere Punkte T auch Kernschattenpunkte des Rotationskörpers sind. Auf diese Weise kann man soviel Punkte der Kernschattenlinie erhalten, als es notwendig ist, diese genau zeichnen zu können.

Auf dem Horizontalkreis kk haben die Meridiane des Rotationskörpers lotrechte Tangenten lt , die zusammen einem lotrechten Berührungscylinder angehören, von welchem der Kernschatten ohne weiteres aus dem Grundriß gefunden werden kann. Der Kegel in Fig. 66b hat einen Basiswinkel von 45° , woraus folgt, daß seine Kernschattenlinien ts im Grundriß einen rechten Winkel einschließen. Ein solcher Kegel in Fig. 64 eingezeichnet, würde den Rotationskörper in dem Kreisbogen, auf welchem die Punkte 5 und 7 liegen, berühren. Die Punkte 5 und 7 selbst haben im Grundriß Fig. 65 die Lage wie die Punkte t und t in Fig. 66b.

Der Schlagshatten, welcher auf den Rotationskörper fällt, rührt her von einem Teil des unteren Grundkreises des oberen Cylinders. Der Punkt O' von diesem Kreise, welcher auf dem Meridian liegt, welcher mit der lotrechten Lichtstrahlebene zusammenfällt, hat, wie man sofort einsehen wird, einen Schatten o , welcher in der Schlagshattenkurve $uPoPu$ der höchste Punkt ist.

Der Schatten von O' auf die Rotationsfläche kann nun direkt ermittelt werden. Man denke sich dann den Lichtstrahl, der durch O' geht, mit dem Meridian $2s$ gedreht, bis beide parallel zur Aufrißebene kommen. Der Meridian $2s$ deckt sich dann mit dem linken Meridian $3s$. Punkt O' liegt in O und der Lichtstrahl L bildet mit einer Wagerechten den Neigungswinkel γ . Der Durchschnitt von L mit dem linken Meridian ist der Schatten von O' , der wieder zurückgedreht auf o zu liegen kommt.

Zur Konstruktion weiterer Schlagshattenpunkte P dient folgendes Verfahren. Ein wagerechter Kreis K , Fig. 67, hat seinen Mittelpunkt auf der Kegelschneidlinie; es wird nun gefragt, welcher Punkt p der Kreislinie wirft auf den beliebig angenommenen

Horizontalkreis k des Kegels einen Schatten P . Man kann sich aus dem Horizontalkreis k des Kegels einen Lichtstrahleylinder errichtet denken, welcher die Ebene des großen Kreises K in einem Kreis mit dem Mittelpunkt m_k schneidet; der Radius dieses Schnittkreises ist dann derselbe, wie der des auf der horizontalen Ebene kk liegenden. Der große Kreis K und der mit dem Mittelpunkte m_k schneiden sich in zwei Punkten p , die durch Lichtstrahlen auf k zurückprojiziert die beiden Schattenpunkte P ergeben. Auf genau dieselbe Weise und mit derselben Bezeichnung sind bei dem Rotationskörper (Fig. 64 und 65) auf dem horizontalen Kreis kk die Schatten P und P' der beiden Punkte p des großen Kreises KK gefunden worden. Die unteren Punkte u der Schlagschattenkurve liegen auf den Kernschattenlinien und sind am besten durch Probieren zu finden.

Die Konstruktion des Schlagschattens des Rotationskörpers ist in der Figur angegeben und aus dieser zu verfolgen.

6. Kapitel.

Anwendungen. (Taf. 16 bis 23.)

Schatten bei Dächern und Treppen. Auf Tafel 16 und 17 ist eine Reihe von Aufgaben über Gebäudeformen gegeben, wie solche häufig beim Entwerfen vorkommen. Die Konstruktionslinien zur Bestimmung der Schatten sind eingezeichnet. Der Schlagschatten bei Giebeln hängt, wie z. B. aus Vergleich der Fig. 72b, 73 und 74a hervorgeht, von der Neigung der Dachflächen ab.

Schatten bei Gesimsen. Die Tafel 18 enthält die Konstruktion der Schatten an einigen öfters vorkommenden Gesimsanordnungen nebst den Konstruktionslinien.

Auf Tafel 19 ist der Schatten an ein Fenster konstruiert. Der Schatten an der Sohlbankkonsole ist in Fig. 89 und 90, der von der Spitzverdachung in Fig. 93 auf Tafel 20 größer dargestellt. Fig. 91 bringt die Schlagschattenkonstruktion bei einer Architrav-Verkröpfung. Fig. 92 zeigt den Schatten eines profilierten Quaders, Fig. 94 und 95 solchen von Füllungen.

Auf der Tafel 21 sind in Fig. 96 und 97 bei Quaderungen und Sockelgesimsen, endlich in Fig. 98 und 99 bei einfachen Holzwerken die Schatten konstruiert.

Schatten bei Säulen-Kapitälern und Sockeln. Die Konstruktion der Kern- und Schlagschatten bei diesen aus Rotationskörpern und Prismen gebildeten Kapitälern und Sockeln erfolgt am besten mit der Schnittmethode.

Bei dem toskanischen Kapital auf Tafel 22 ist zur Ermittlung von Kern- und Schlagschattenpunkten durch dasselbe die lotrechte Lichtstrahlebene l^1 gelegt. Dieselbe schneidet das Kapital in einem Profil, von welchem der Aufriß in der Kapitalansicht gezeichnet ist. Die Lichtstrahlaufrisse an die Eckpunkte 1 und 2 ergeben in ihrem Schnitt mit dem Profil die Schlagschatten I und II. Der Kernschatten 3 ist der Berührungspunkt eines Lichtstrahlaufrisses an die Schnittkurve des Schinus, sein Schlagschatten fällt nach III, in die Cylinderfläche des Kapitalhalses. Der Schatten e_s vom Eckpunkt E des Abakus liegt auf dem Schnitt der lotrechten Lichtstrahlebene l^2 mit dem Kapital.

Von den Lichtstrahlschnitten werden soviel aufgetragen, um ein sicheres Zeichnen der Schattenlinien vornehmen zu können.

In derselben Weise wurden die Schatten beim Sockel auf Tafel 23 konstruiert.

Zweiter Abschnitt.

Einiges über die Beleuchtung und Lichtverteilung. (Taf. 24 und 25.)

Nach Fig. 102 auf Tafel 24 ist ein Lichtstrahl L parallel zum Aufriß gelegt, er schließt mit der Projektionsachse den Neigungswinkel γ ein.

In Fig. 103 bedeutet die Gerade F eine durch die Strahlen L beleuchtete ebene Figur, welche senkrecht zum Aufriß steht. Diese Figur F denke man sich um die Gerade O , welche ebenfalls eine senkrechte zum Aufriß ist, drehbar, und lasse ihr nach und nach von der Anfangslage $O \cdot 8$ die Zwischenlagen $O \cdot 7$, $O \cdot 6$ u. s. w. und schließlich die Endlage $O \cdot 0$ einnehmen. Wird während der Drehung die Fläche durch die Strahlen L beleuchtet, so sieht man unmittelbar aus Fig. 103, daß bei der Anfangslage $O \cdot 8$, in welcher F senkrecht zur Lichtstrahlrichtung liegt, die Menge der Lichtstrahlen, welche die Fläche treffen, am größten ist. In jeder anderen Lage wird die gedrehte Fläche von einer geringeren Menge von Lichtstrahlen getroffen.

Daraus folgt, daß in der normalen Lage zur Lichtstrahlrichtung die Fläche am hellsten, in jeder anderen weniger hell und endlich gar nicht beleuchtet ist, wenn sie, wie in $O \cdot 0$ mit der Lichtstrahlrichtung zusammenfällt.

Würde man, um einen Maßstab der Beleuchtung der Fläche zu erhalten, ihre Projektion $O 8$ in etwa 8 gleiche Teile zerlegen, so würde z. B. die Fläche in $O \cdot 7$ nur $\frac{7}{8}$, die in $O \cdot 6$ nur $\frac{6}{8}$ u. s. w. der Lichtstrahlmenge erhalten als die Anfangslage. Diesen Beleuchtungsgraden entsprechen ganz bestimmte Winkel, welche die Fläche F mit der Lichtstrahlrichtung L einschließt; sie können aus der Zeichnung entnommen werden.

Bemerkung: Ein Beleuchtungsmaßstab könnte dann in der Weise erhalten werden, daß man sich 8 Quadrate zeichnet und diese mit $8 \cdot 7 \dots 0$ benennt. Hierauf würde man sämtliche acht mit einem bestimmten Tuschton, welcher der hellsten Beleuchtung entspräche, anlegen, danach das Quadrat 8 als hellstes ausscheiden und die sieben übrigen mit dem Ton zum zweitenmal anlegen, hierauf das Quadrat 7 ausscheiden u. s. w., bis zuletzt das Quadrat 0, zum neuntenmal angelegt, das dunkelste würde.

Die Beleuchtung von Flächen läßt sich sehr leicht aus der der Kugel ableiten. Von der in Fig. 104 bis 106 dargestellten Kugel ist der Kernschatten nach der bekannten Konstruktion gezeichnet worden. Die Lichtstrahlrichtung L in Fig. 106 bildet mit der Achse $G G$ den Neigungswinkel γ . Die Fig. 103 ist in etwas veränderter Weise nach Fig. 107 übertragen, indem nur vier Lagen der Fläche F an-

genommen sind. In dieser Fig. 107 bedeutet 4·0·4 die Anfangslage von F, sie liegt normal zur Lichtstrahlrichtung L und ist also am hellsten; ferner ist 0·0·0 die Schluslage, sie fällt mit der Lichtstrahlrichtung zusammen und ist daher am dunkelsten. Die Lagen 1·2·3 sind durch Viertelung von 0·4 gewonnen.

Denkt man sich nun weiter die Lagen der Flächen in Fig. 107 parallel bis zur Berührung der Kugel in Fig. 106 verschoben, so erhält man durch die Verschiebung der hellsten Lage 4·4 auf der Kugel den hellsten Punkt H, durch die Verschiebung von der Lage 0·0 auf der Kugel die dunkelsten Punkte d des Kernschattens. Durch Verschiebung einer beliebigen Zwischenlage, z. B. 03, ergeben sich bei ihrer Berührung mit der Kugel zwei Punkte b, in welchen die Kugel dieselbe Beleuchtung hat als die Zwischenlage 0·3. (Fig. 107.)

Durch die beiden Berührungspunkte b einer jeden Lage kann man einen Kreis legen, welcher parallel zum Kernschattenkreis dd gerichtet ist. Diese Kreise sind in der Fig. 106 durch gestrichelte Linien angedeutet. In sämtlichen Punkten der Peripherie eines und desselben Kreises bb haben die Lichtstrahlen dieselbe Neigung zur Kugeloberfläche, die Punkte sind deshalb gleich hell beleuchtet und bezeichnet man die Kreise, auf welchen sie liegen, als Kreise gleicher Helle. Daraus ergibt sich, daß nicht nur die zwei Punkte b und b des Kreises bb, sondern alle seiner Peripherie dieselbe Beleuchtung haben als die Lage der Fläche 03 aus Fig. 107, welche die Kugel in b berührt.

Jeder Kreis gleicher Helle auf der Kugel kann ferner aufgefaßt werden als der Grundkreis eines Kegels, welcher die Kugel in ihm berührt. So ist z. B. bb der Grundkreis des Berührungskegels mit der Spitze s_2 , seine Seiten sind die Parallelen zu den Lagen 3·3 in Fig. 107.

Wird der Abstand von je zwei Kreisen gleicher Helle halbiert, so ergeben sich in Fig. 106 die parallel zum Kernschatten liegenden ausgezogenen Linien, durch welche die Kugeloberfläche in Zonen zerlegt wird. Jede Zone hat, wenn man sie als kegelförmig annimmt, dieselbe Beleuchtung als der Kreis gleicher Helle, welchen sie einschließen, und dieser besitzt wieder die Beleuchtung der zugehörigen Flächenlage von Fig. 107.

Die Beleuchtungsgrade sind in Fig. 106 in den Streifen durch 0 bis 4 bezeichnet.

Die von den Lichtstrahlen L nicht beleuchtete Seite der Kugel ist nicht von der Dunkelheit der Kernschattenzone, sondern wird von zurückgeworfenen Lichtstrahlen Z beleuchtet, man bezeichnet sie als die Reflexseite. Die Lichtstrahlen Z nimmt man den direkten L entgegengesetzt an. Es kann dann auf der Reflexseite dieselbe Zoneneinteilung vorgenommen werden, nur ist sie im ganzen dunkler als die direkt beleuchtete Kugelhälfte. Die Zonen der Reflexseite sind mit I bis IV bezeichnet.

Durch Projizieren der Begrenzungskreise der Zonen nach Fig. 105 und 104 ergeben sich die Beleuchtungsbilder der Kugel.

In Fig. 108 ist von einem halben lotrechten Cylinder von demselben Durchmesser wie die Kugel auf Tafel 24 die Beleuchtung gegeben. Da dieser Cylinder die Kugel in dem Äquator AA berührt, hat er mit diesem gleiche Beleuchtung. Die Durchschnittspunkte der Zonenbegrenzungen mit dem Äquator der Kugel können ohne weiteres nach Fig. 108 übertragen werden.

Bemerkung: Die Durchschnittspunkte der Zonenkreise mit dem Kugeläquator sind in Fig. 104 und 105 durch kleine Kreise umringelt.

Ebenso einfach gestaltet sich die Beleuchtung des Kegels B s B in Fig. 104. Derselbe berührt die Kugel in dem Breitenkreis BB und hat in diesem mit der

Kugel dieselbe Beleuchtung. Derselbe Kegel mit Beleuchtungsangabe ist in Fig. 109 dargestellt.

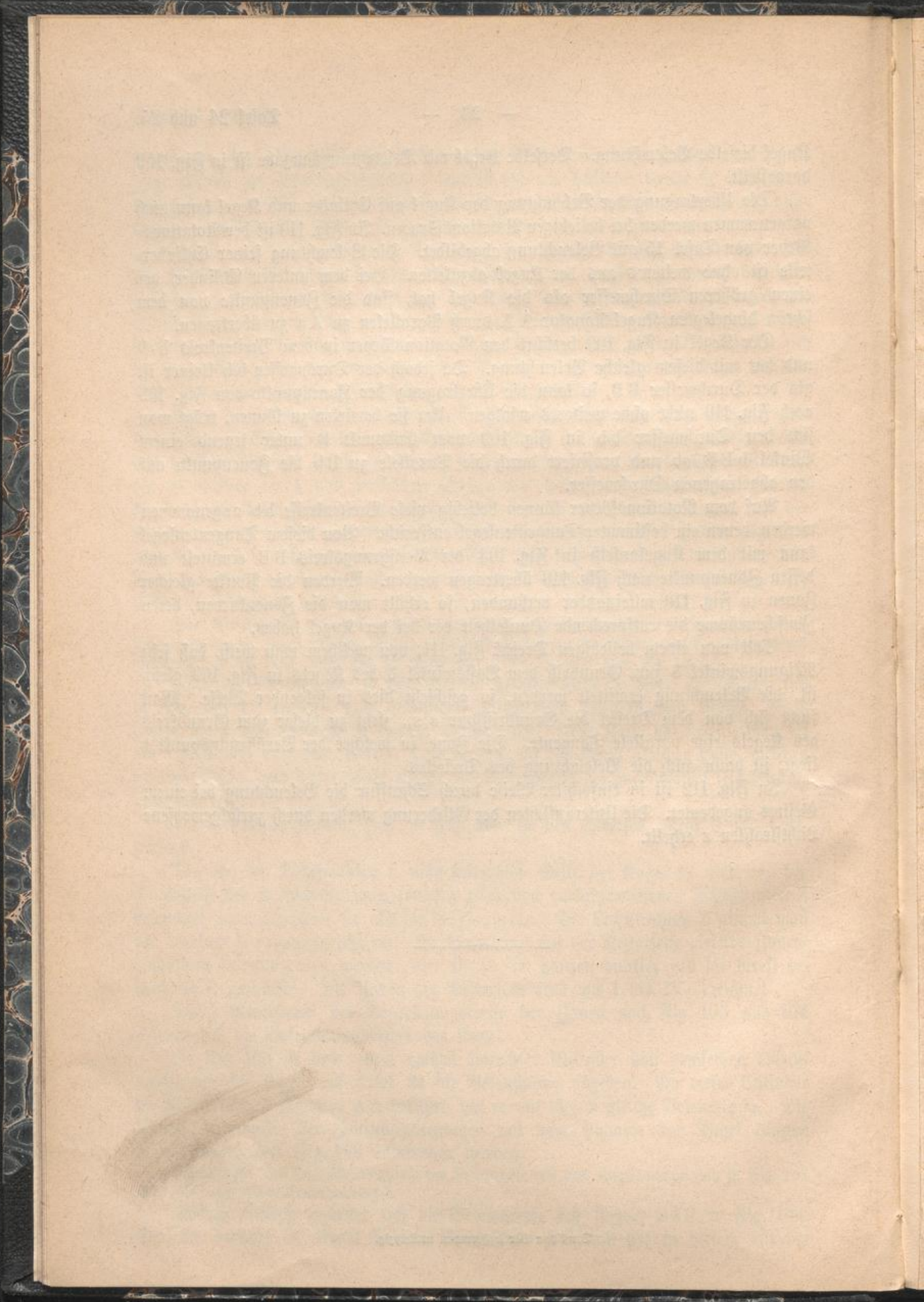
Die Übertragung der Beleuchtung der Kugel auf Cylinder und Kegel kann auch vorgenommen werden bei beliebigen Rotationskörpern. In Fig. 110 ist der Rotationskörper von Tafel 15 mit Beleuchtung abgebildet. Die Beleuchtung seiner Cylindertheile ist ohne weiteres aus der Kugel abzuleiten. Bei dem unteren Cylinder, der einen größeren Durchmesser als die Kugel hat, sind die Zonenpunkte von dem schräg hingelegten Kugel-Aquator AA durch Parallelen zu Aa zu übertragen.

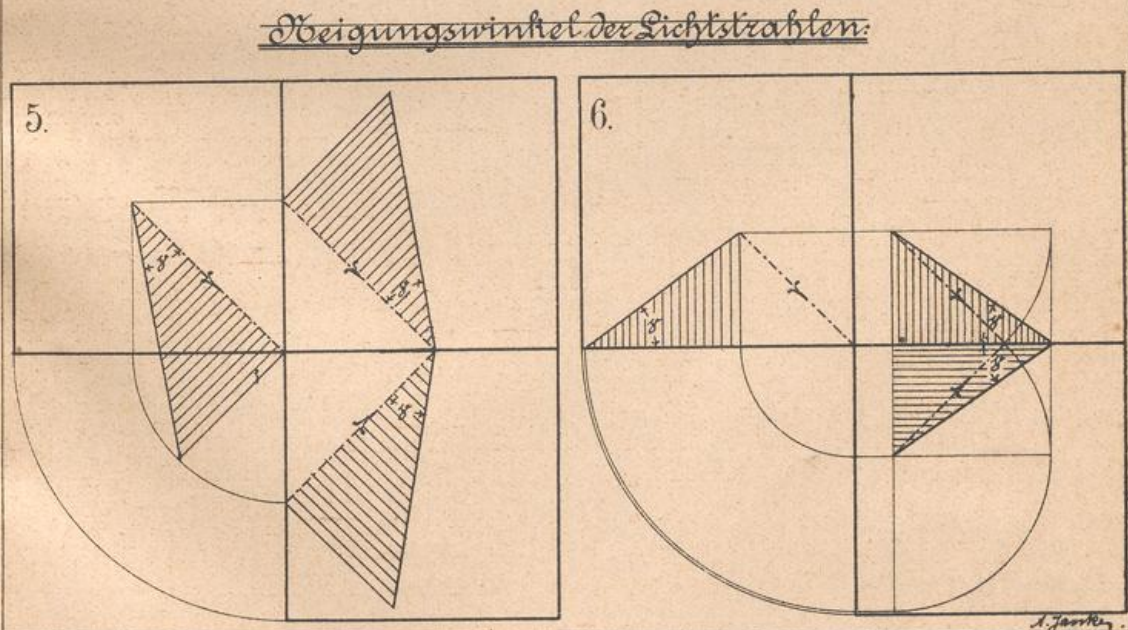
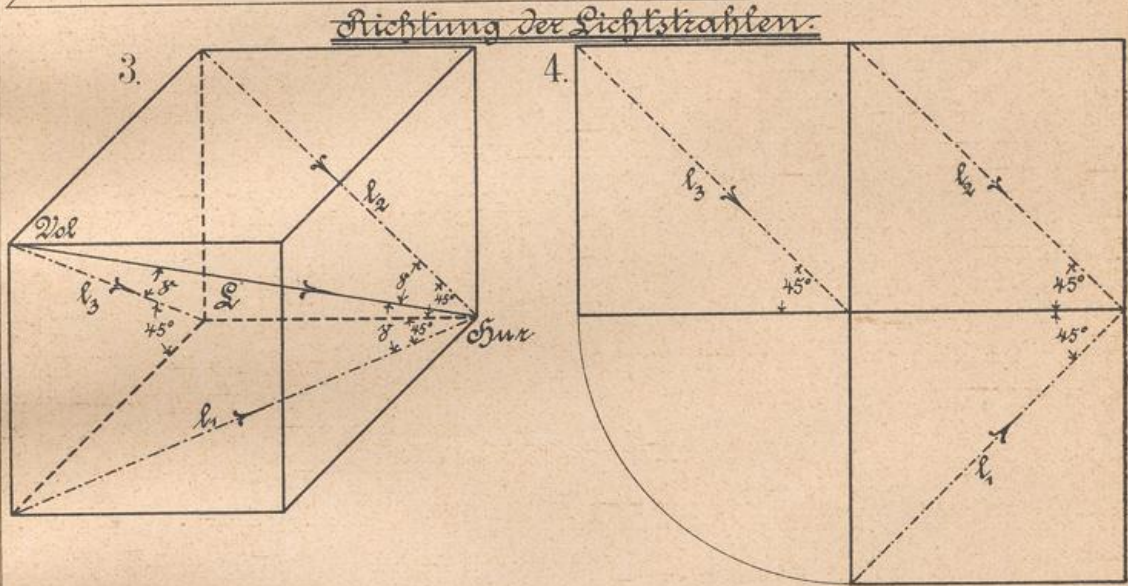
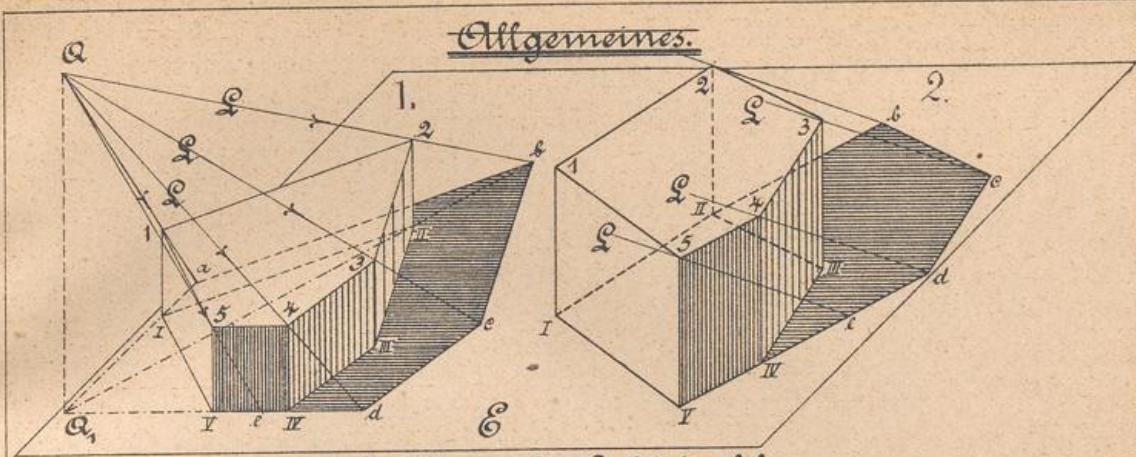
Der Kegel in Fig. 109 berührt den Rotationskörper in dem Breitenkreis $b \cdot b$ und hat mit diesem gleiche Beleuchtung. Da jedoch der Durchmesser $b \cdot b$ kleiner ist als der Durchmesser BB , so kann die Übertragung der Zonenpunkte von Fig. 109 nach Fig. 110 nicht ohne weiteres erfolgen. Um sie bewirken zu können, trägt man sich den Durchmesser $b \cdot b$ in Fig. 109 vom Endpunkt B unter irgend einem Winkel bBB ab und projiziert durch die Parallele zu Bb die Zonenpunkte auf den abgetragenen Durchmesser.

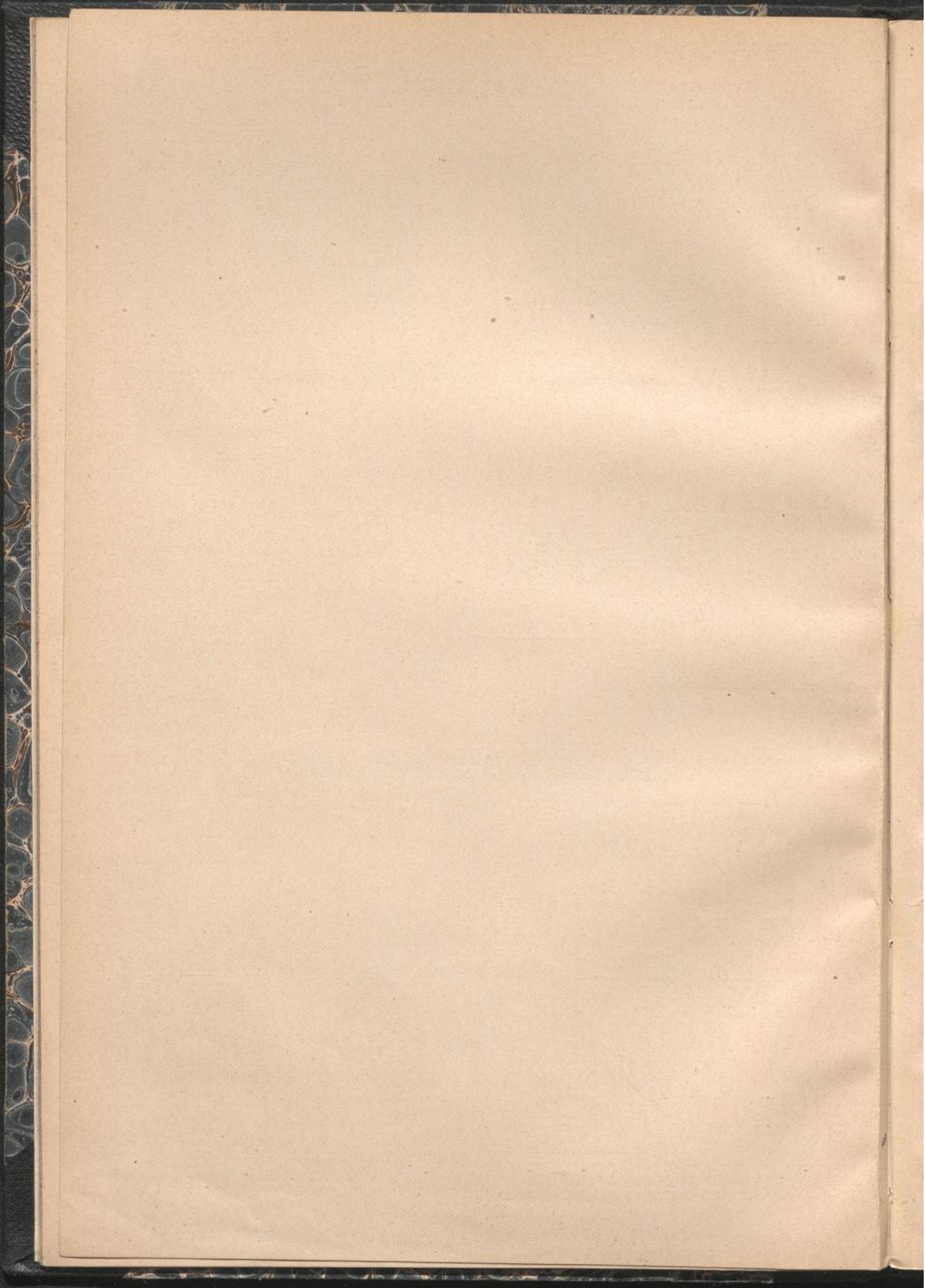
Auf dem Rotationskörper können beliebig viele Breitenkreise $b \cdot b$ angenommen werden, denen ein bestimmter Tangentenkegel entspricht. Von diesem Tangentenkegel kann mit dem Kugelaufriß in Fig. 104 der Berührungskreis BB ermittelt und dessen Zonenpunkte nach Fig. 110 übertragen werden. Werden die Punkte gleicher Zonen in Fig. 110 miteinander verbunden, so erhält man die Zonenkurven, deren Zwischenräume die entsprechende Dunkelheit der bei der Kugel haben.

