Lehrbuch der Schattenkonstruktion

Janke, Alphons

Köln a. Rh., 1902

Erster Abschnitt: Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76011

Erster Abschnitt.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten.

1. Kapitel.

Richtung und Neigungswinkel der Lichtstrahlen. (Taf. 1.)

Man ist übereingekommen, bei der Konstruktion der Schatten in technischen Zeichnungen die Lichtstrahlen parallel zur Richtung einer körperlichen Diagonale eines Würfels zu nehmen. Dieser Würfel, **Fig. 3**, wird zu den Projektionsebenen so gelegt, daß seine Kanten entsprechend parallel zu den Projektionsachsen gerichtet sind; alsdann wählt man als Lichtstrahlrichtung L die Diagonale, welche die vordere, obere, linke Würfelecke Vol mit der hinteren, unteren, rechten Hur verbindet. Der Lichteinfall erfolgt von oben nach unten und von links nach rechts. Die Projektionen l_1, l_2 und l_3 dieses Lichtstrahles L zeigen sich auf den drei Ebenen als 45° Linien zu den Achsen. **Fig. 4** giebt die geometrische, **Fig. 3** die isometrische Darstellung der Lichtstrahlen an.

Wie die Projektionen l_1, l_2 und l_3 des Lichtstrahles L mit den Achsen gleiche Winkel einschließen, so sind auch die Neigungswinkel γ des räumlichen Lichtstrahles L zu den drei Projektionsebenen unter sich gleich. Diese Neigungswinkel γ betragen jedoch nicht 45°, sondern nur ungefähr $35^1/_2$°. Die Bestimmung des Neigungswinkels γ erfolgt durch Umklappung in **Fig. 5** oder durch Drehung in **Fig. 6**; die schraffierten Dreiecke enthalten gegenüber ihrer kleineren Kathete den Winkel γ.

---

2. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlagschatten auf die Projektionsebenen.

a) Schlagschatten von Punkten. (Taf. 2.)

Ist nach **Fig. 7** der Schlagschatten eines Punktes p zu suchen, so legt man sich durch denselben einen Lichtstrahl l; der erste Durchgangspunkt s des Lichtstrahles mit einer der beiden Projektionsebenen ist der Schatten des Punktes p. Der

Schatten s_1 befindet sich in **Fig. 7a** auf dem Fußboden, weil der Punkt dem Fußboden näher als der Vorderwand liegt, im anderen Fall, **Fig. 7b**, wird der Schatten in die Vorderwand geworfen. Hat der Punkt p (**Fig. 7c**), von beiden Projektionsebenen gleichen Abstand, so kommt sein Schatten s in die Projektionsachse zu liegen.

b) Schlagschatten von Linien. (Taf. 2.)

Ohne weiteres erkennt man, daß der Schatten einer **geraden Linie** auf eine Ebene im allgemeinen wiederum eine Gerade ist.

In den Beispielen auf Tafel 2 ist der Schatten kräftig ausgezogen und an seinen Endpunkten durchgängig mit a und b bezeichnet, zum Unterschied von den Projektionen der Linien, die mit **a**, b, bezw. **a**,, b,, oder **a**,,, b,,, benannt sind.

Befindet sich die Schatten werfende Linie zwischen zwei Ebenen, dem Grundriß und dem Aufriß, so sind hinsichtlich des Schattens zwei Möglichkeiten vorhanden:

1) Der Schatten ab liegt nur in einer Projektionsebene (**Fig. 8a und b, 9a, 10, 11 und 13**).

2) Der Schatten ab liegt in den beiden Projektionsebenen (**Fig. 8c, 9b und c, 12, 14 und 15**).

Die Lösung beim ersten Fall besteht einfach darin, daß man von den beiden Endpunkten die Schatten a und b konstruiert, deren gerade Verbindungslinie der Schatten ab ist.

Im zweiten Falle hat der Schatten ab in der Projektionsachse einen Knickpunkt k, der mit den Schatten a und b der beiden Endpunkte verbunden, die Schattenlinie akb ergiebt.