Soll von einem beliebigen Dreieck Fig. 111, von welchem man weiß, daß sein Neigungswinkel δ zum Grundriß dem Basiswinkel δ des Kegels in Fig. 109 gleich ist, die Beleuchtung ermittelt werden, so geschieht dies in folgender Weise. Man sucht sich von dem Dreieck die Grundrißspur $s, s,$, zieht zu dieser zum Grundkreis des Kegels eine parallele Tangente. Die Zone, in welcher der Berührungspunkt t liegt, ist dann auch die Beleuchtung des Dreieckes.

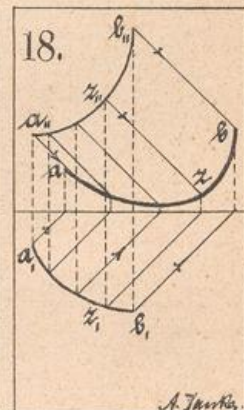
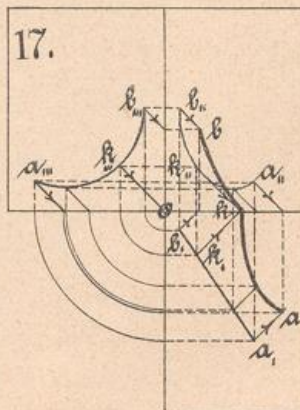
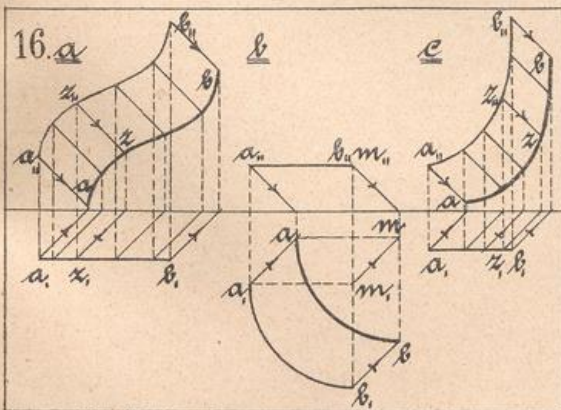
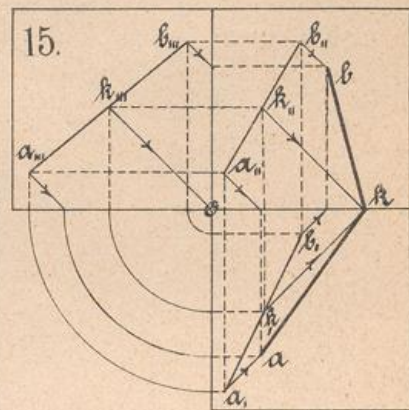
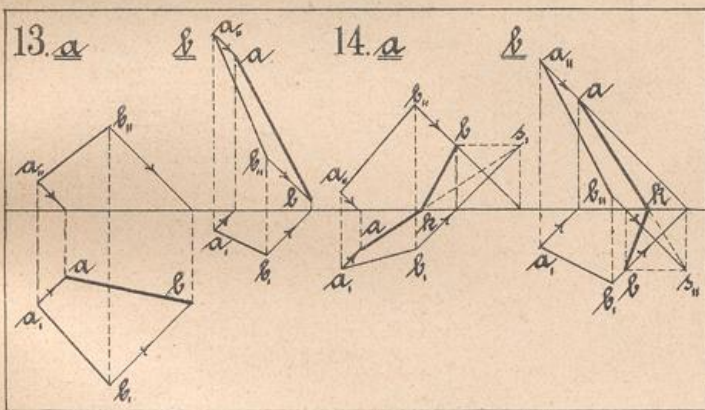
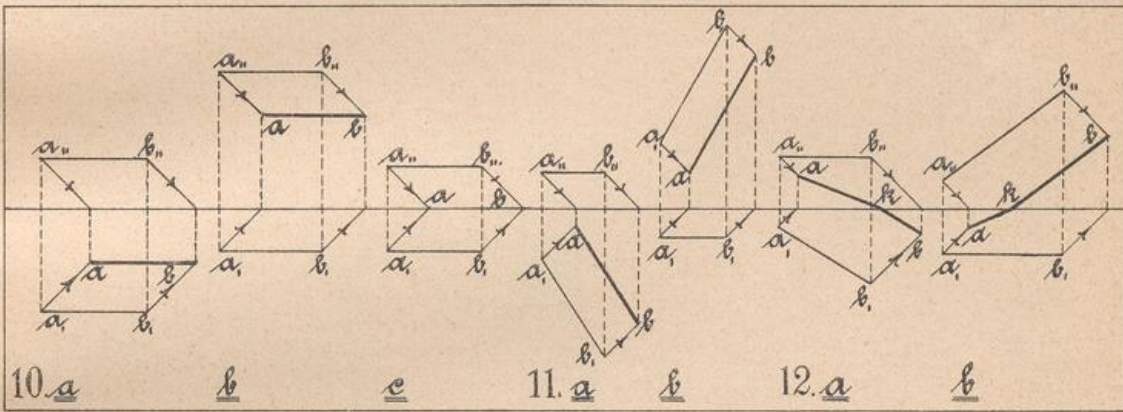
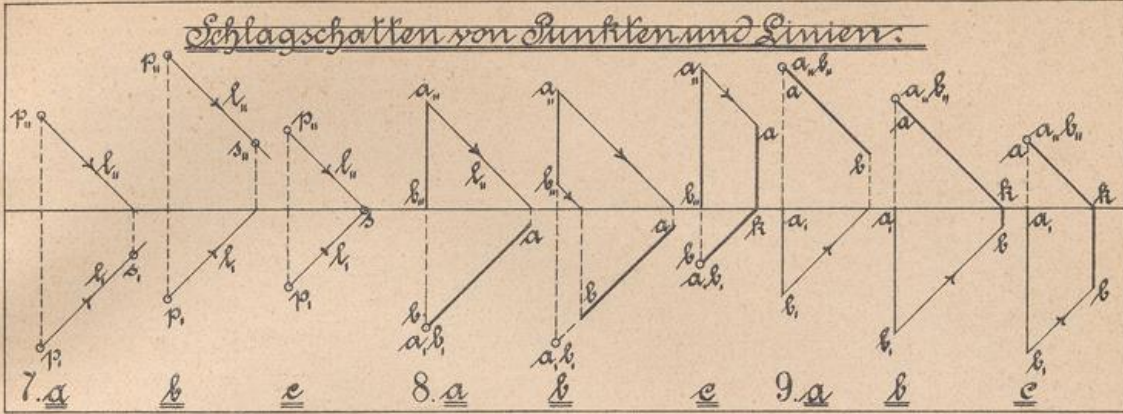
In Fig. 112 ist in einfachster Weise durch Schraffur die Beleuchtung bei einem Gesims angedeutet. Die Unteransichten der Gliederung werden durch zurückgeworfene Lichtstrahlen z erhellt.



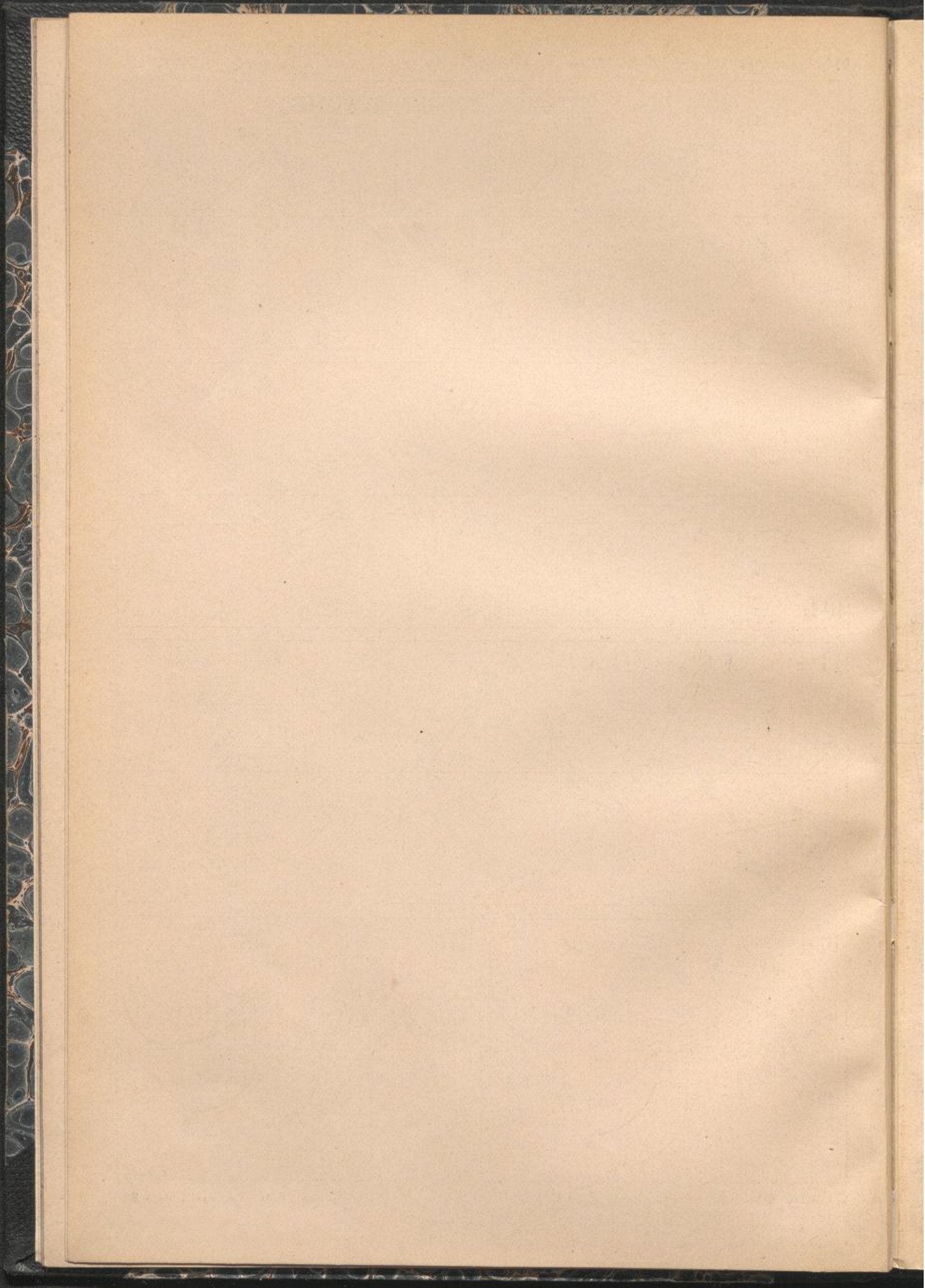


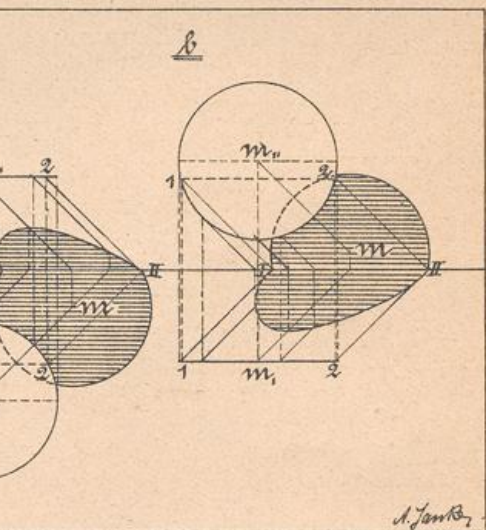
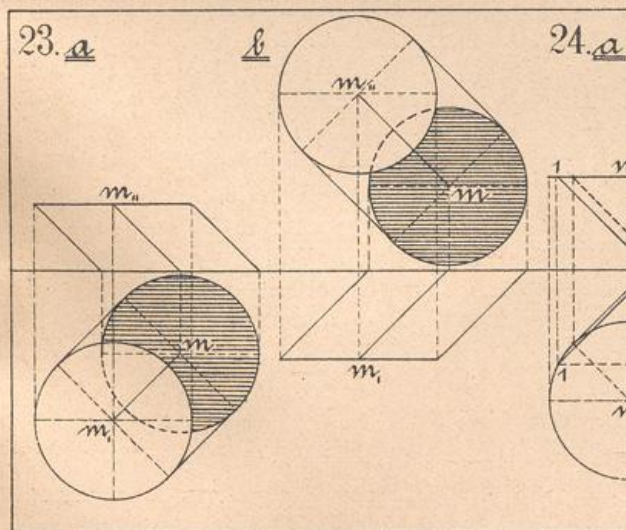
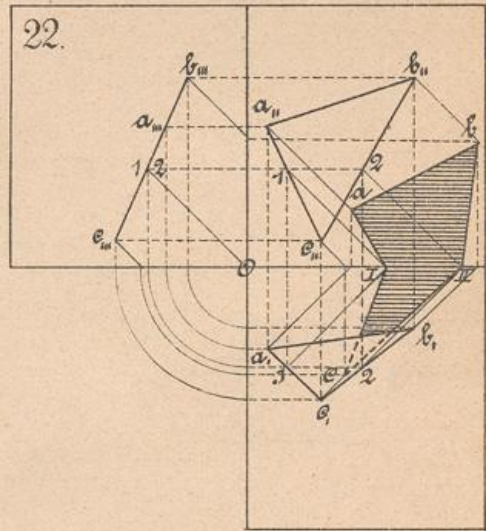
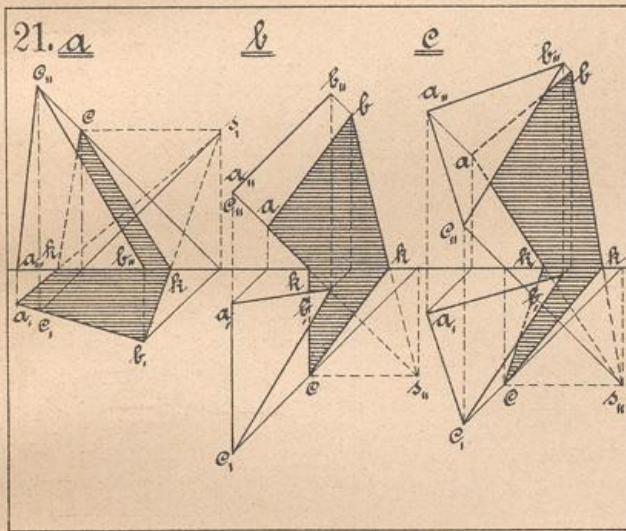
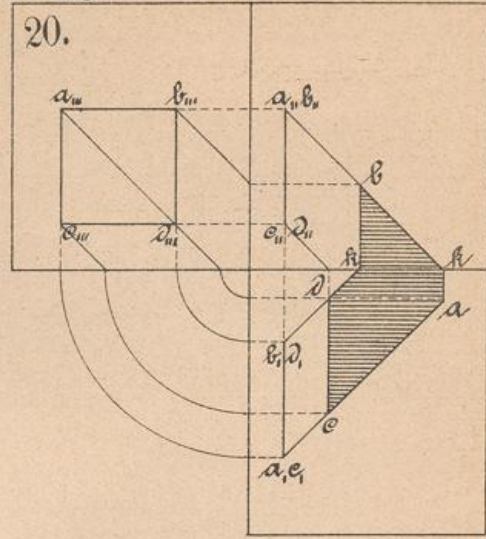
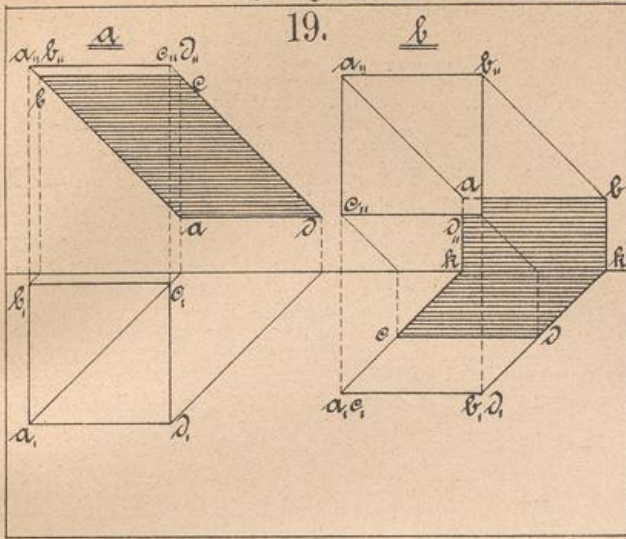


Schlagschatten von Punkten und Linien.

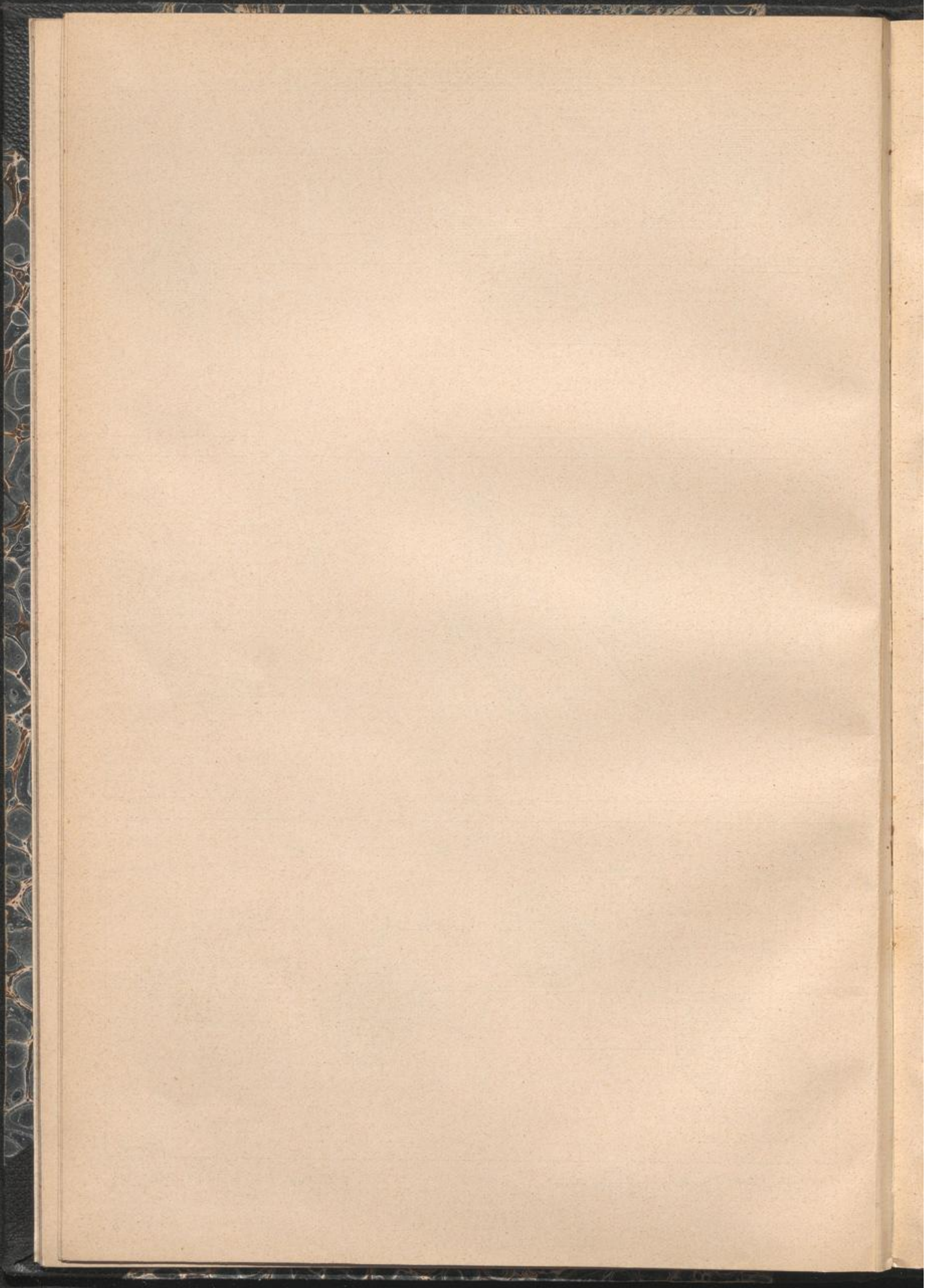


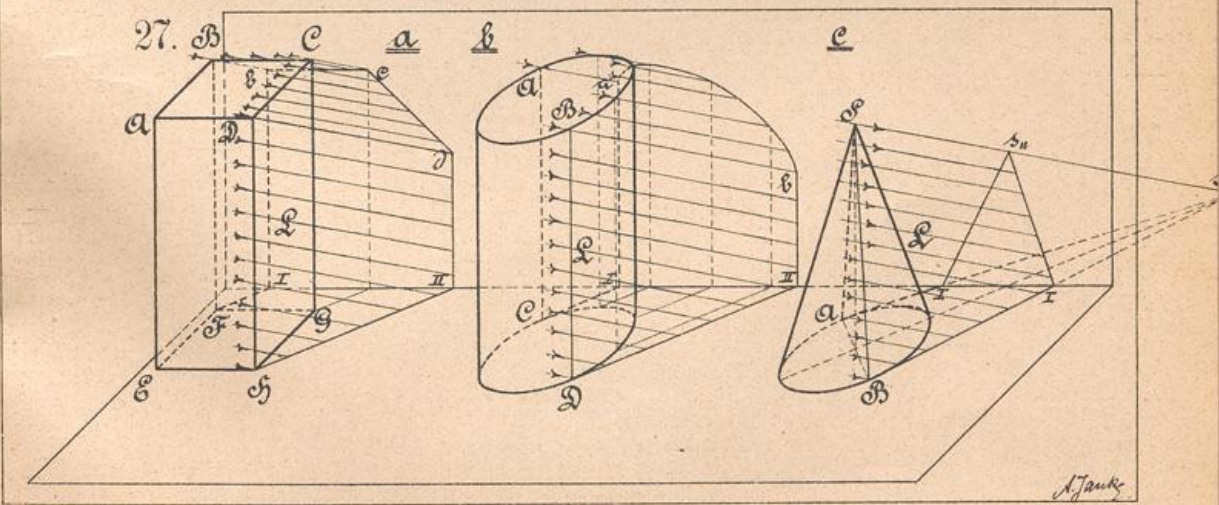
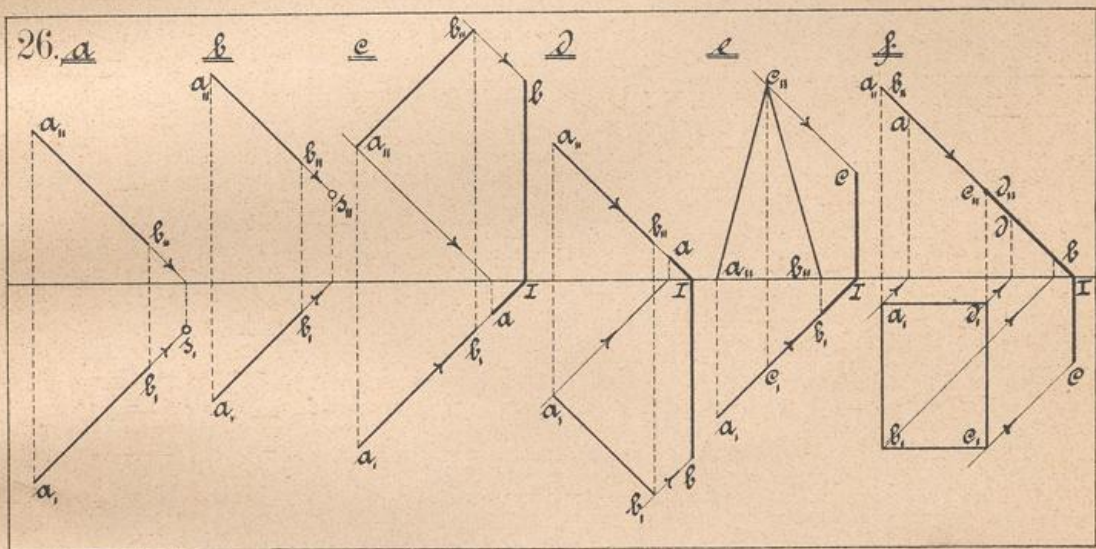
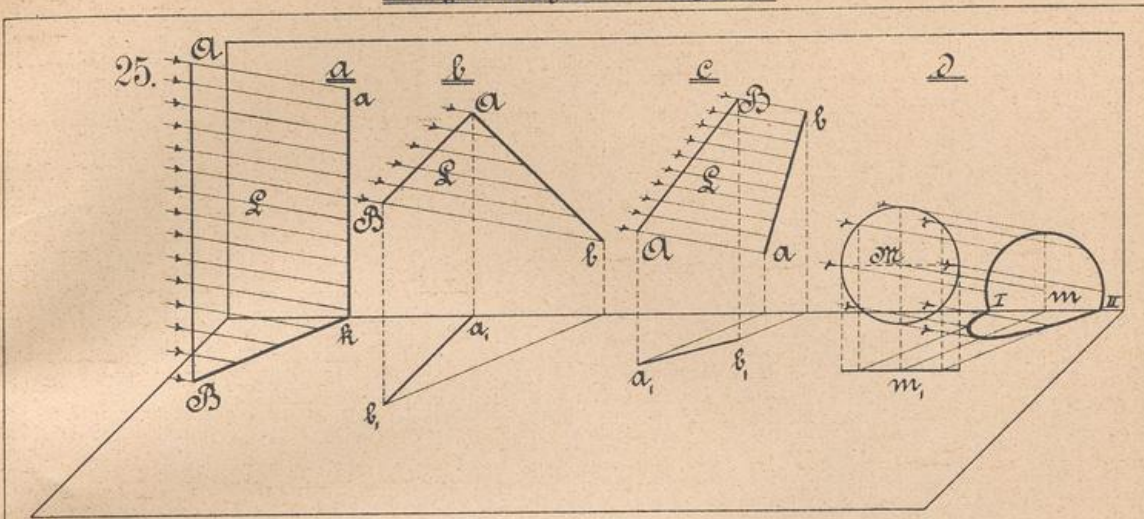
A. Janke

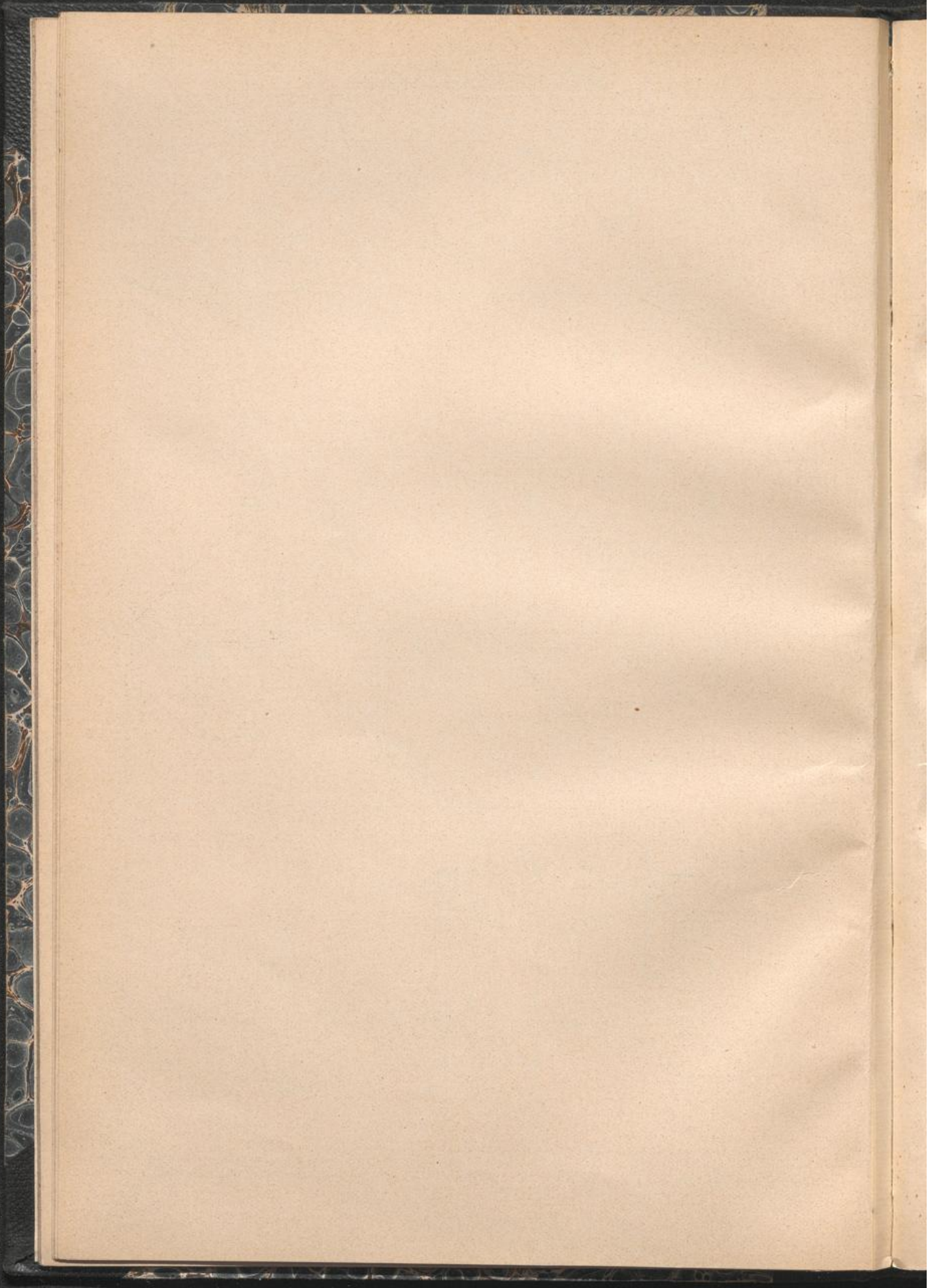


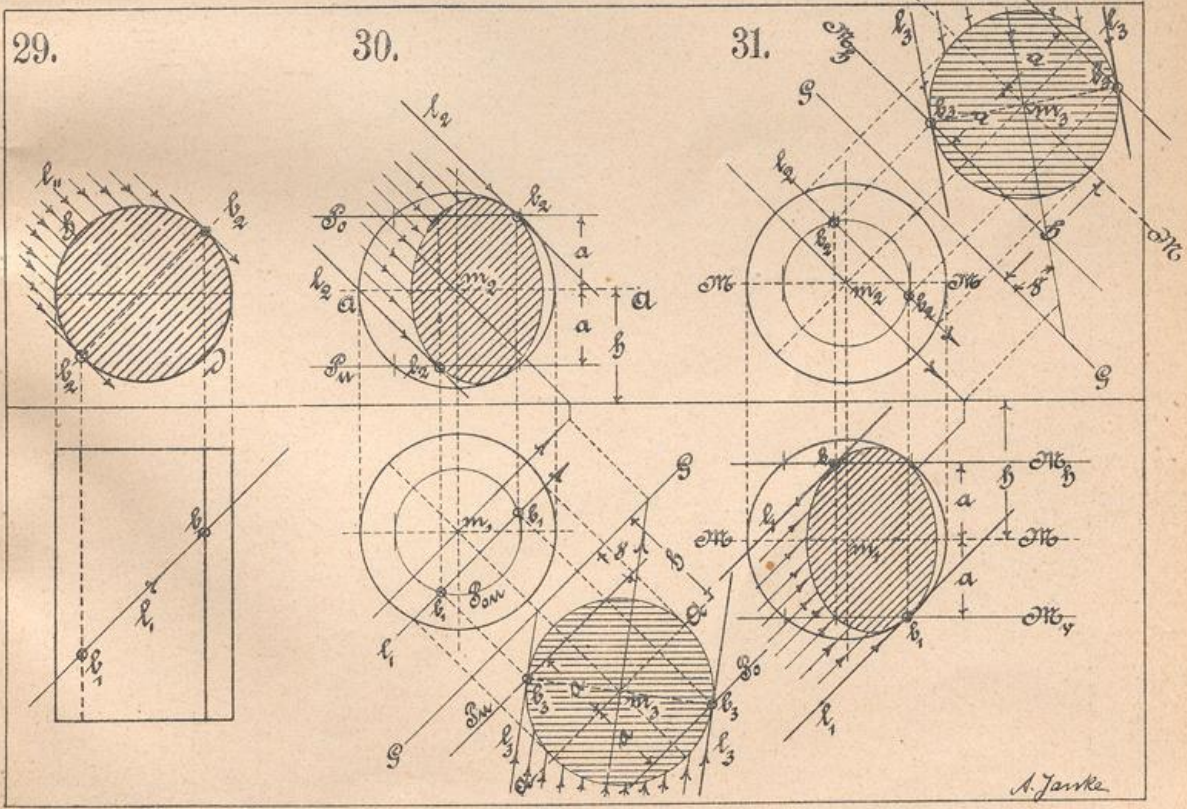
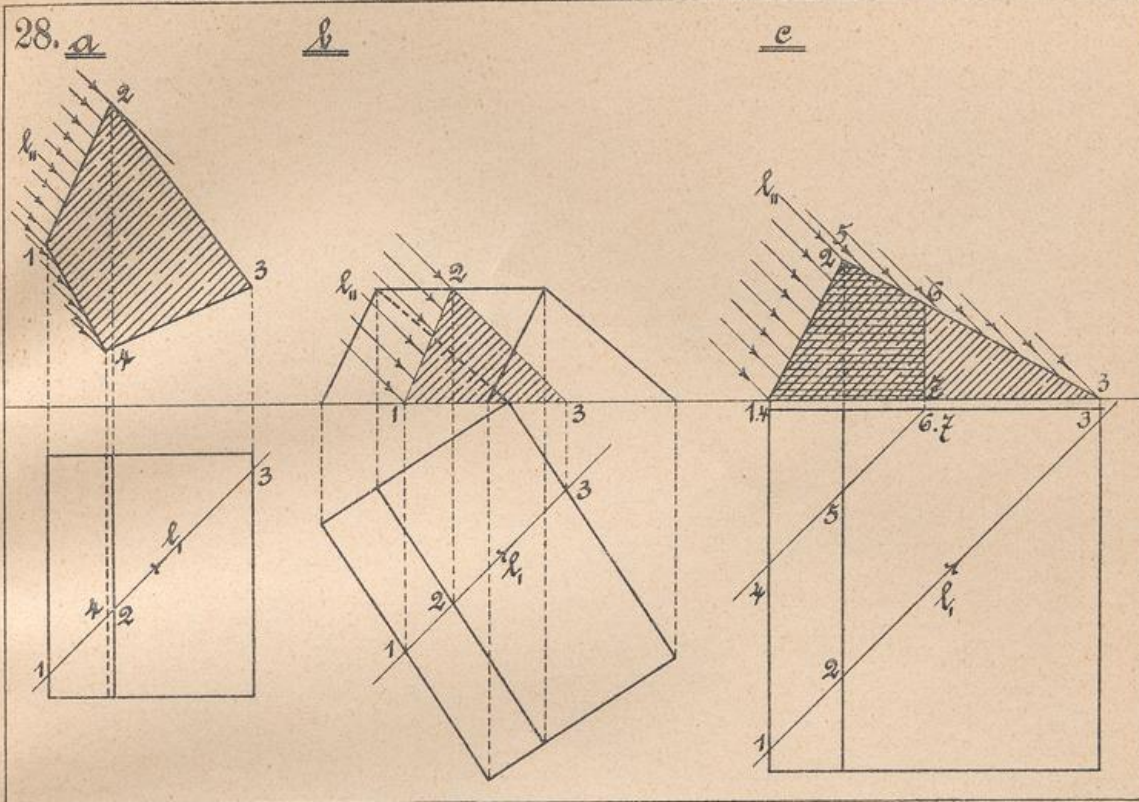


A. Janke



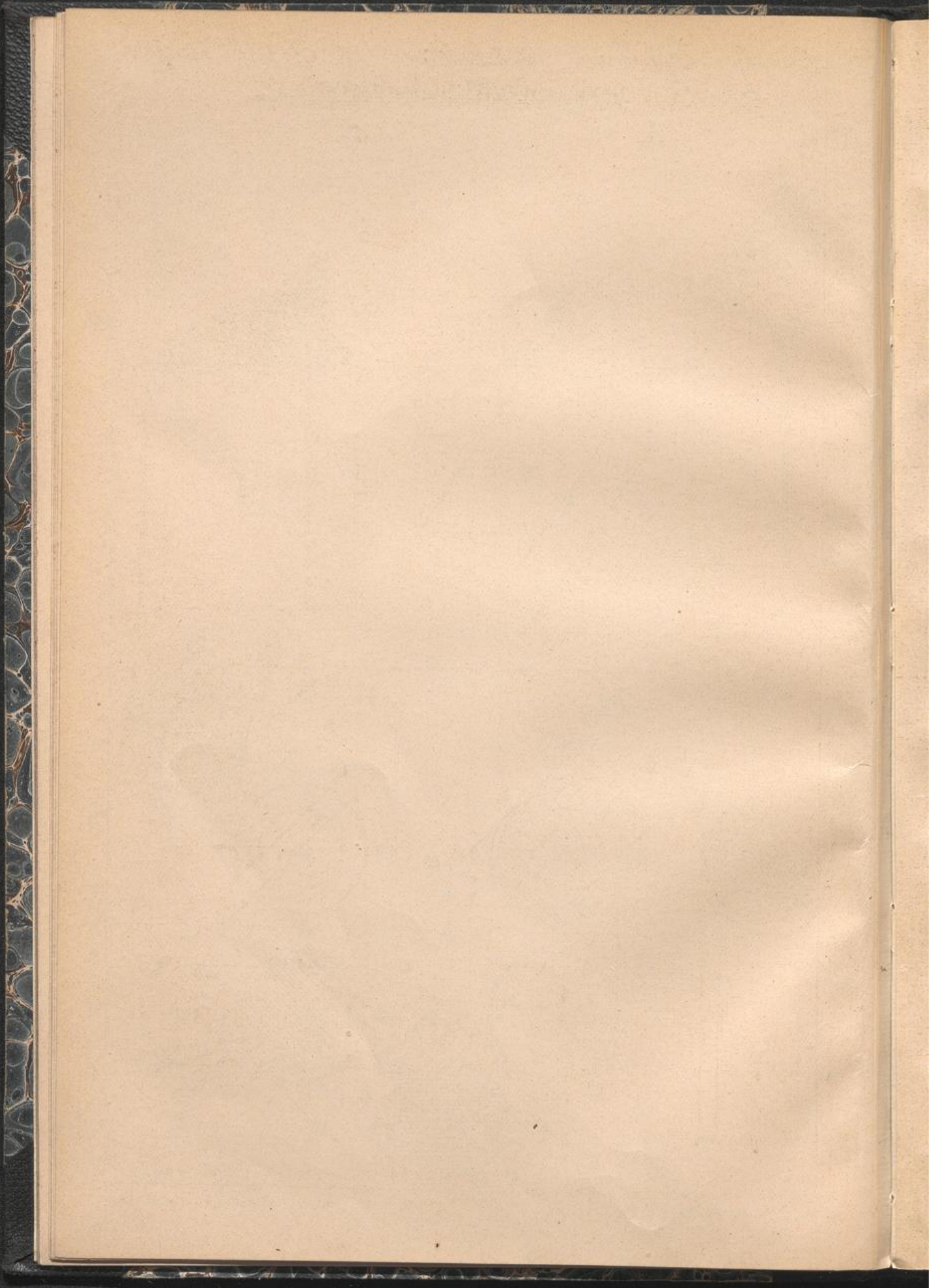


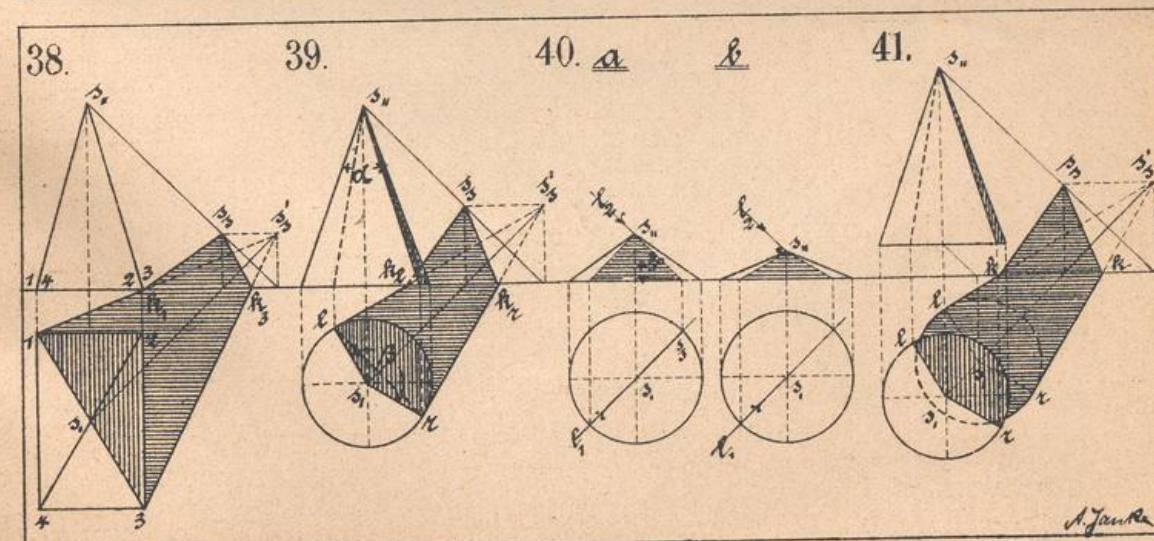
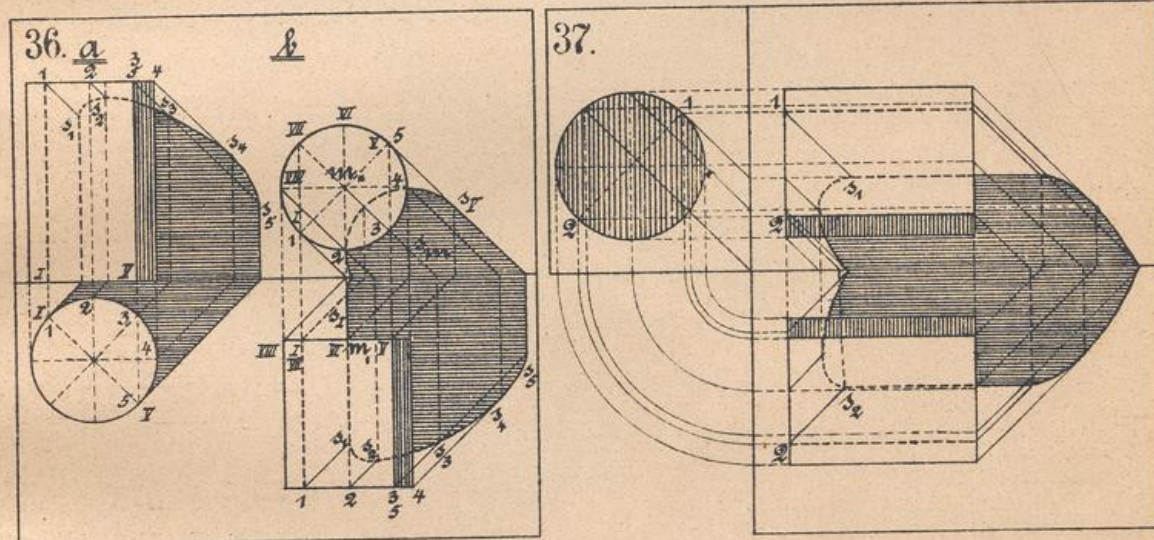
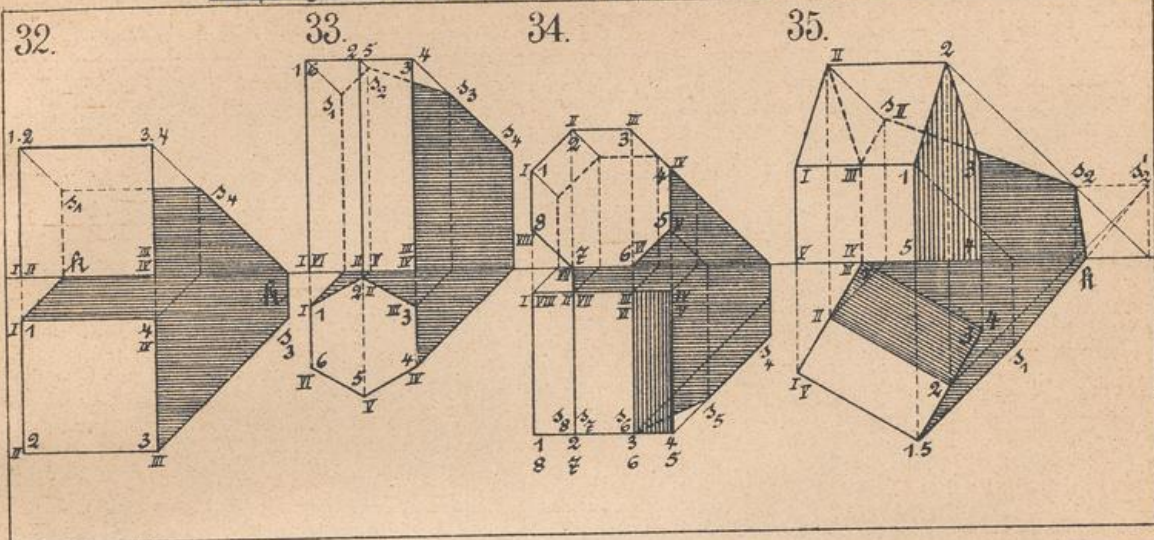




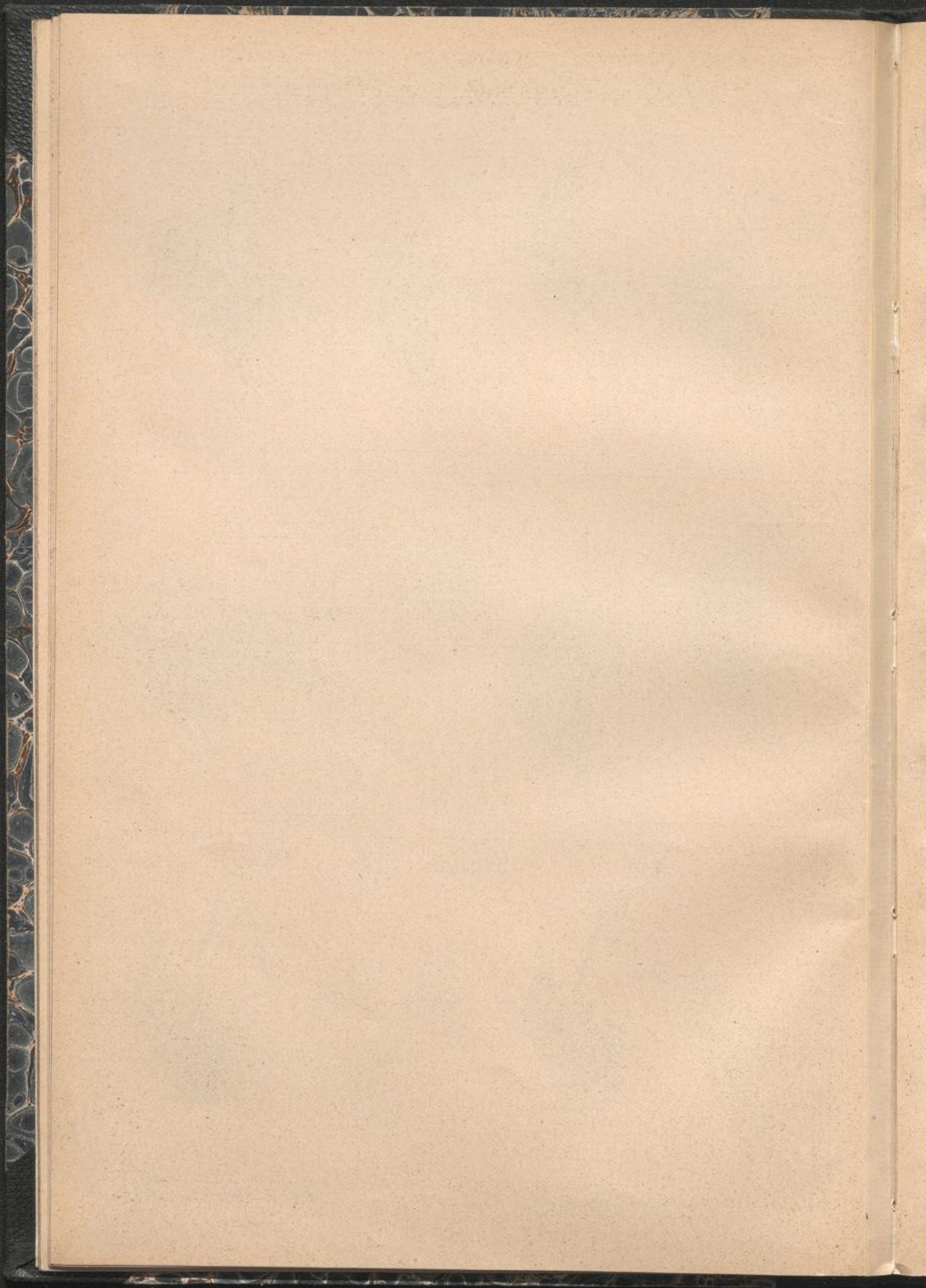
A. Janke



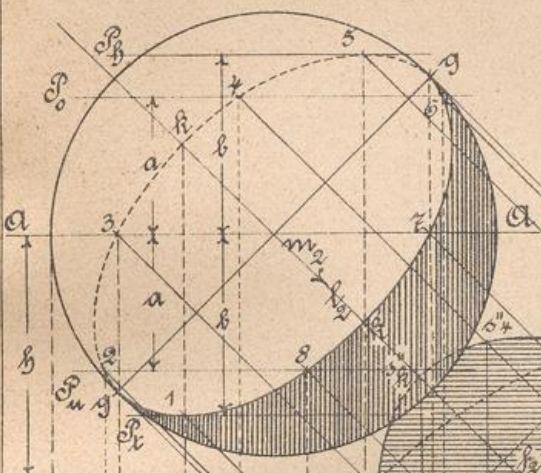




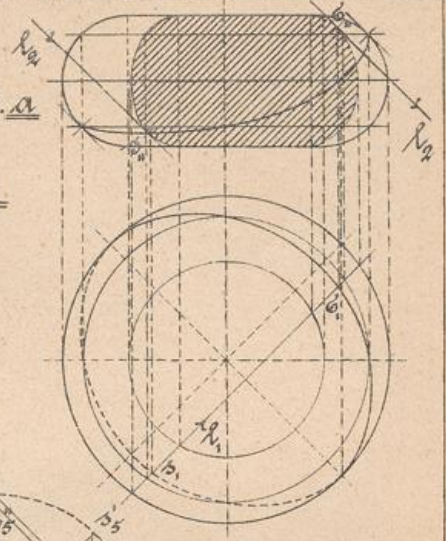
A. Jenke.



42.

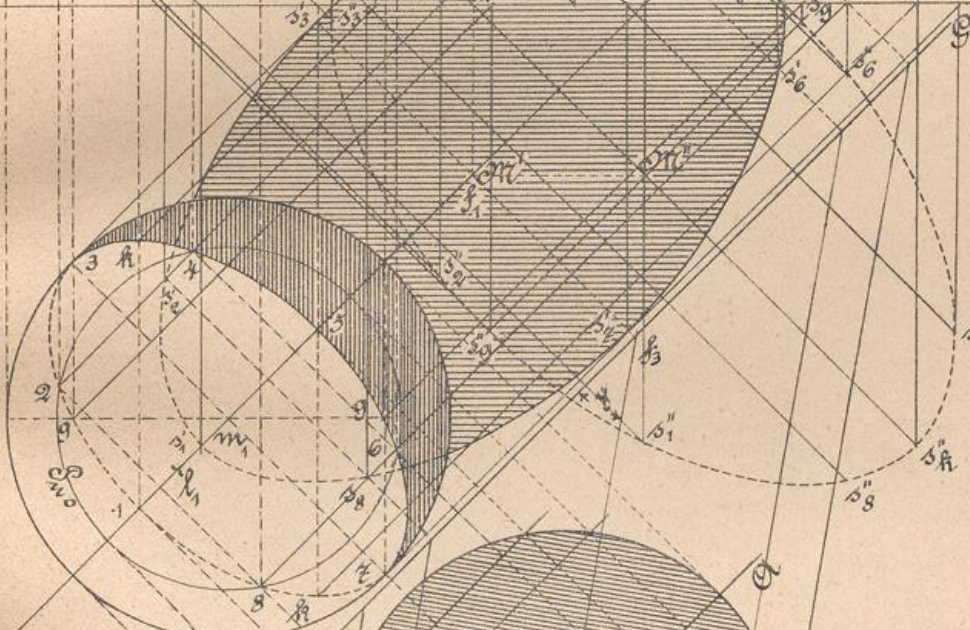


45. a

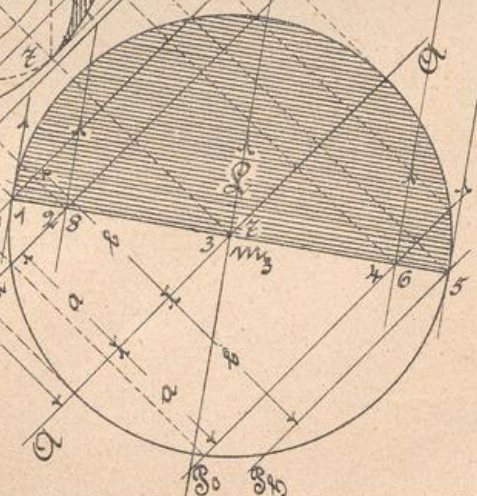


b

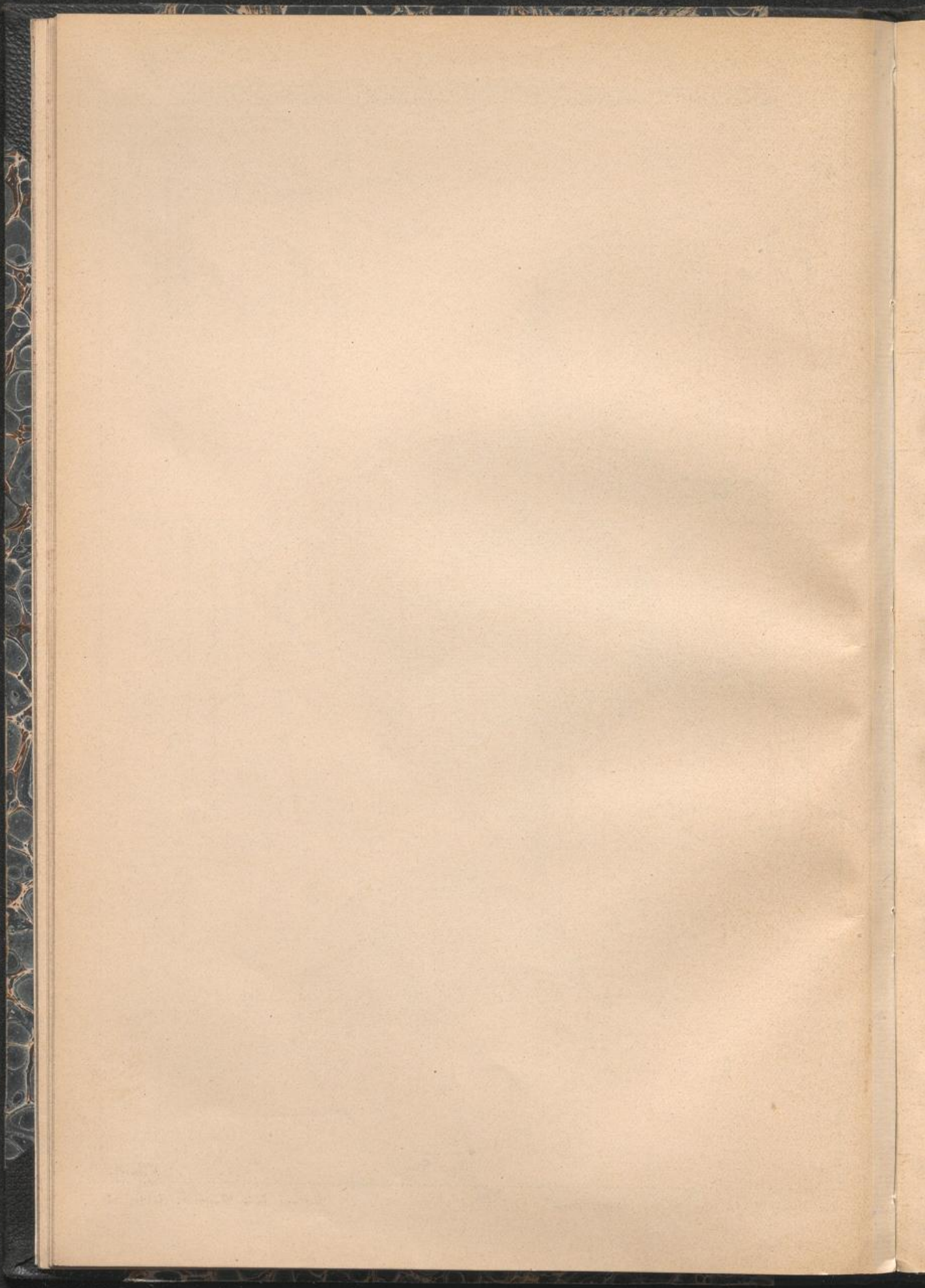
43.