Die gerade Verbindungslinie ab der Schatten der Endpunkte, z. B. in **Fig. 8c**, ist nicht der Schlagschatten der Geraden ab, sondern eine Linie ohne jede projektive Bedeutung.

Lotrechte Linien. (Fig. 8.) Regel: Der Schatten von lotrechten Linien hat im Grundriß die 45° Richtung der Lichtstrahlen und ist im Aufriß senkrecht zur Projektionsachse gerichtet.

Der Knickpunkt k, **Fig. 8c**, ergiebt sich hiernach ohne weiteres.

Linien, senkrecht zum Aufriß. (Fig. 9.) Regel: Der Schatten von Linien, die senkrecht zum Aufriß stehen, hat im Aufriß die 45° Richtung der Lichtstrahlen und ist im Grundriß senkrecht zur Projektionsachse gerichtet.

Der Knickpunkt k, **Fig. 9b** und **c**, ergiebt sich hiernach ohne weiteres.

Linien, parallel zur Projektionsachse. (Fig. 10.) Regel: Die Schatten von Linien, die parallel zur Projektionsachse liegen, haben Schatten, welche parallel mit dieser Achse verlaufen.

Etwas allgemeiner ist nach **Fig. 11 und 12** folgende Regel: Linien, die parallel zu einer Projektionsebene liegen, haben in dieser Ebene einen Schatten, welcher parallel der entsprechenden Projektion ist.

Liegt z. B. die Linie parallel zum Grundriß, **Fig. 11a**, so ist ihr Schatten ab im Grundriß parallel zur Grundrißprojektion a, b,.

Der Knickpunkt k wird hierbei am einfachsten erhalten als Schnittpunkt der zur Projektion parallelen Schattenlinie mit der Projektionsachse. (**Fig. 12a.**)

Linien, schräg zu beiden Projektionsebenen. (Fig. 13 und 14.) Regel: Der Schatten von Linien, welche zu beiden Projektionsebenen schräg liegen, ist zu keiner ihrer Projektionen parallel.

Der Knickpunkt k wird am einfachsten erhalten unter Benutzung des zweiten Durchgangspunktes. Soll z. B. in **Fig. 14a** der Schatten akb der Linie ab konstruiert werden, so sucht man zunächst die Schatten a und b der beiden Endpunkte und hierauf den Durchgangspunkt s, des Lichtstrahles von b mit dem hinteren Grundriß Die Gerade as, ist dann der Schatten der ganzen Linie auf dem Grundriß und schneidet die Projektionsachse in dem Knickpunkt k. In **Fig. 14b** ist zu demselben Zwecke der Durchgangspunkt s,, mit dem unteren Aufriß ermittelt.

Aus der Projektionslehre ist bekannt, daß durch zwei vollständig bekannte Projektionen eines Gegenstandes sich dessen dritte Projektion unzweifelhaft ergiebt. Mit anderen Worten: durch die beiden Aufrisse ist der Grundriß, durch Grund- und Vorderriß ist der Seitenriß und endlich durch den Grund- und Seitenriß ist der Vorderriß gegeben. Hiervon wird vielfach im praktischen Konstruieren der Schlagschatten mit Nutzen Gebrauch gemacht.

In **Fig. 15** ist eine Gerade in ihren drei Projektionen gezeichnet, ihr Schatten akb soll konstruiert werden. Derselbe ergiebt sich nach dem bisher angewendeten Verfahren aus Grund- und Vorderriß oder unter Benutzung des Seitenrisses. In dem Seitenriß sind nach Maßgabe der **Fig. 4** die dritten Projektionen der Lichtstrahlen eingezeichnet. Der Schattenpunkt a z. B. kann gefunden werden entweder durch den Lichtstrahl aus a,,, und a, oder durch den Lichtstrahl aus a,,, und a,,. Die Projektionen k, und k,, des Knickpunktes k sind unmittelbar aus dem Seitenriß abzuleiten. Da sich nämlich dieser Punkt k in dem Seitenriß im Achsenschnitt O projiziert, ist der Schnitt des Lichtstrahles aus O mit a,,, b,,, die dritte Projektion k,,, des Knickpunktes, aus welcher sich weiter die beiden anderen k, und k,, ergeben.