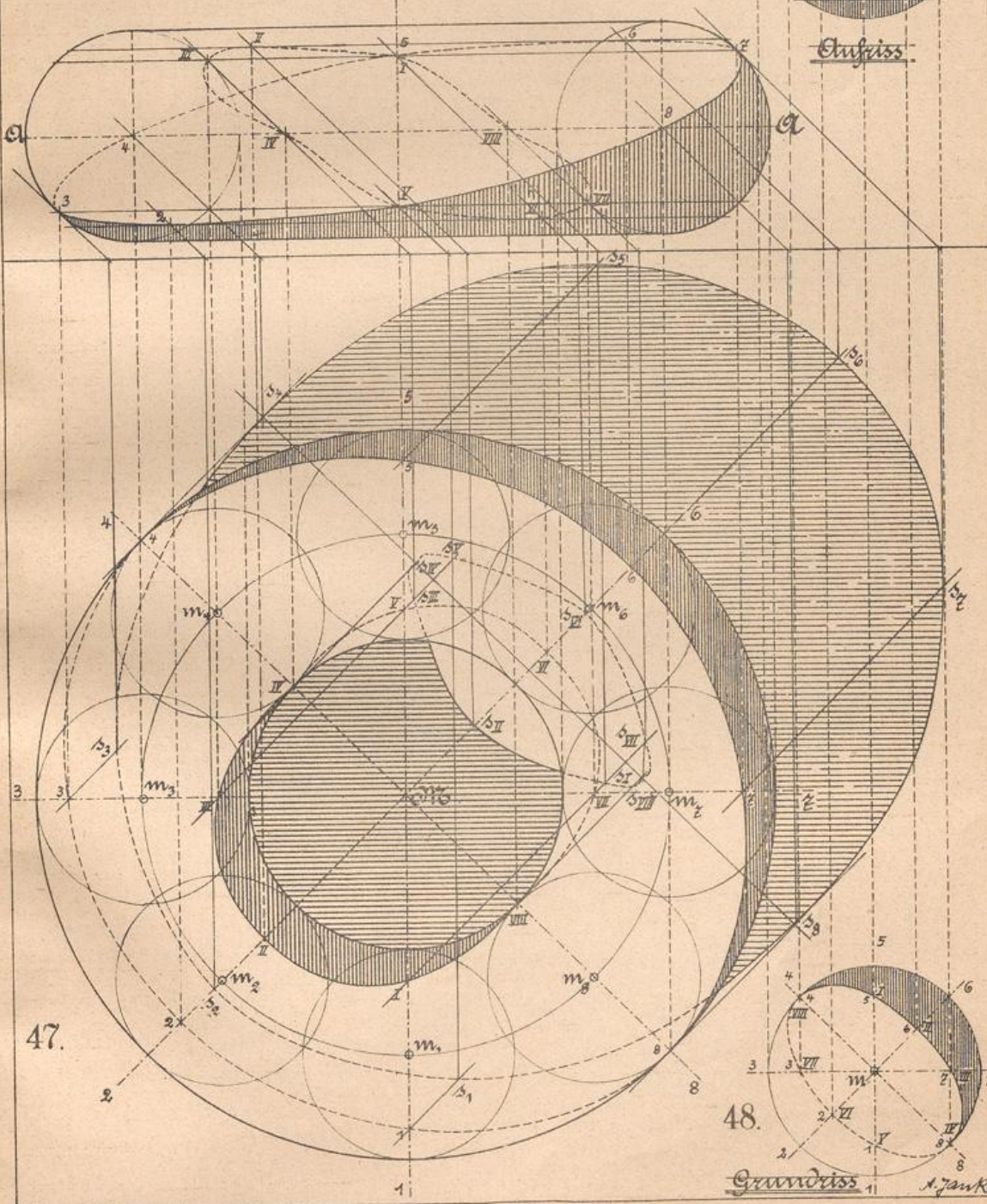
44.



A. Jankg

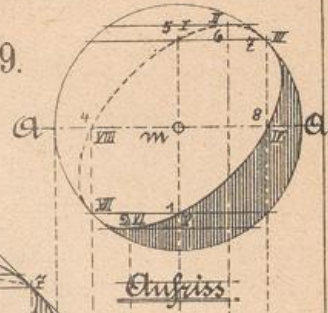


46.



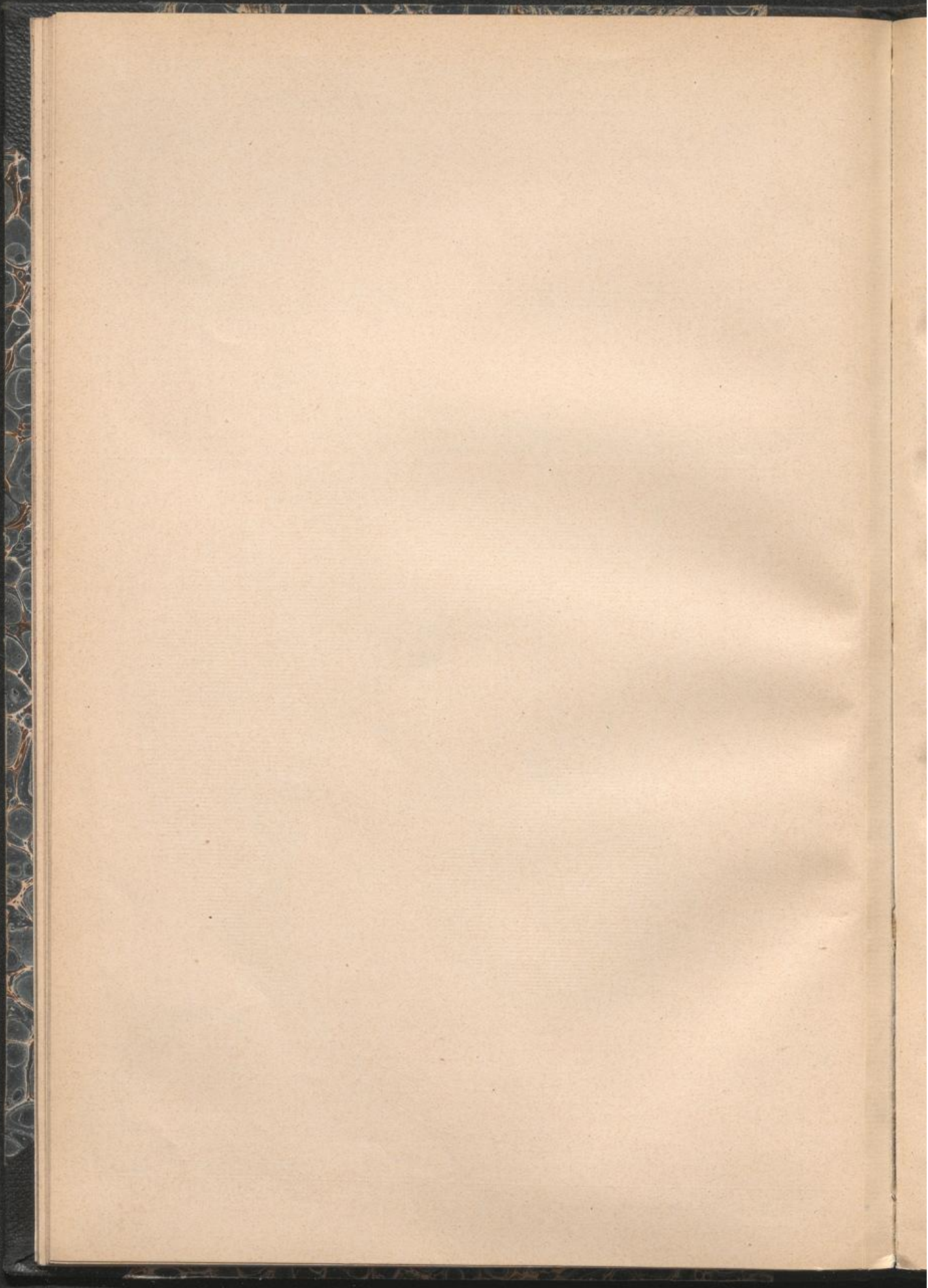
47.

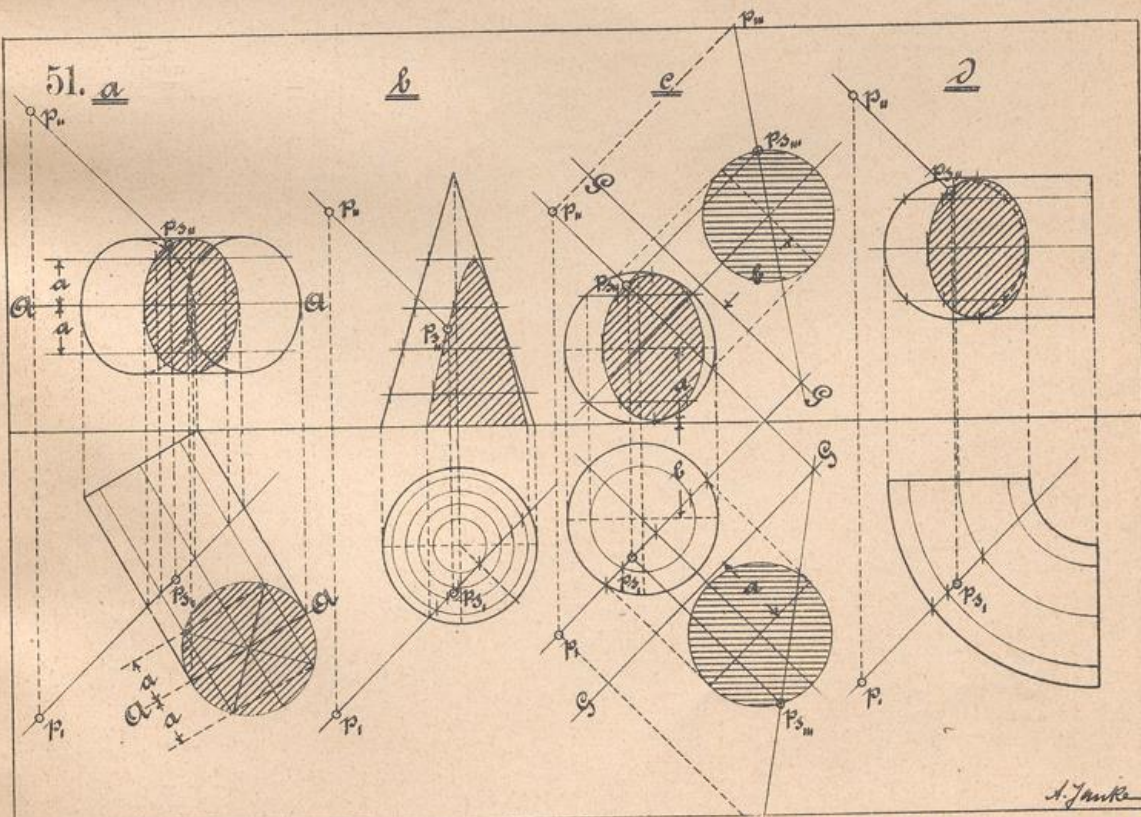
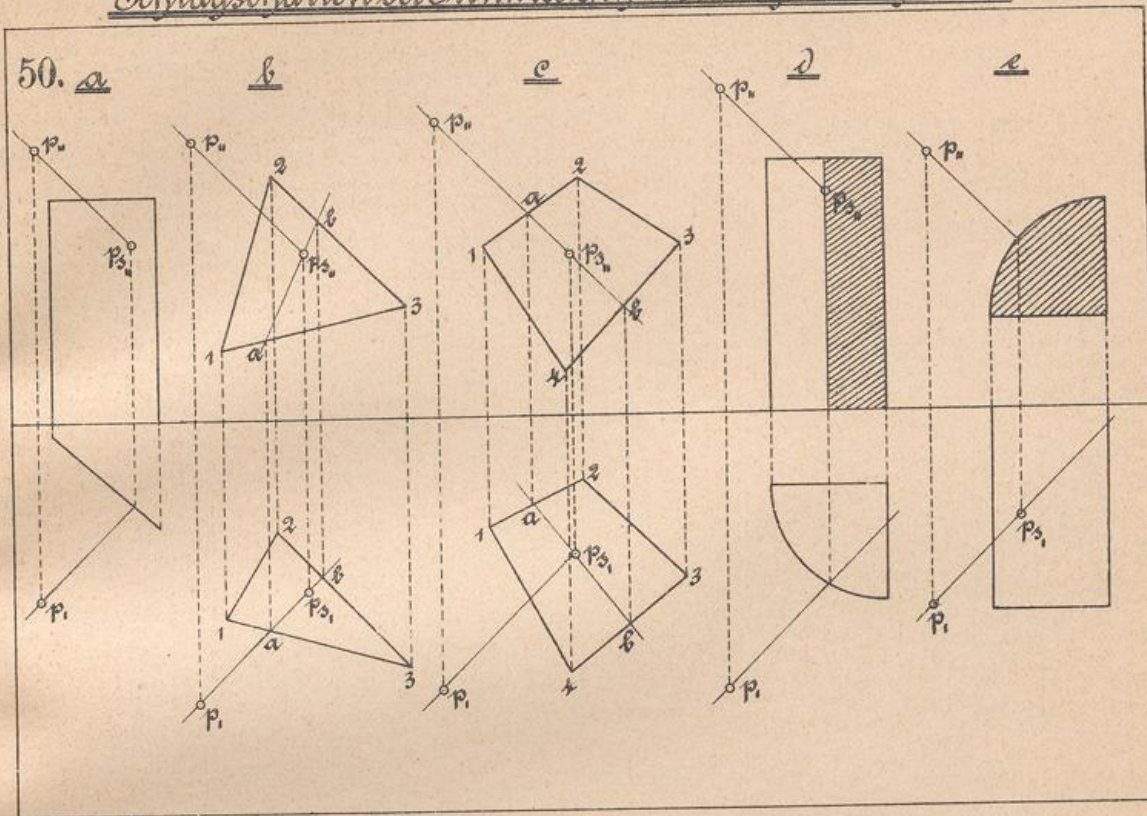
49.



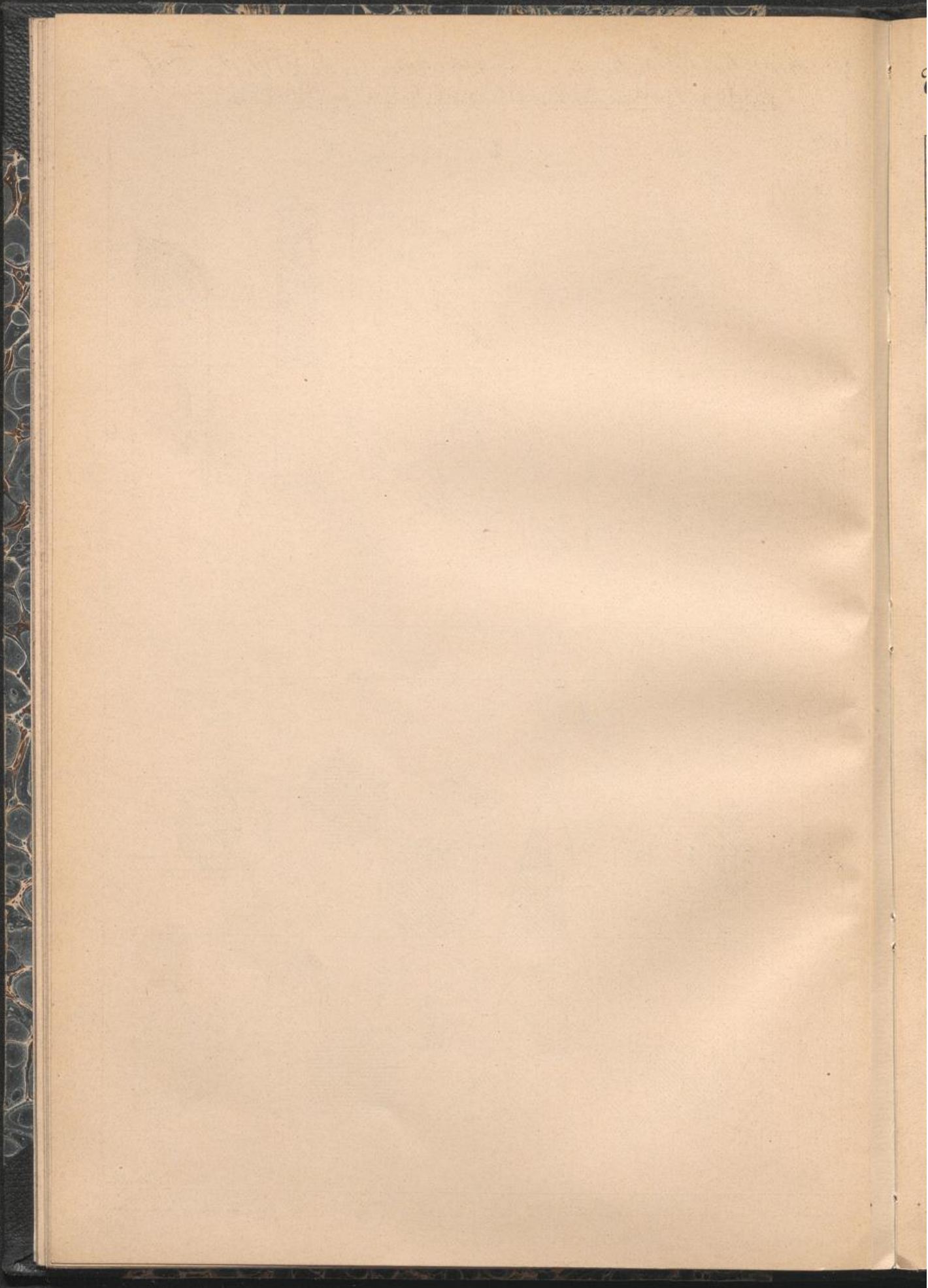
48.

Grundriss A. Janke

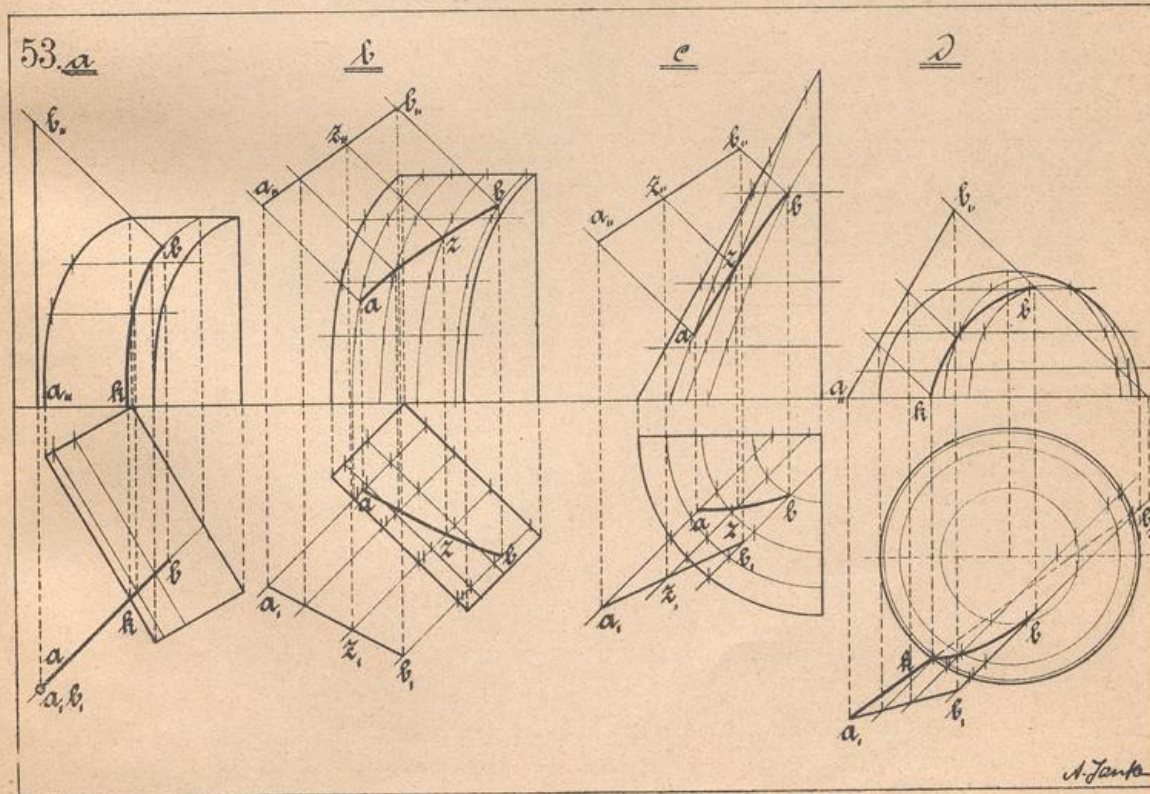
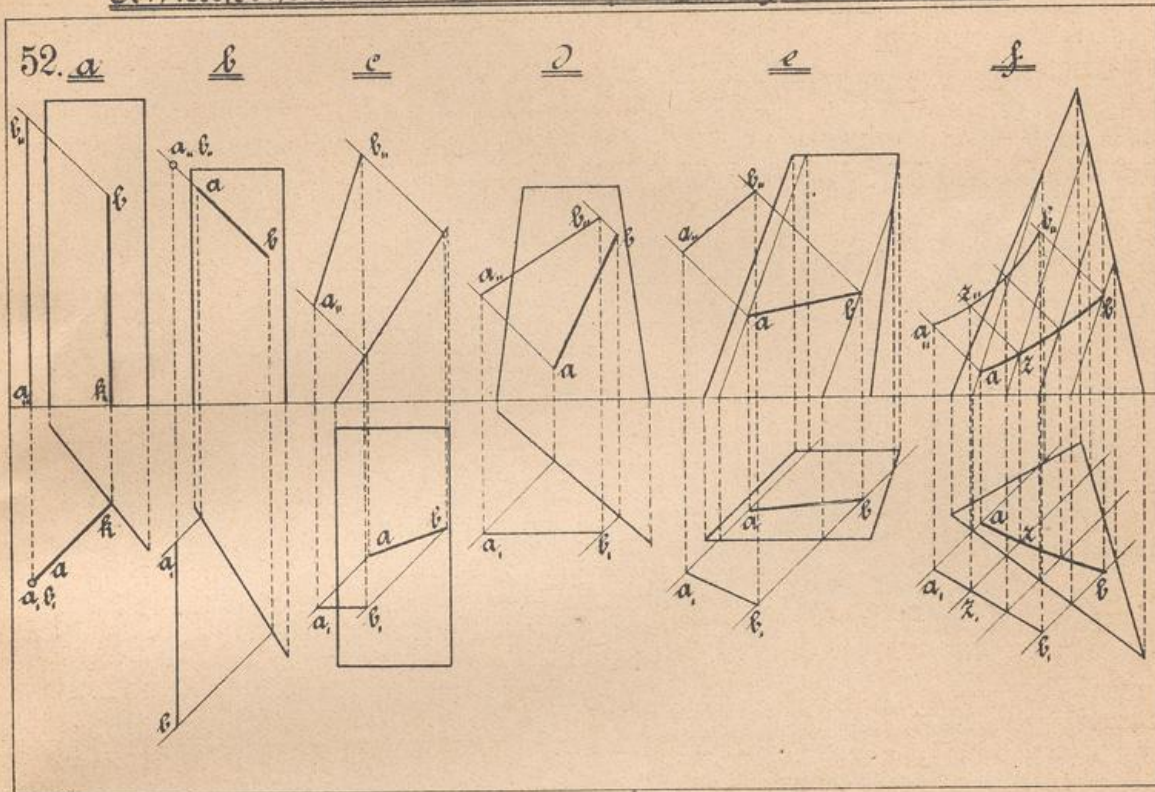




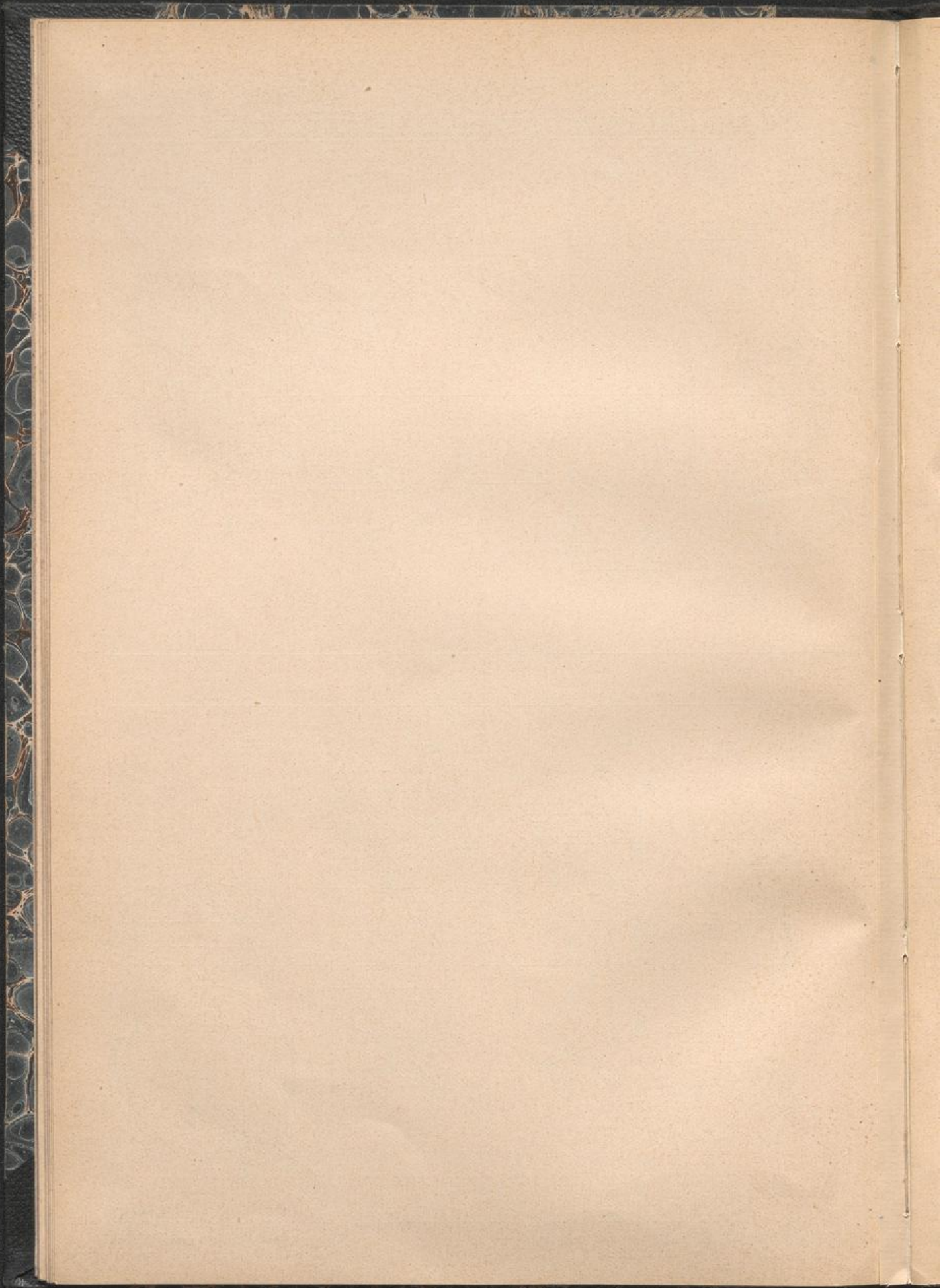
A. Janke

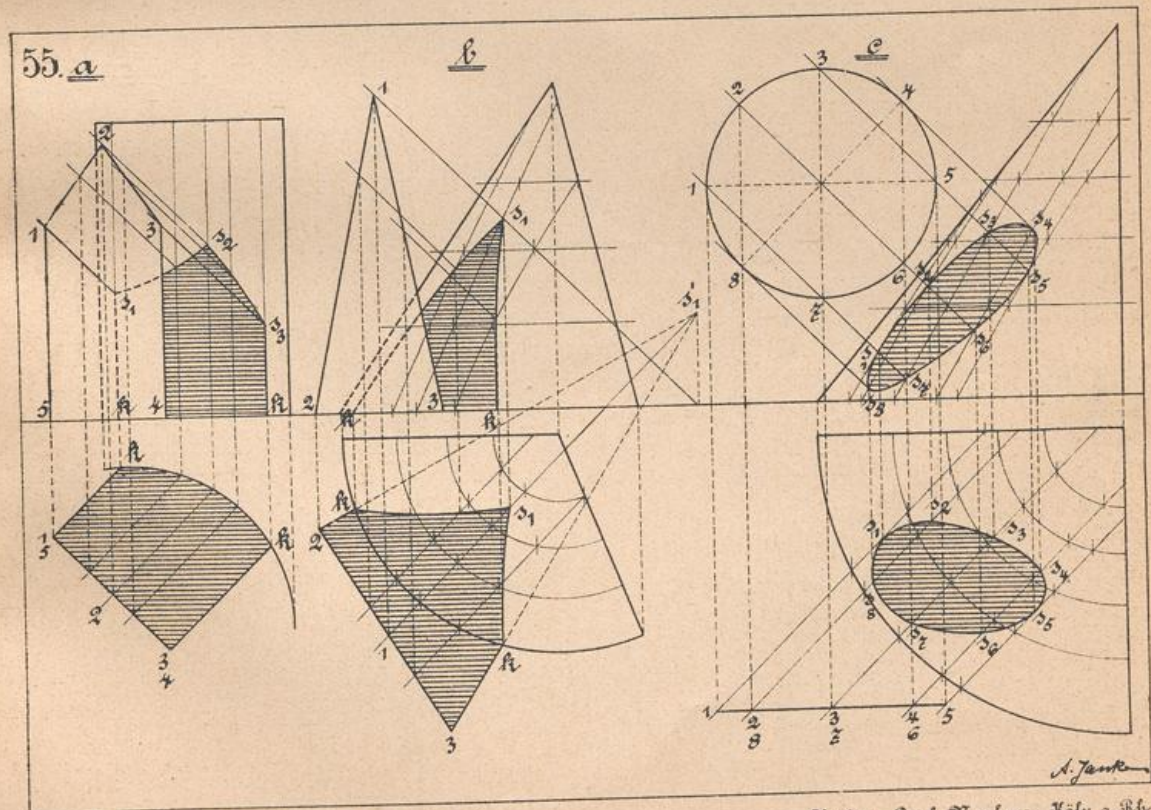
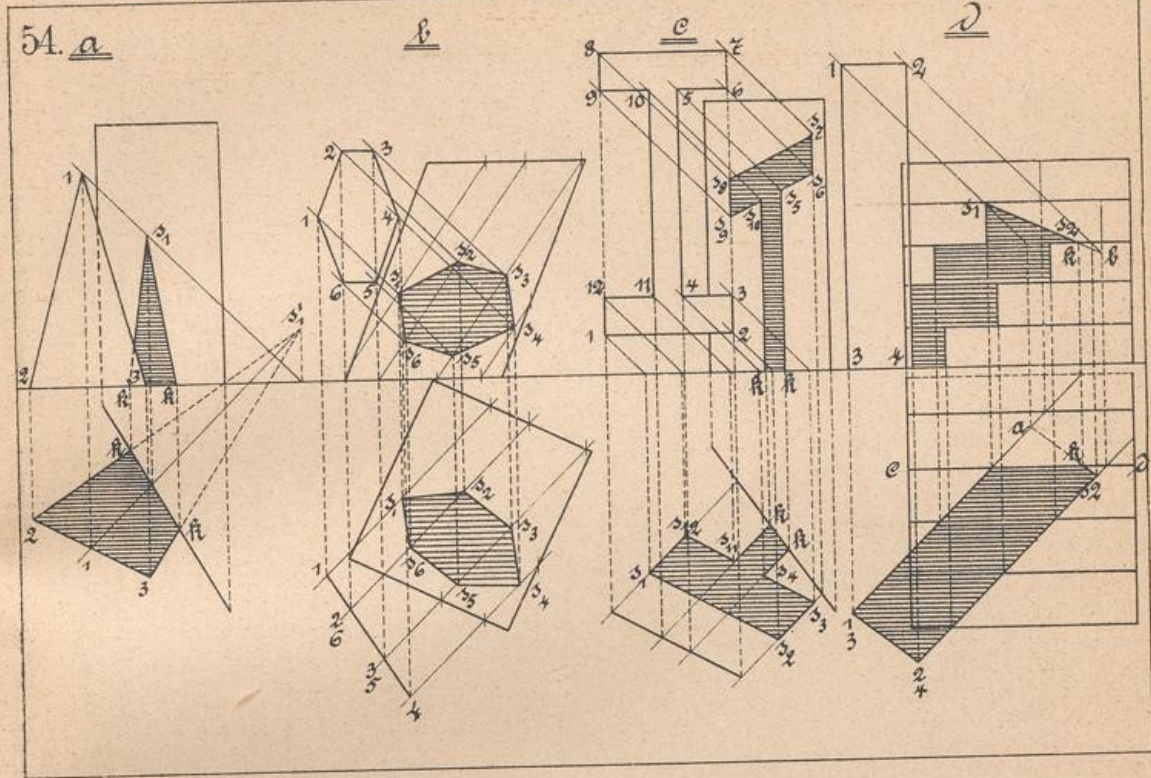


Technisches Zeichnen. Schattenlehre. III. Abteil. Taf. 10.
Schlagschatten der Linie auf beliebige Flächen:



A. Janka

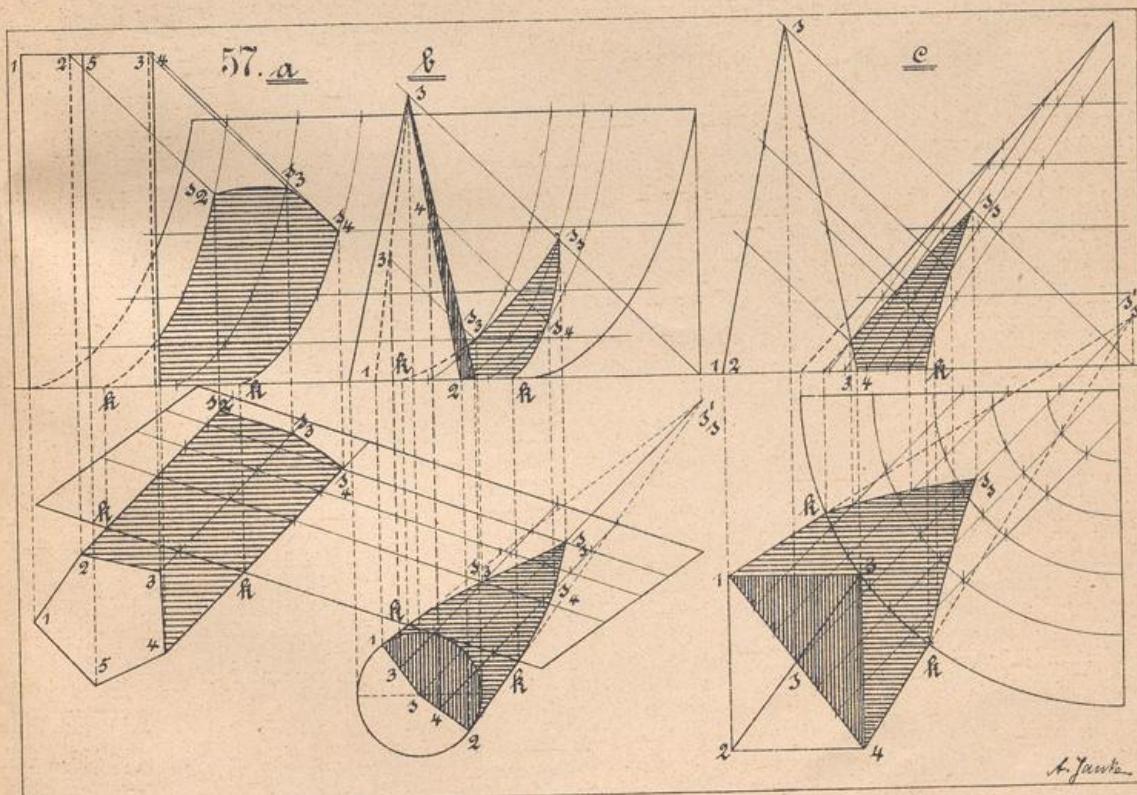
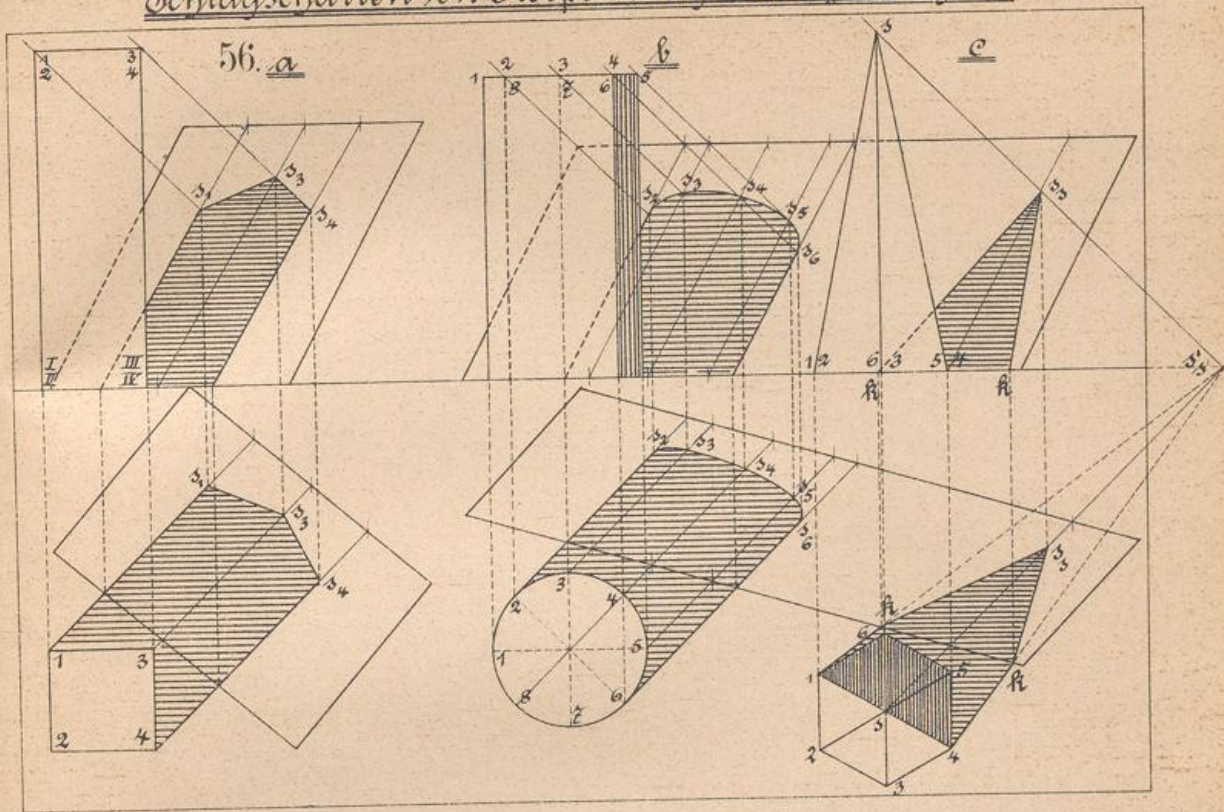




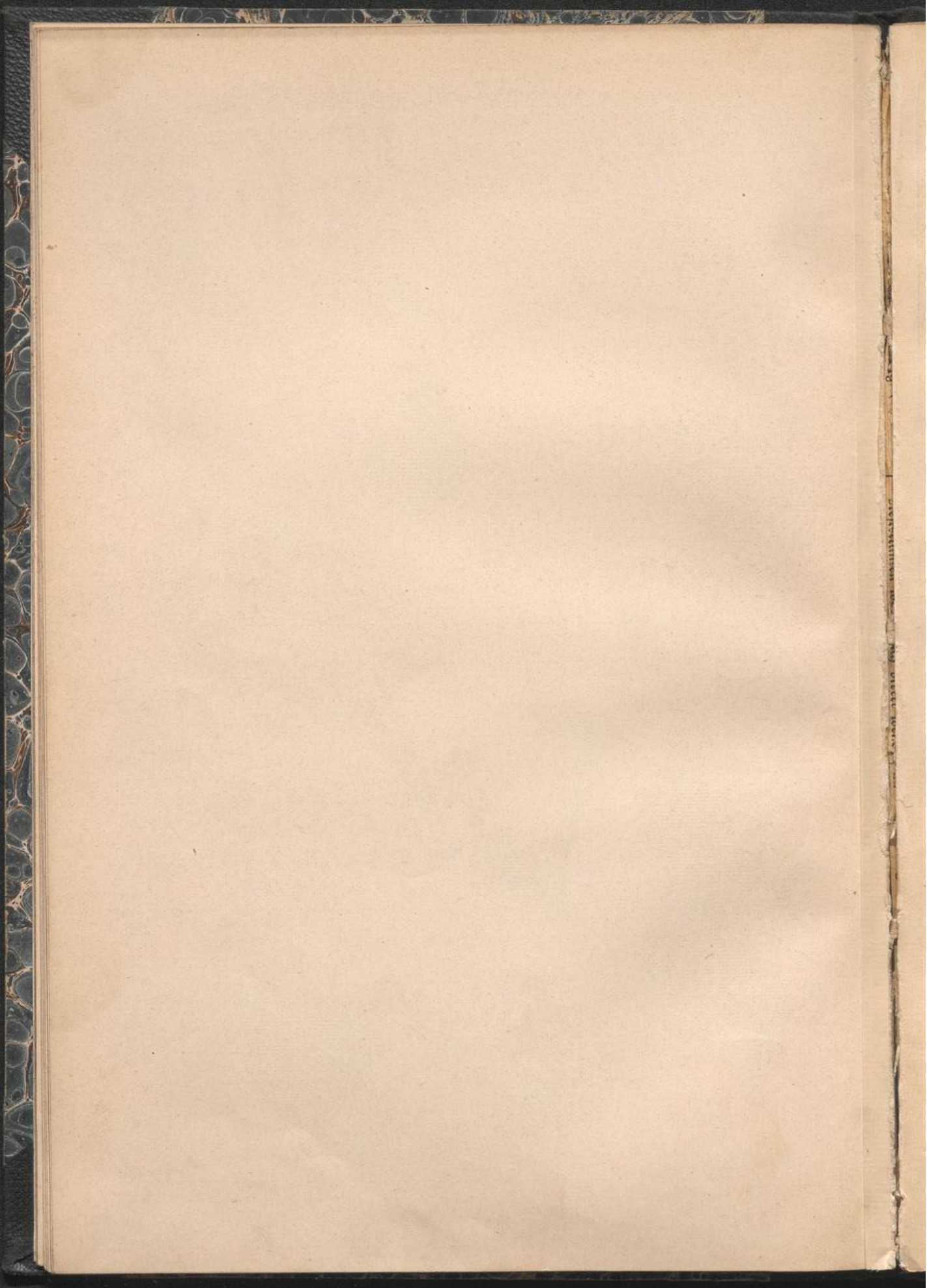
A. Jank



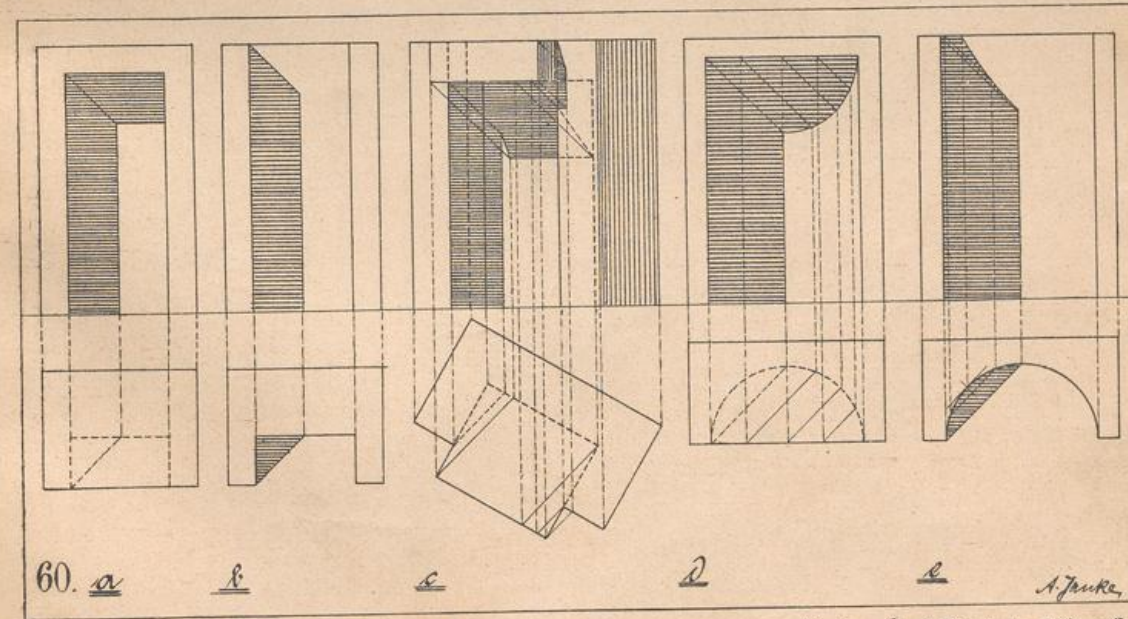
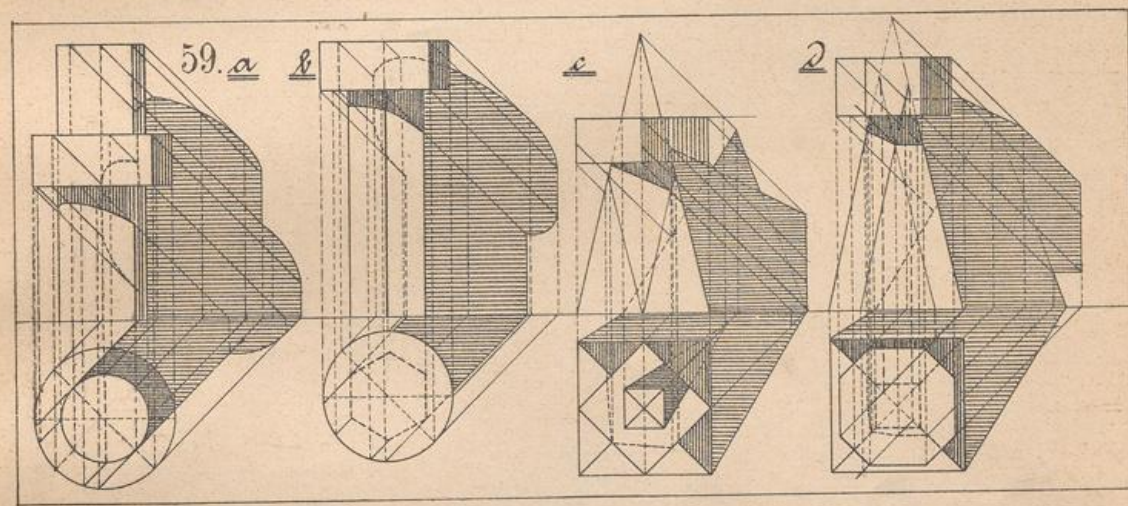
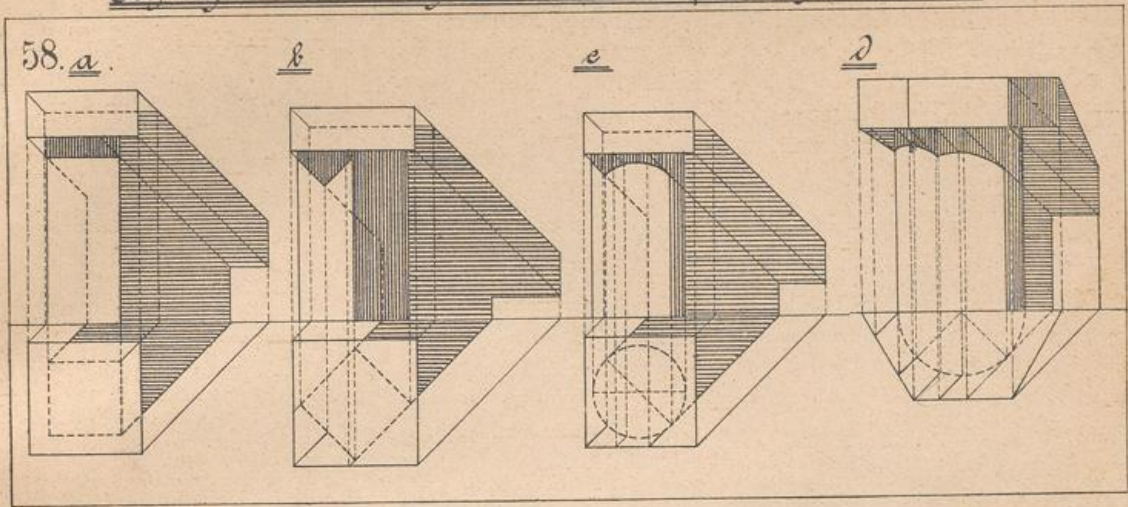
Technisches Zeichnen. Schattenlehre. III. Abteil. Taf. 12.
Schlagschatten von Körpern auf beliebige Flächen.

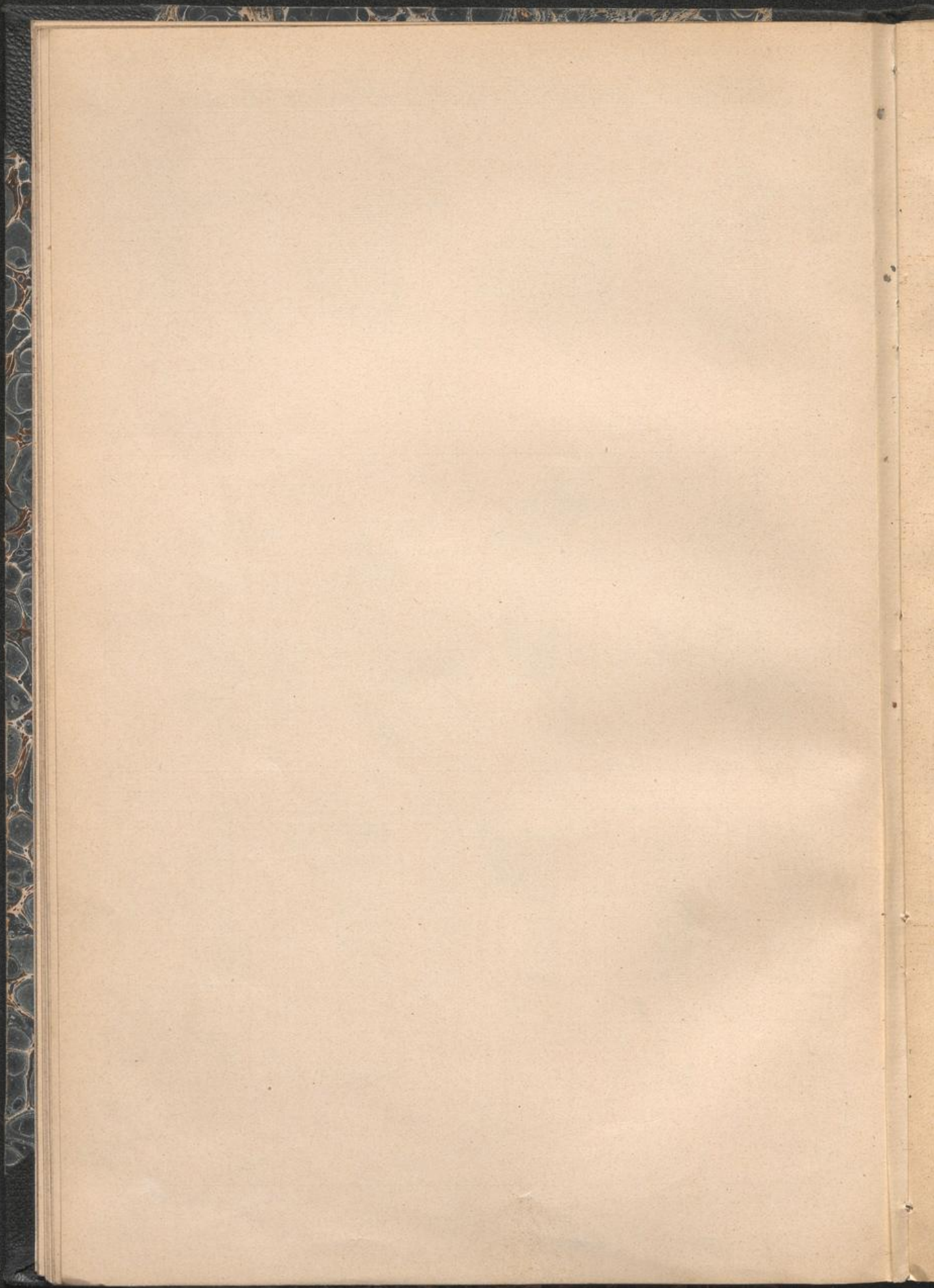


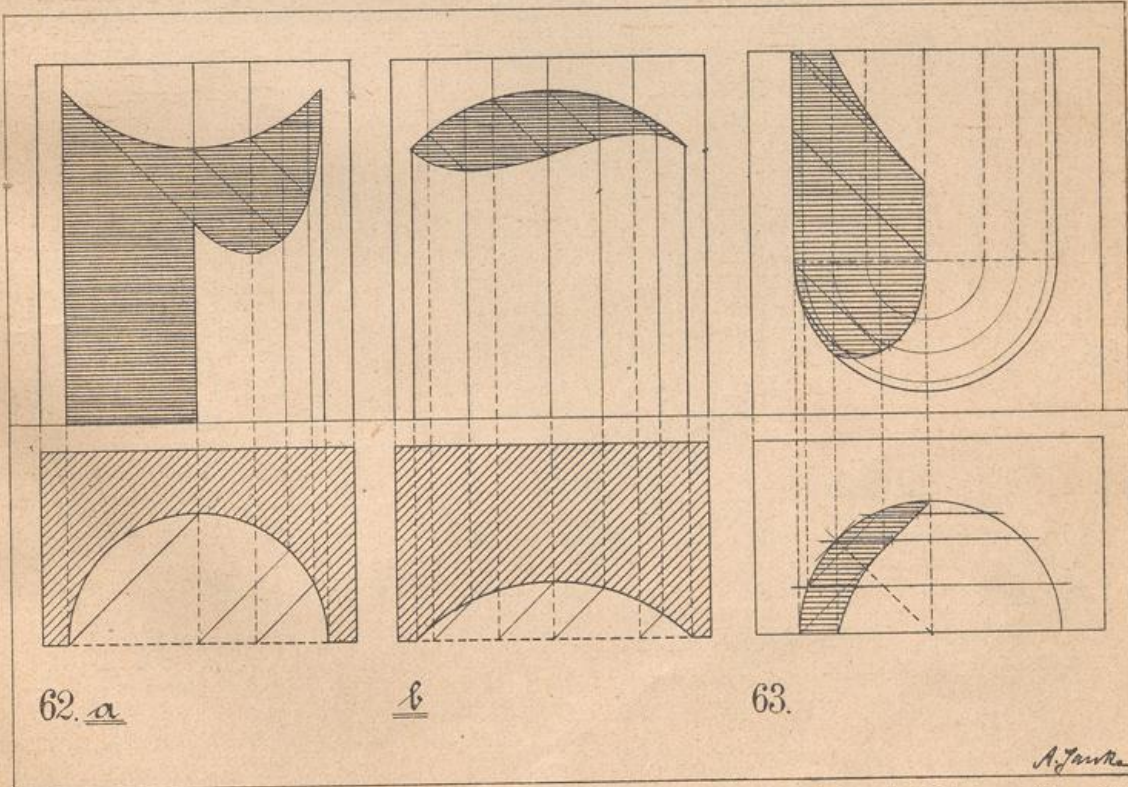
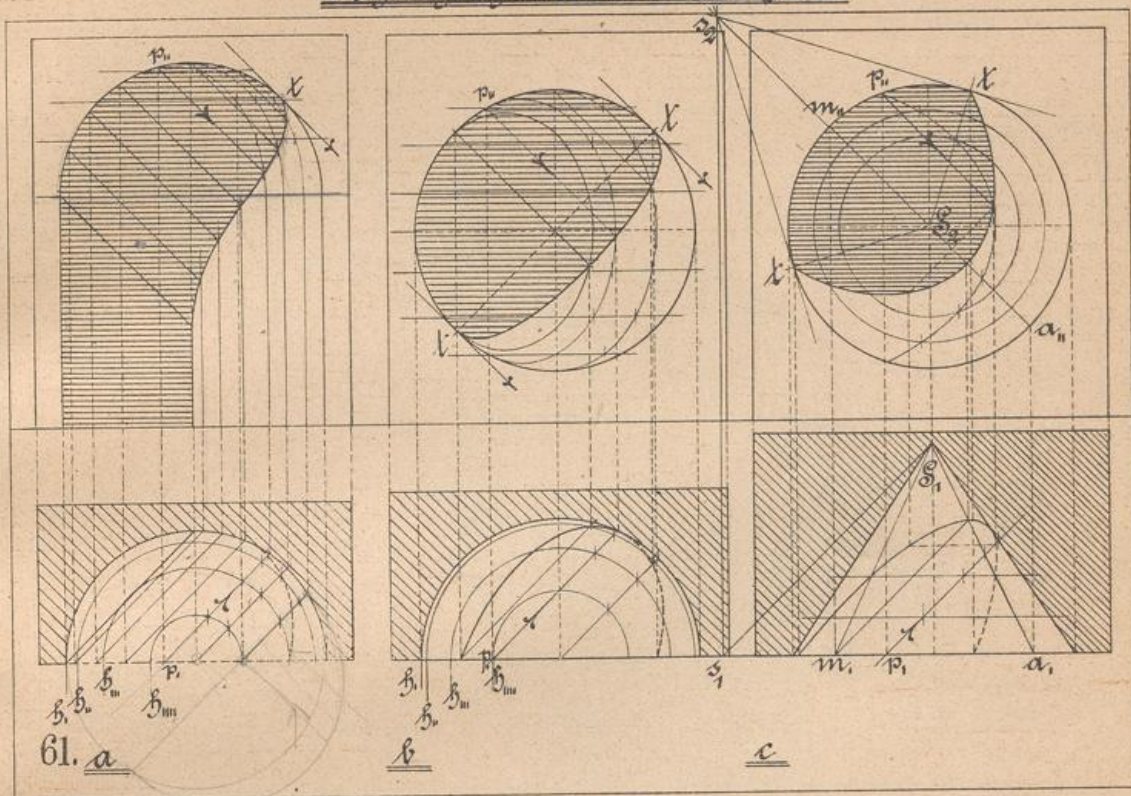
A. Janke



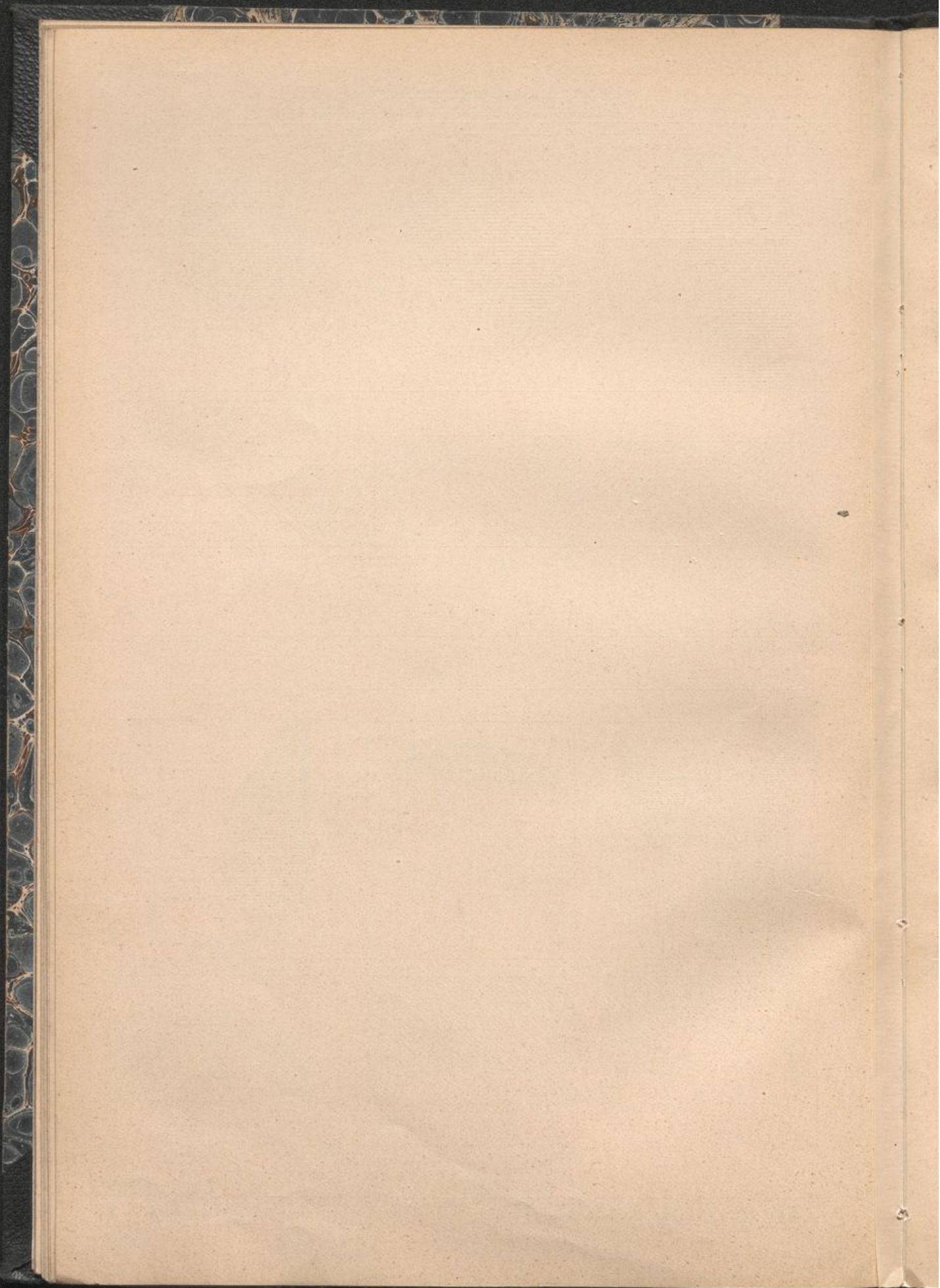
Technisches Zeichnen. Schattenlehre. III. Abteil. Taf. 13.
Schlag- und Kernschatten von Körper auf Körper.

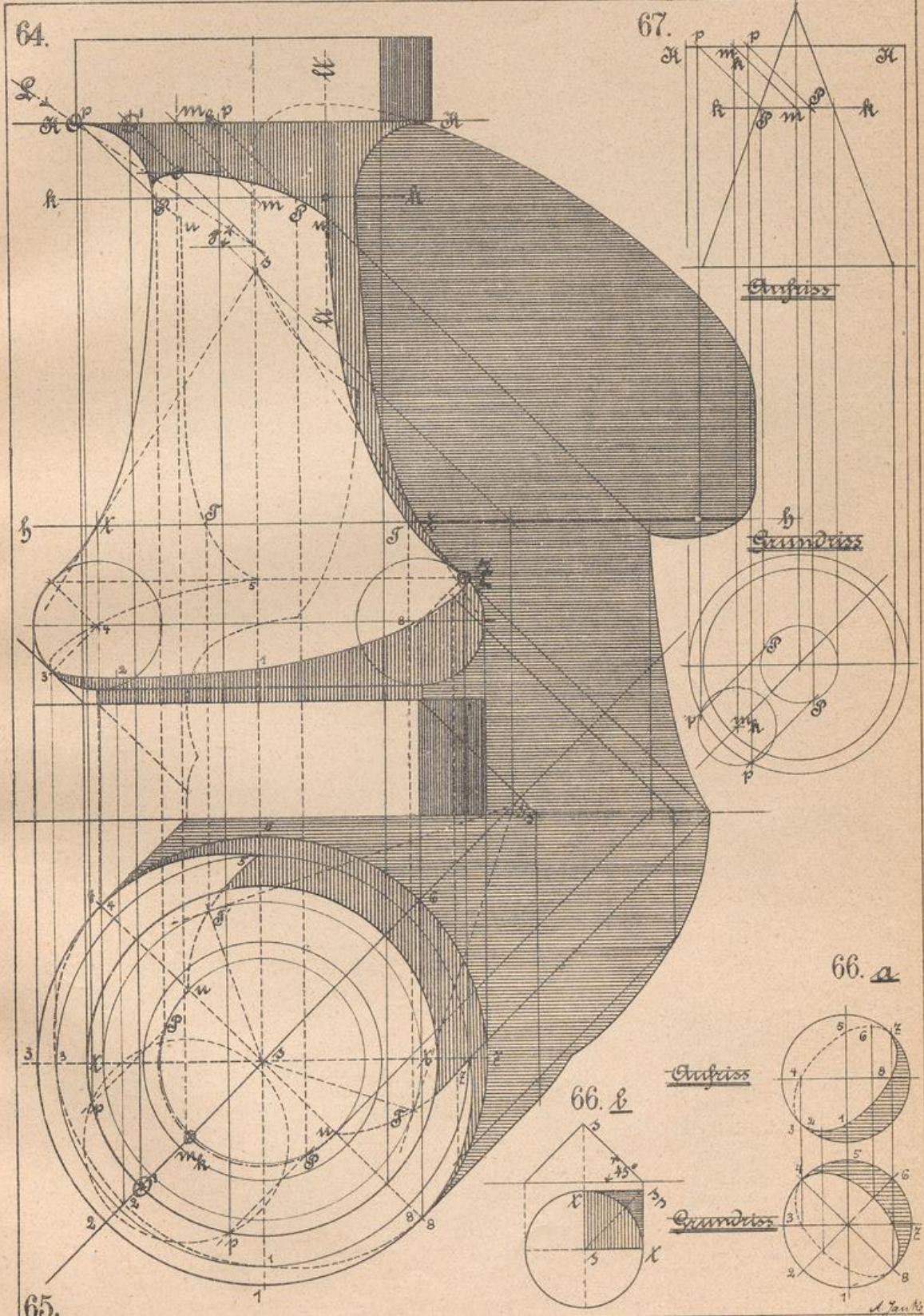


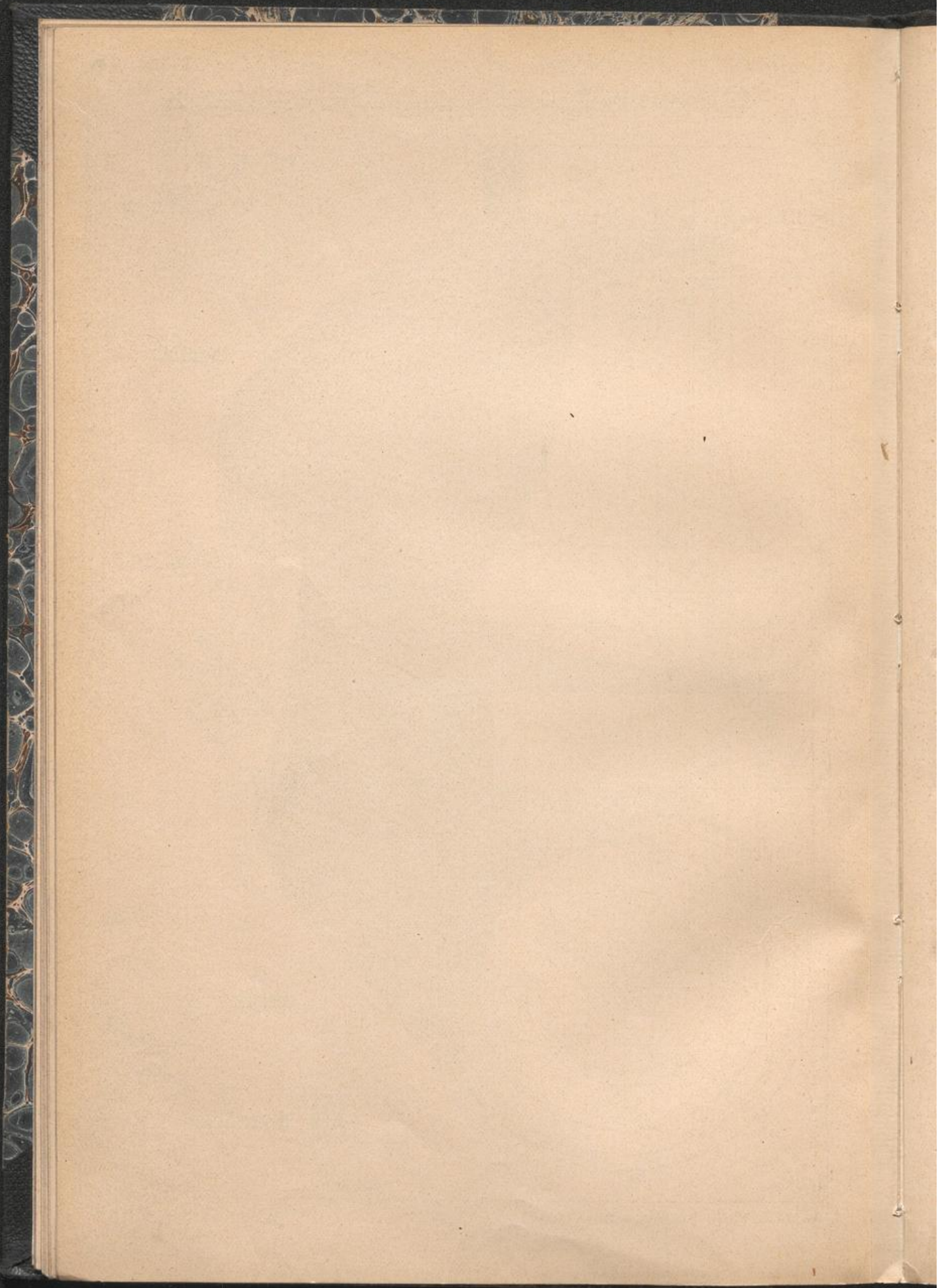




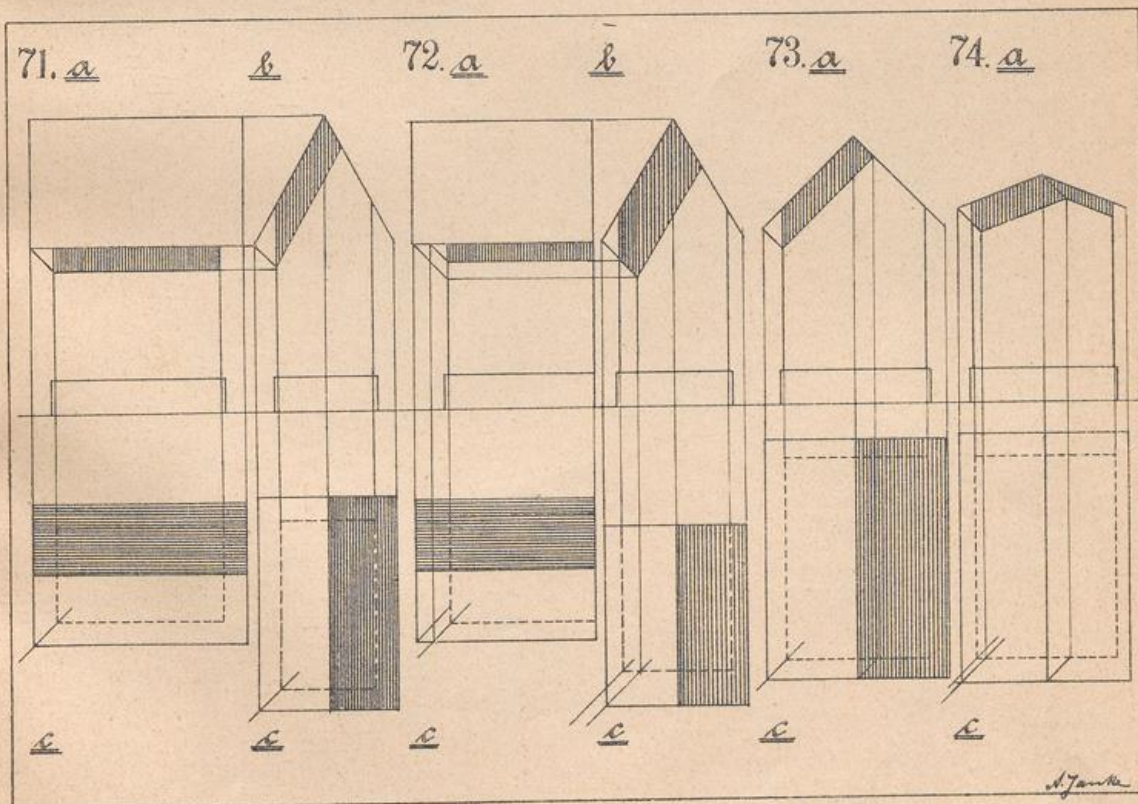
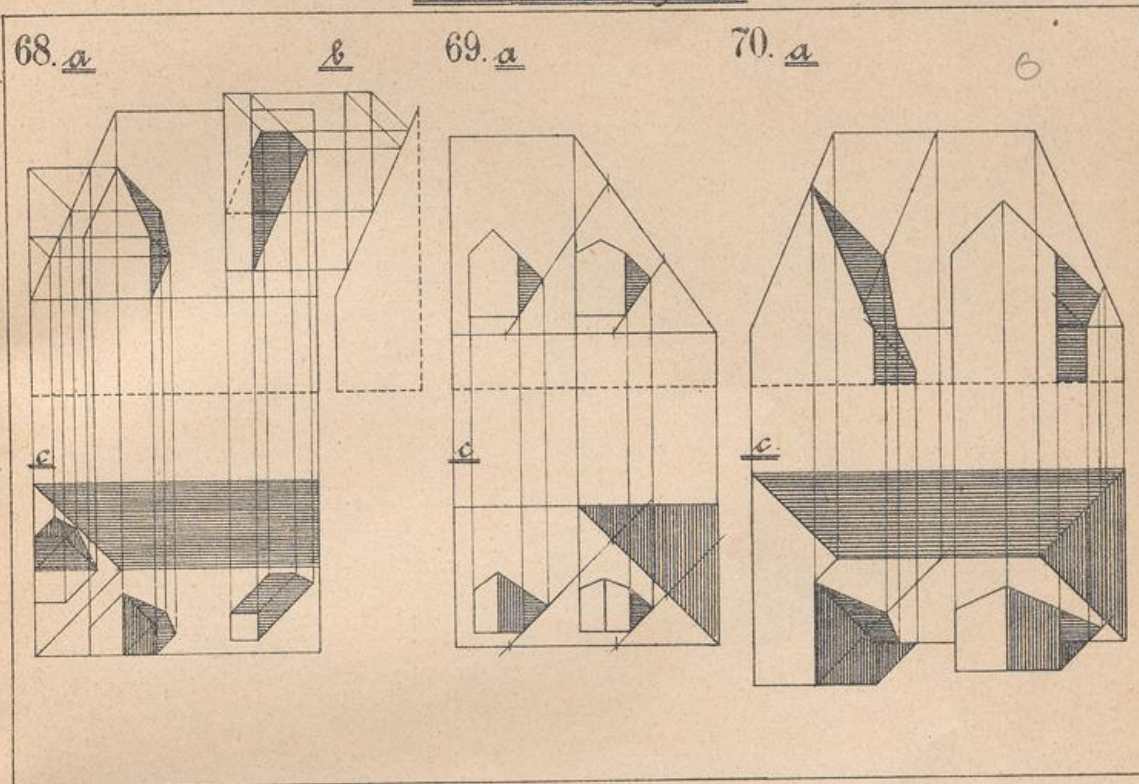
A. Janka



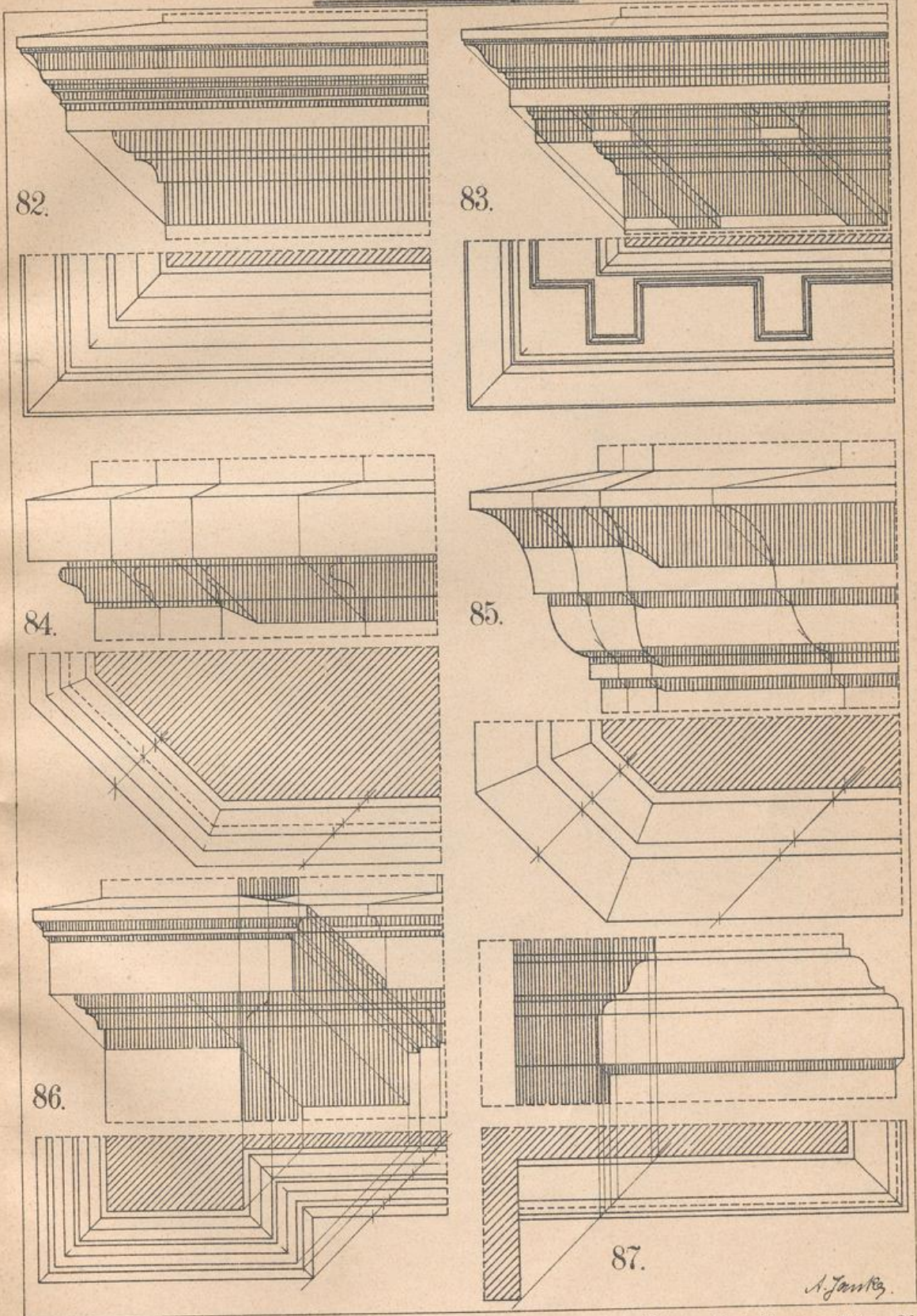


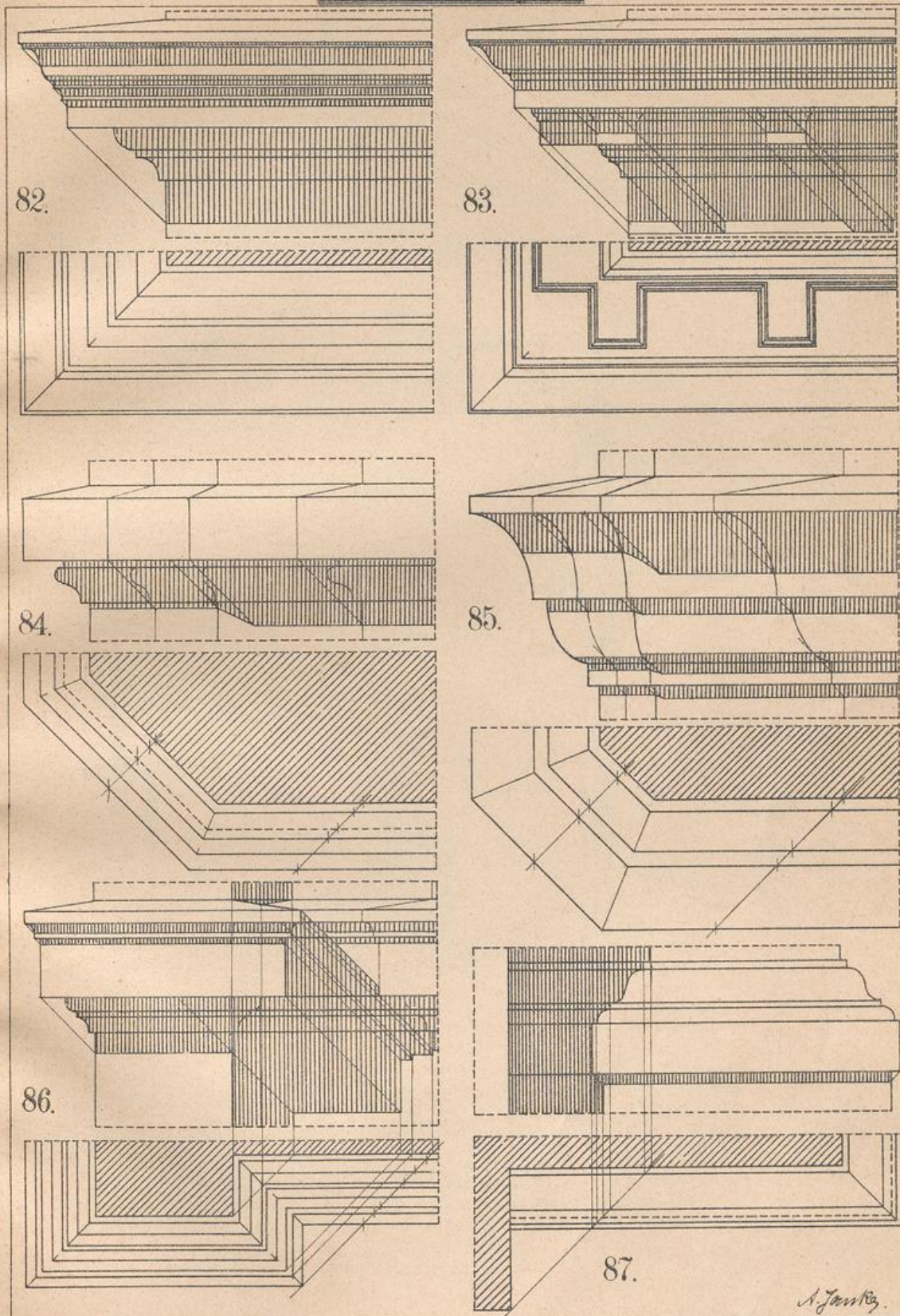


Anwendungen.

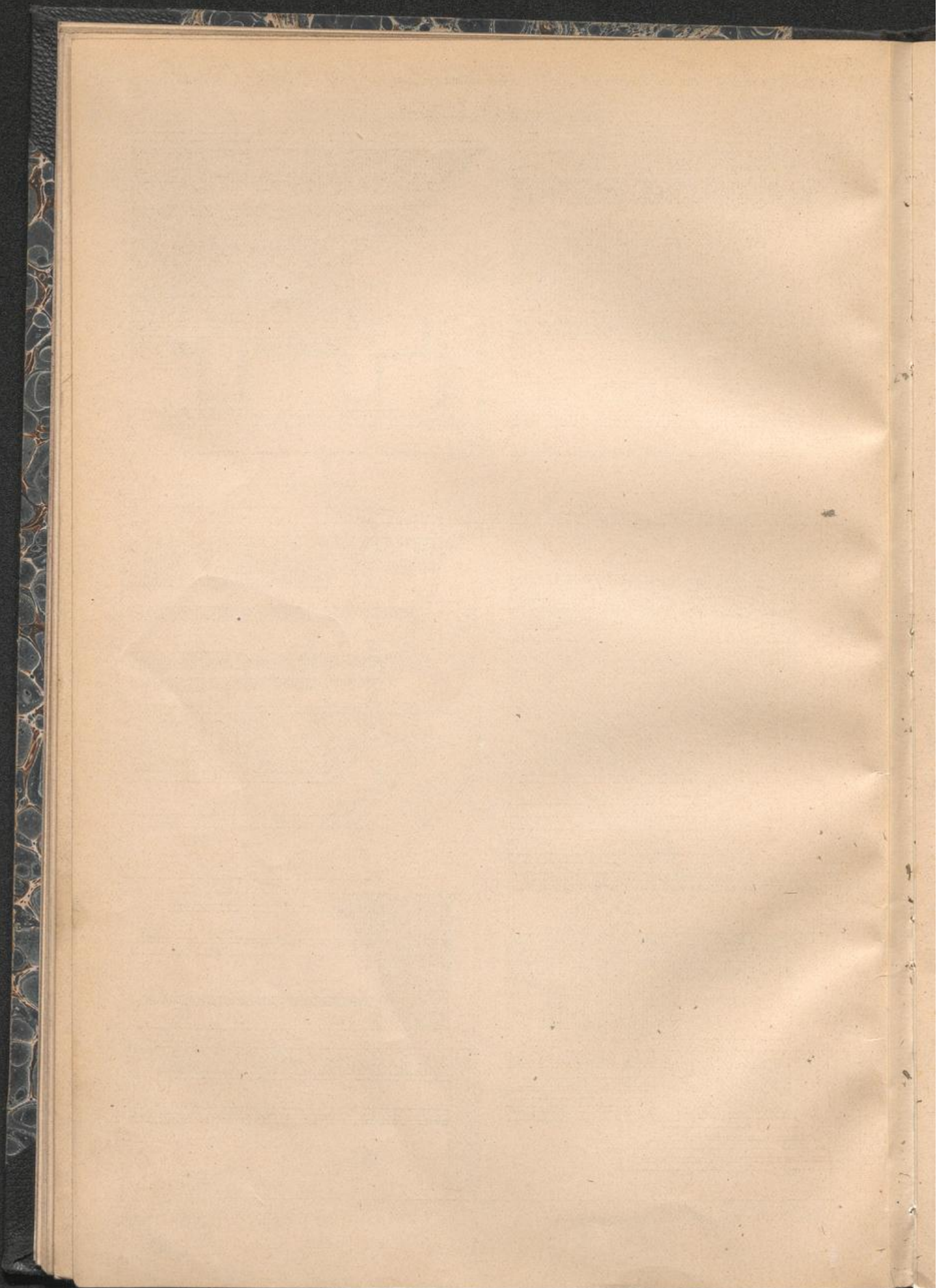


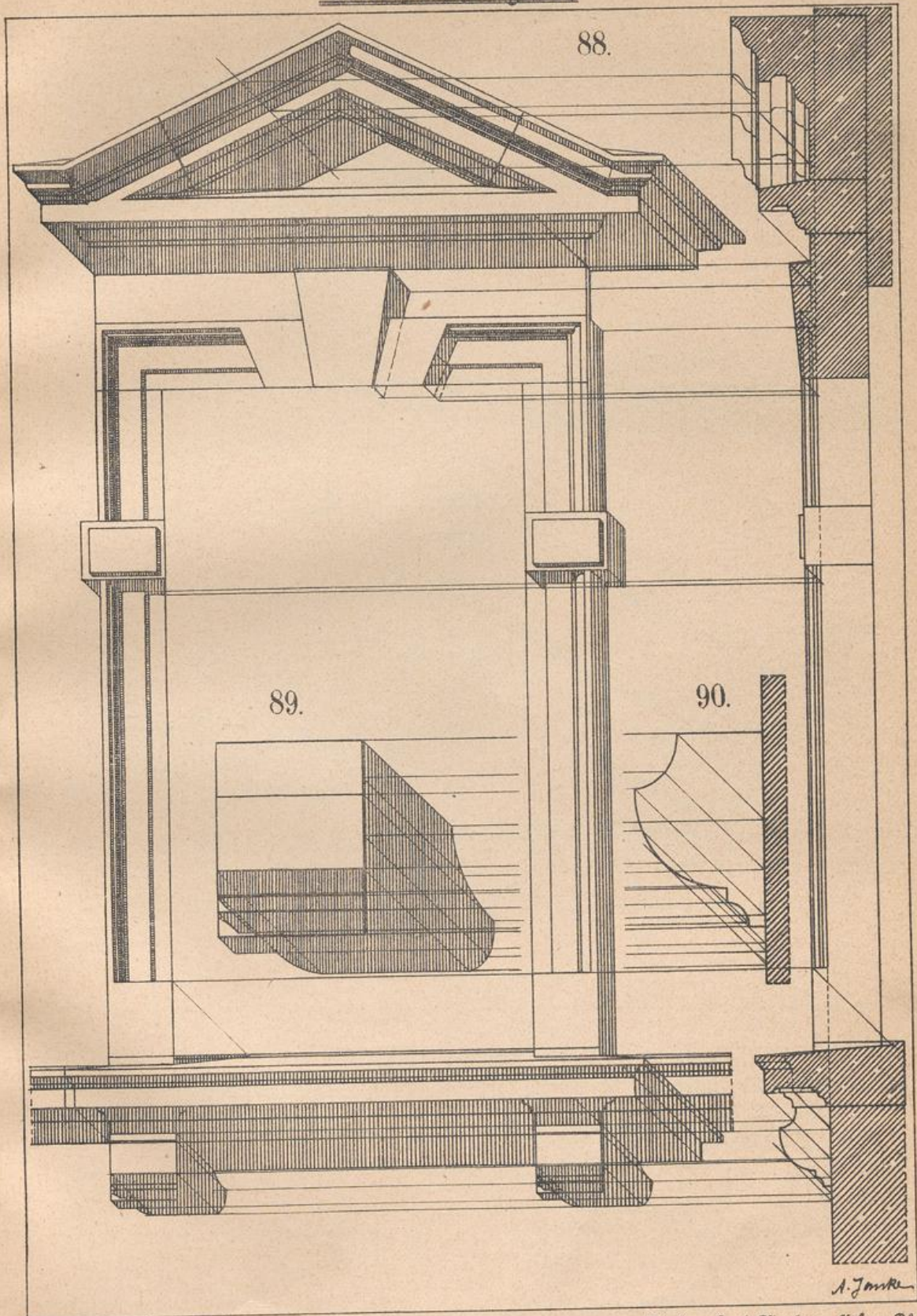
A. Janke

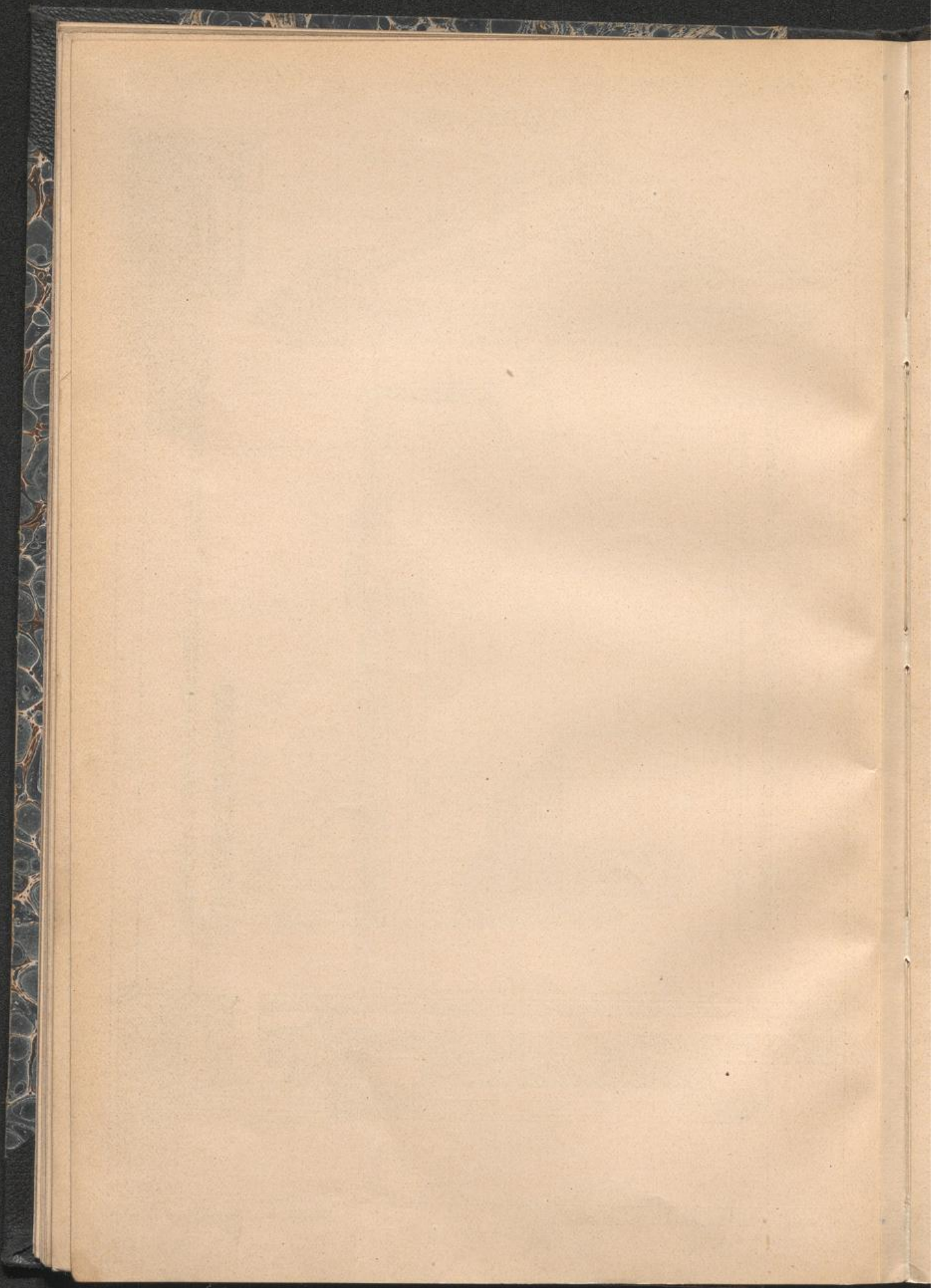


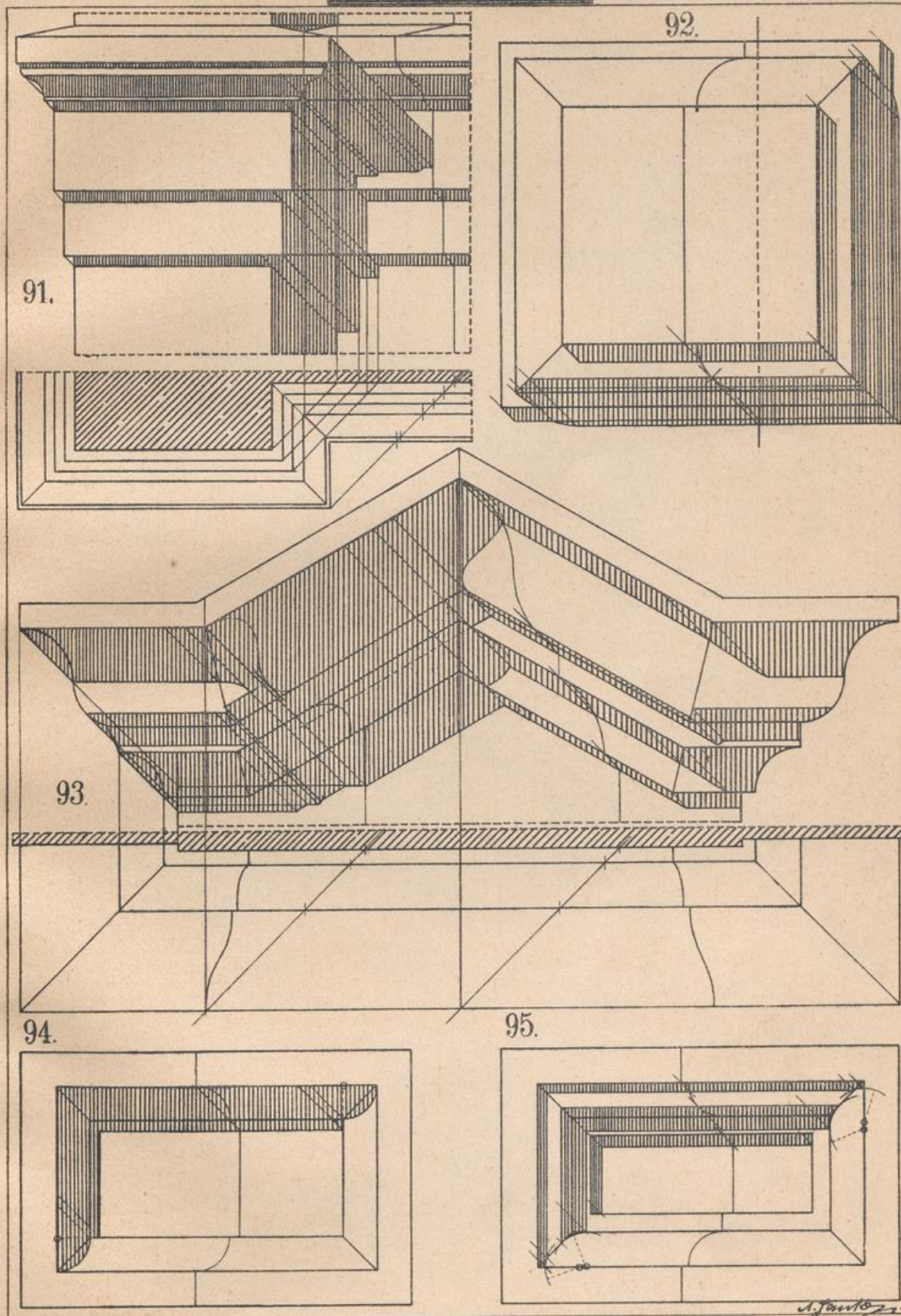


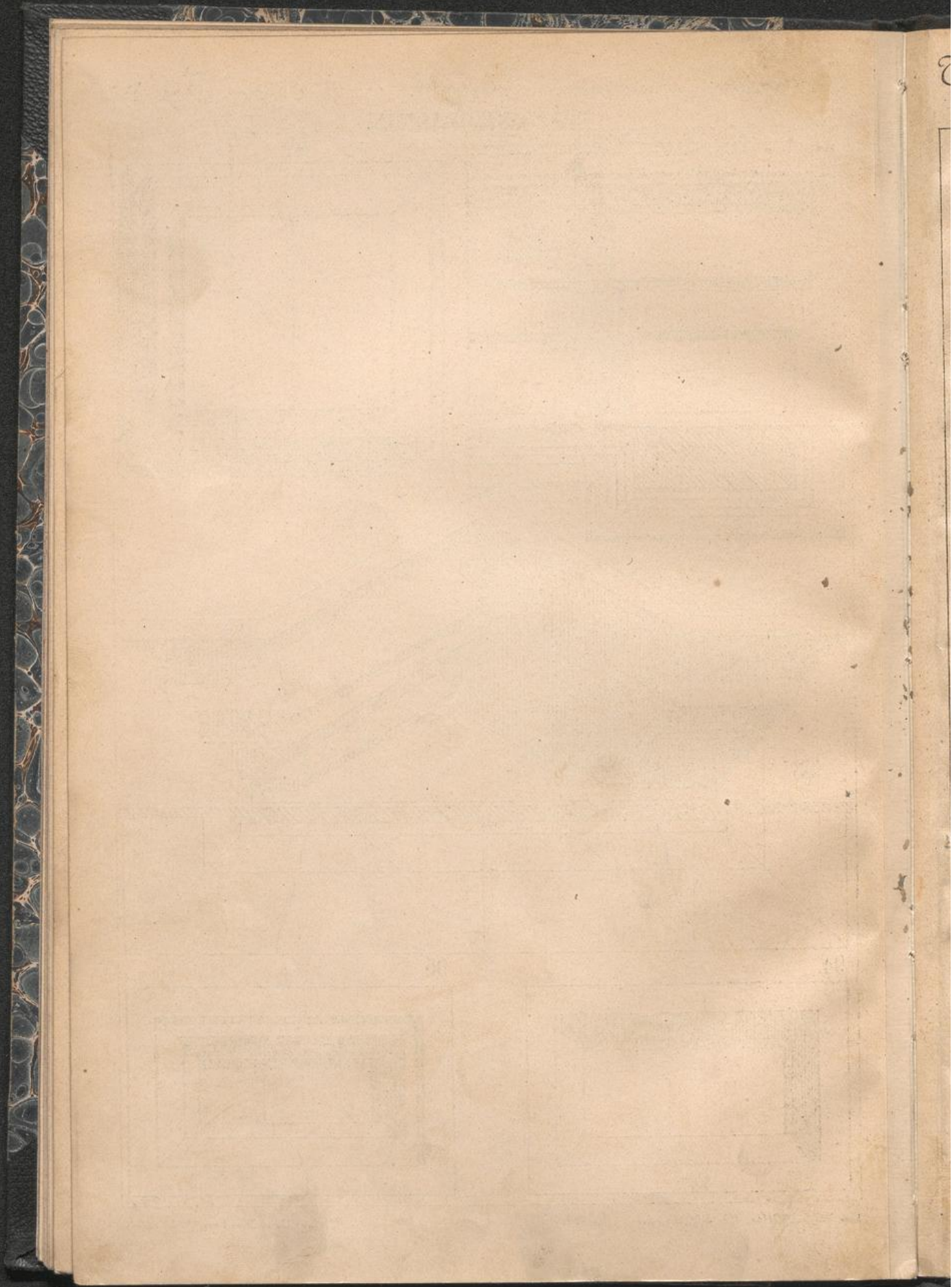
A. Janke.



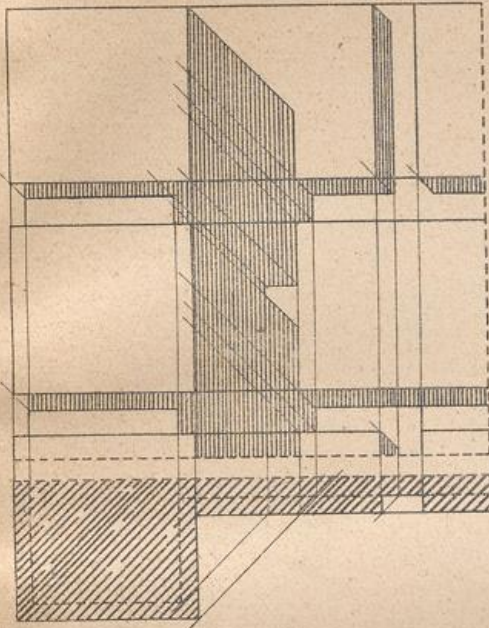




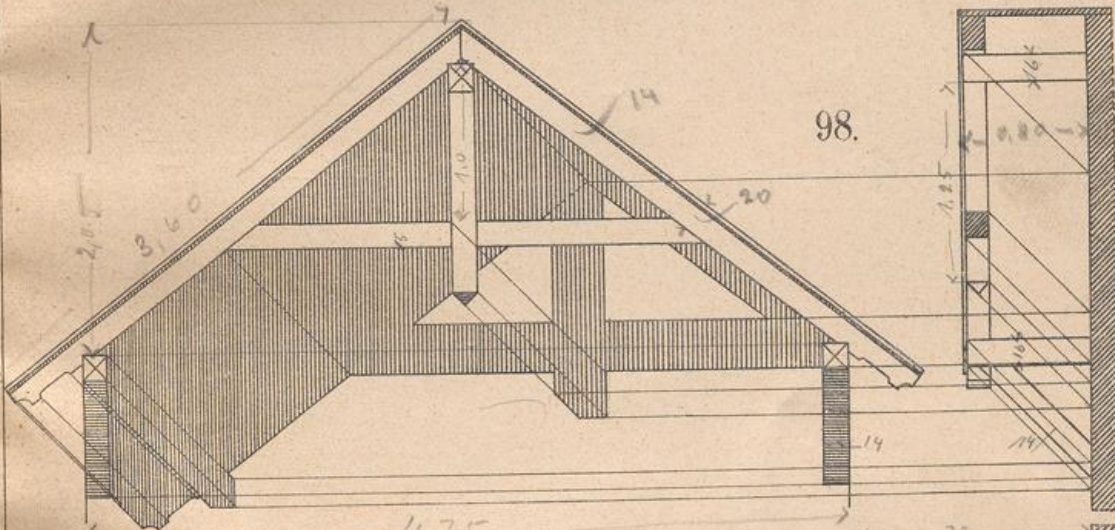
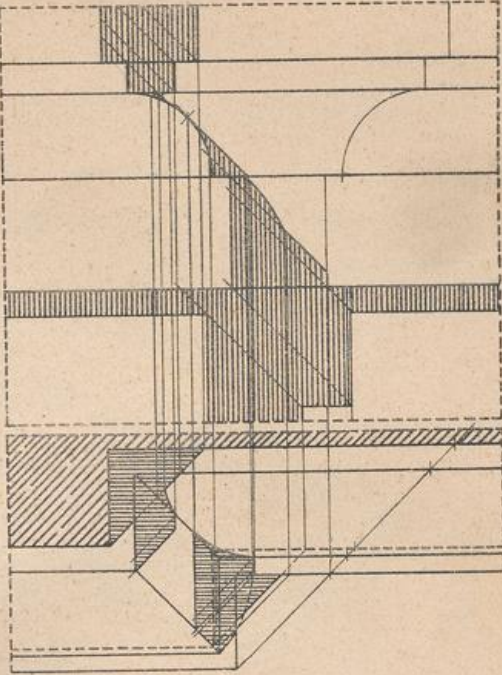




96.

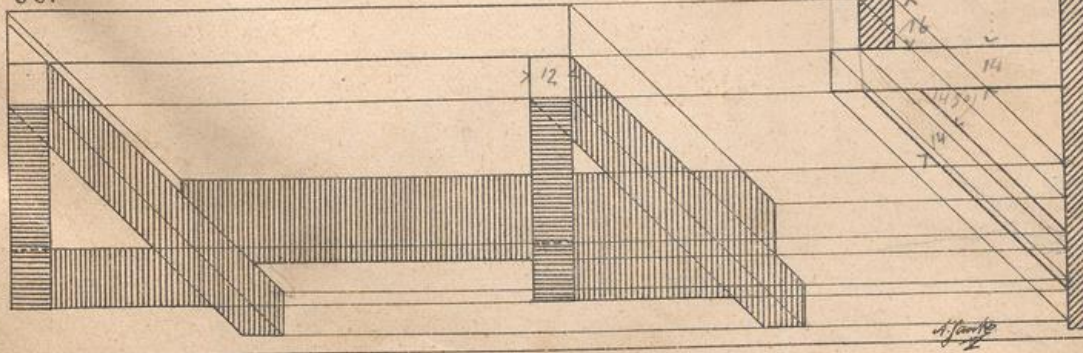


97.



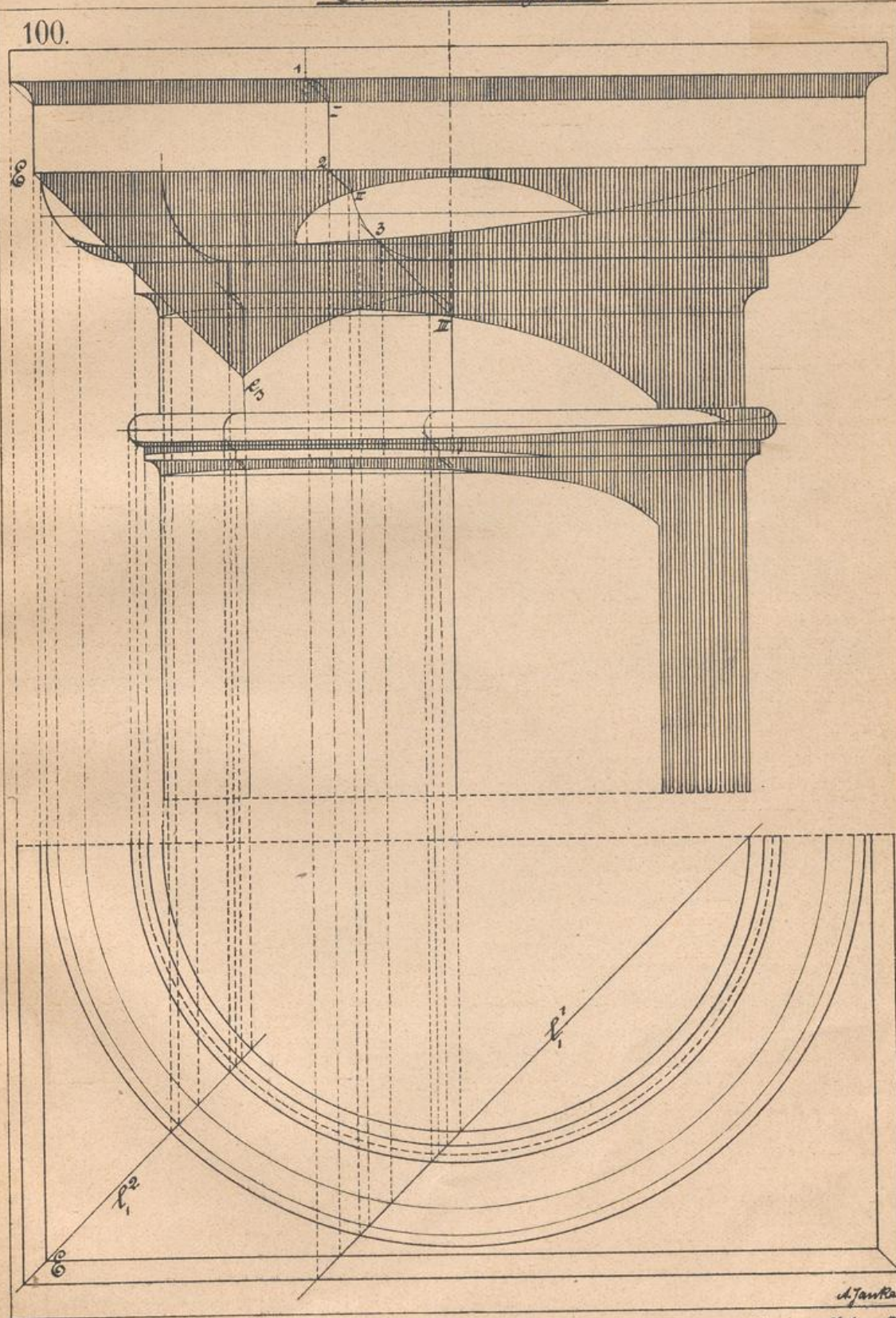
98.

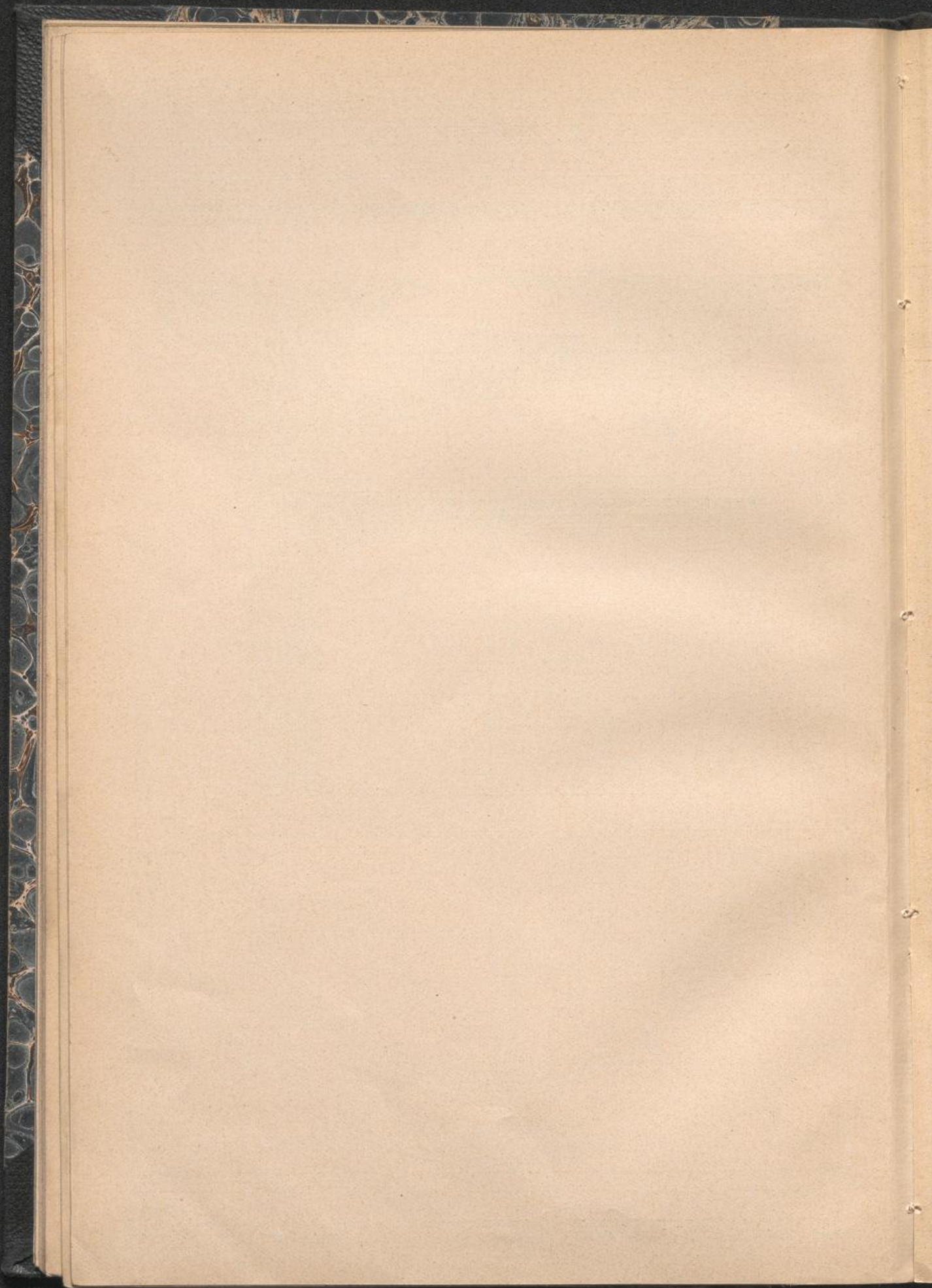
99.



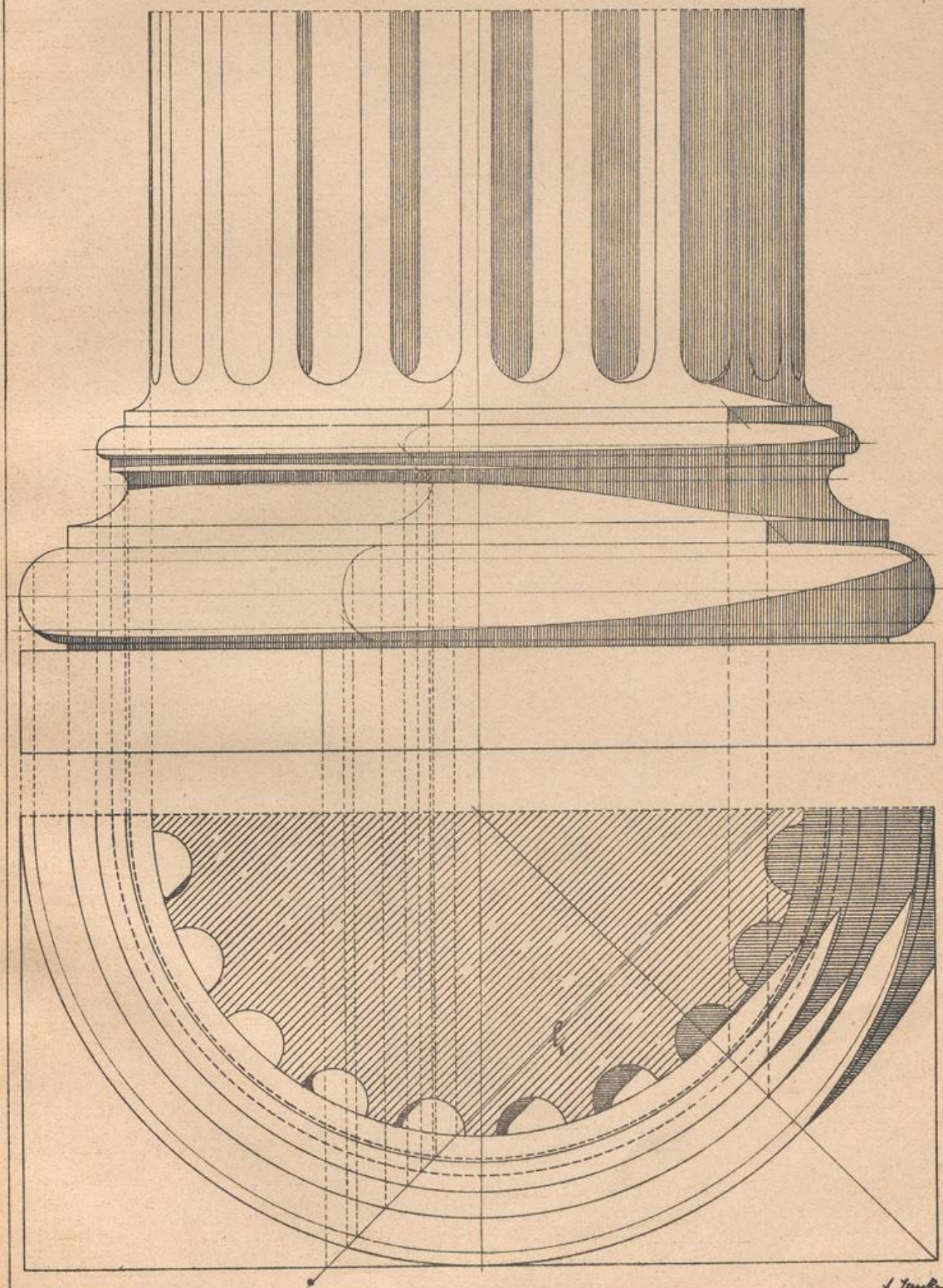
A. Janke

100.

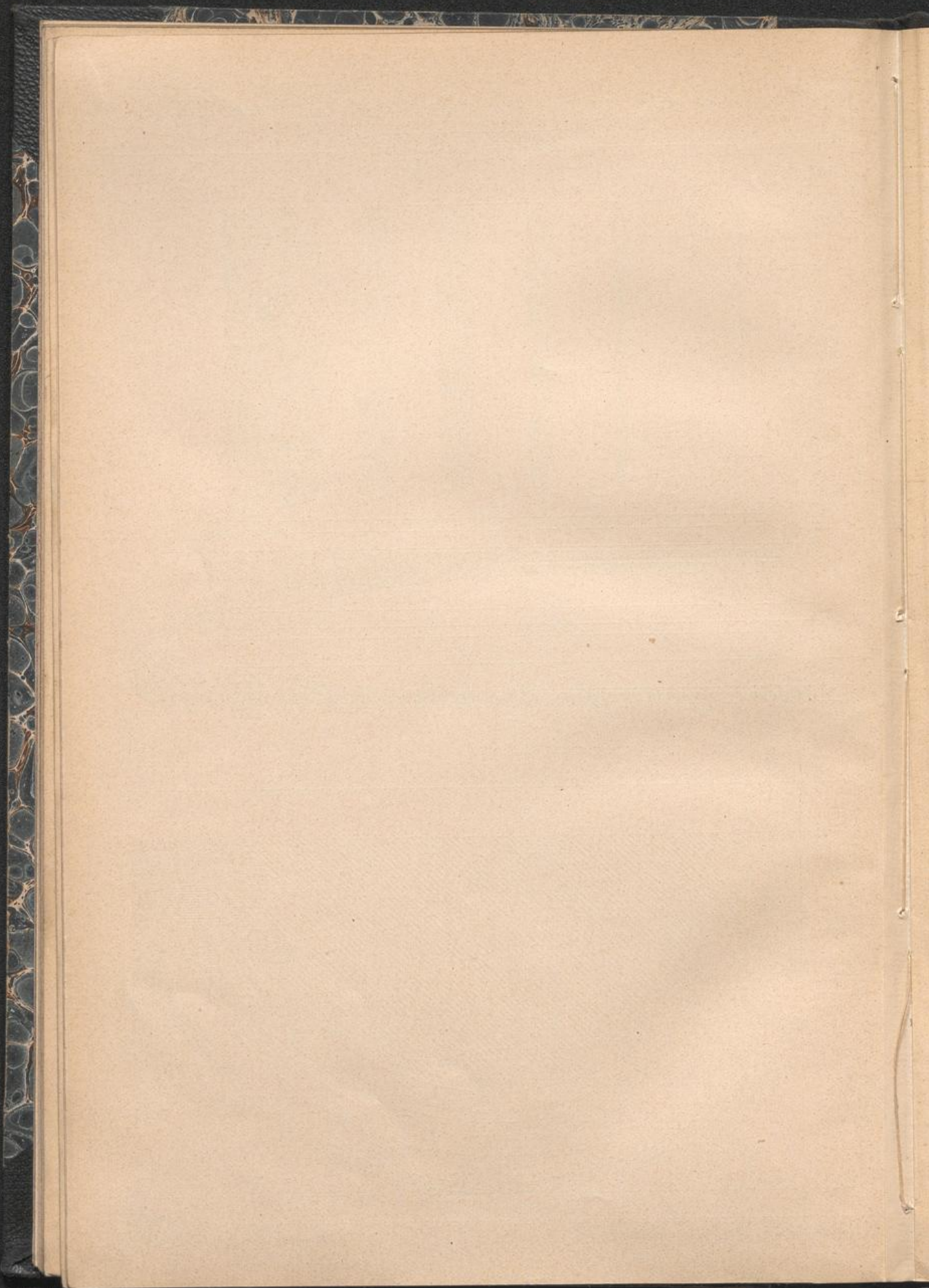


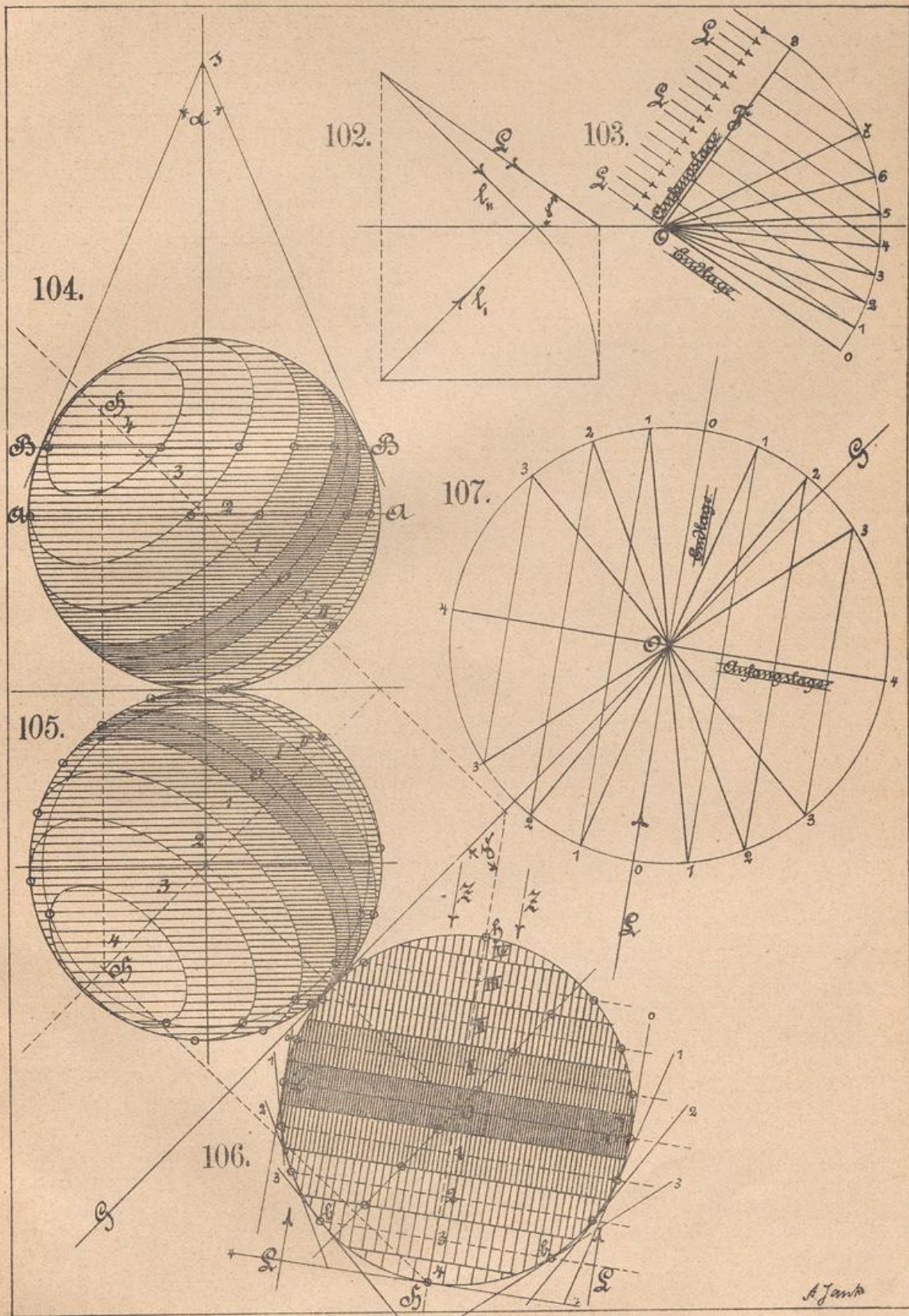


101.

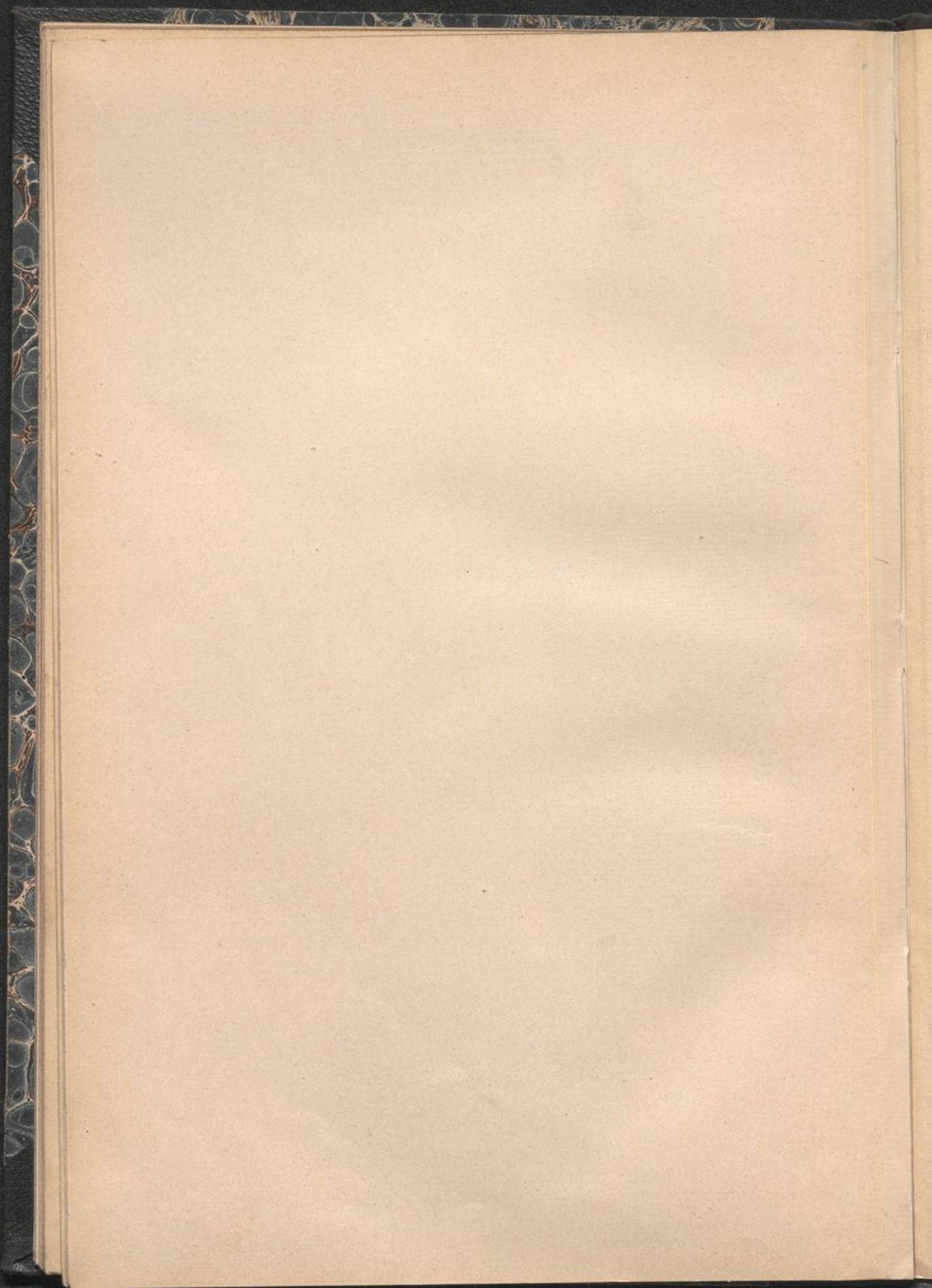


A. Junk

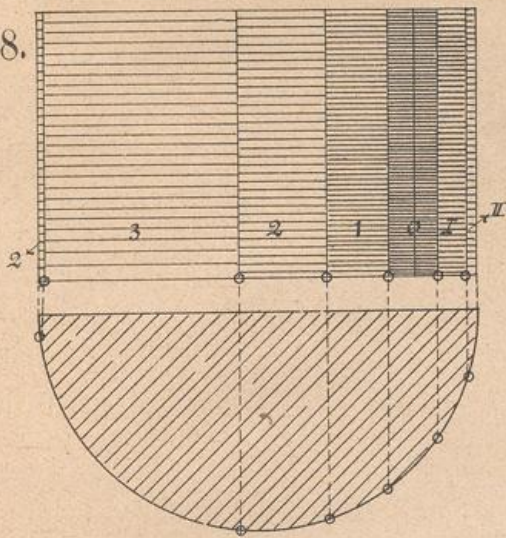




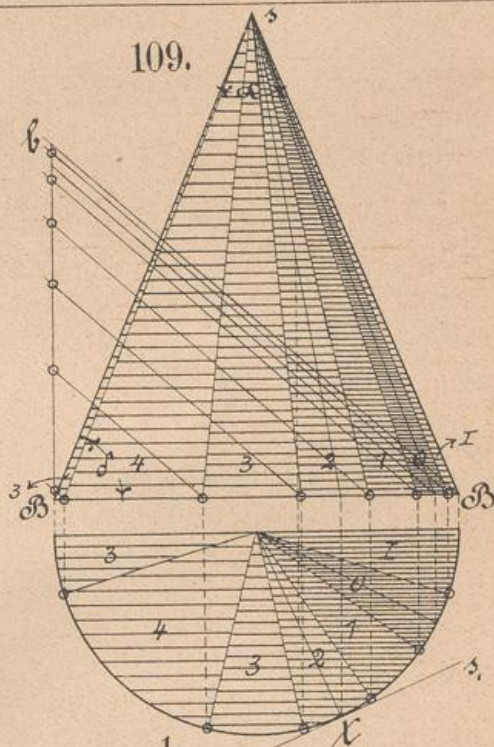
A. Janke



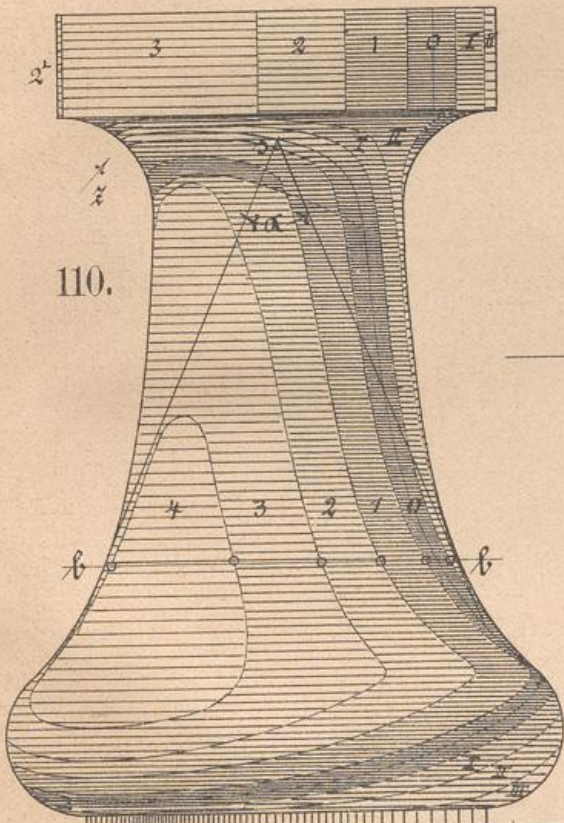
108.



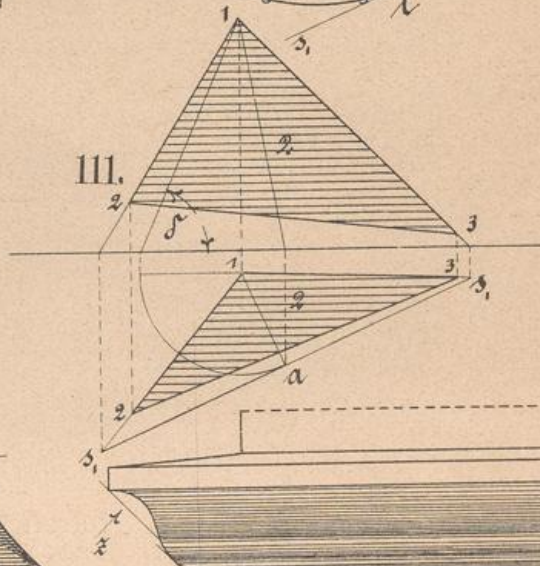
109.



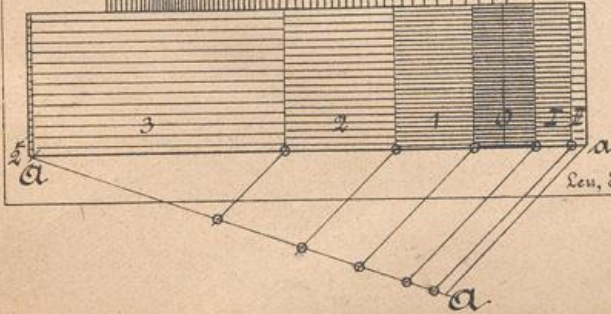
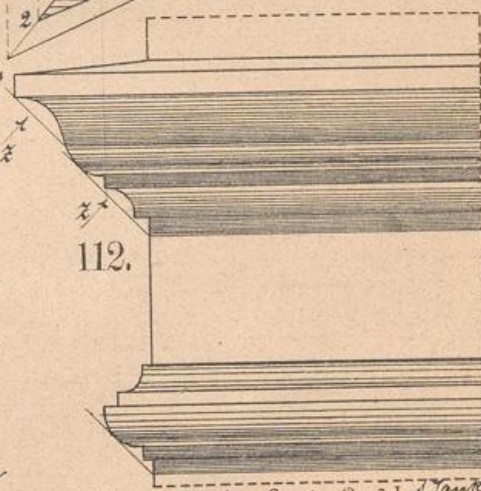
110.



111.



112.



Leu, Janke, Wille: Für Schule u. Praxis. Band 1. A. Janke

Verlag: Paul Neubner, Köln a. Rh.