Der Schatten azb einer **krummen Linie** ist im allgemeinen ebenfalls eine Kurve. Man erhält ihn meistens, indem man nicht nur von den beiden Endpunkten a und b, sondern von möglichst vielen Zwischenpunkten z den Schatten konstruiert und die so gefundenen Punkte sinngemäß miteinander verbindet (**Fig. 18**). In vielen Fällen werden aber auch hier Vereinfachungen der Konstruktion möglich sein. Die Kurven in **Fig. 16** liegen zu einer Projektionsebene parallel und ist ihr Schatten deshalb, wie die Figuren erkennen lassen, der entsprechenden Projektion parallel. Ist die Kurve ein Kreisbogen, welcher parallel mit einer Projektionsebene verläuft, z. B. mit dem Fußboden, **Fig. 16b**, so kann die Konstruktion des Schattens mittels Zwischenpunkten unterbleiben. Durch den Schatten der Endpunkte a und b, sowie des Mittelpunktes m ist mit Hilfe des Zirkels der Schattenbogen ab konstruierbar.

Wie in **Fig. 15**, ist auch bei einer Kurve in **Fig. 17** der Schatten unter Verwendung der dritten Projektion ermittelt und der hier vorkommende Knickpunkt k durch den Lichtstrahl Ok,,, direkt zu finden.

c) Schlagschatten von ebenen Figuren. (Taf. 3.)

In den Beispielen auf Tafel 3 ist der Schatten der Figuren schraffiert und, wenigstens bei den geradlinig begrenzten Figuren, mit a, b u. s. w. bezeichnet, während die Projektionen der Figuren nicht schraffiert und mit a, , b, u. s. w. benannt sind.

Die Konstruktion dieser Schatten beruht auf der Wiederholung der Konstruktion der Schatten von Punkten und Linien. Fallen die Schatten der beiden Endpunkte irgend einer Seite der Figur in dieselbe Projektionsebene, so ist der Schatten dieser Seite die gerade Verbindungslinie der Schatten der beiden Endpunkte, z. B. ab in **Fig. 19b**. Kommen dagegen die Schatten der beiden Endpunkte irgend einer Seite der Figur in verschiedene Projektionsebenen, so ist der Schatten dieser Seite geknickt und der Knickpunkt k nach einem der angegebenen Verfahren zu finden; siehe z. B. **Fig. 19b** bei der Seite a c.

Ohne weiteres ergiebt sich die Regel: Liegt eine ebene Figur parallel zu einer Projektionsebene, so ist ihr Schatten auf dieser Ebene parallel zu der entsprechenden Projektion. Es ist z. B. in **Fig. 19b** das Quadrat parallel zum Vorderriß, und demnach der Schatten a b k k im Vorderriß parallel zu $a_{\prime\prime} b_{\prime\prime} c_{\prime\prime} d_{\prime\prime}$.

Ist die ebene Figur ein Kreis, wie in **Fig. 23 und 24**, so ist der Schatten desselben ein Kreis in der Projektionsebene, zu welcher er parallel liegt, in der anderen dagegen eine Ellipse.

d) Lichtstrahl-Flächen; Schnitte projizierender Lichtstrahlebenen. (Taf. 4 und 5.)

Lichtstrahlflächen. Die sämtlichen Lichtstrahlen L, welche bei einer Geraden A B den Schatten hervorrufen, bilden eine Lichtstrahlebene, siehe **Fig. 25a, b und c.** Der Schnitt dieser Lichtstrahlebene mit einer oder beiden Projektionsebenen ist der Schatten der Geraden A B. Steht die schattenwerfende Gerade A B senkrecht zu einer Projektionsebene, so steht die Lichtstrahlebene zu dieser Ebene ebenfalls senkrecht und ist demnach eine sogen. projizierende Lichtstrahlebene. So ist in **Fig. 25a** die Lichtstrahlebene zum Grundriß und in **Fig. 25b** zum Aufriß projizierend.

Ist die schattenwerfende Linie eine Kurve, z. B. ein Kreis, wie in **Fig. 25d,** so bilden die sämtlichen Lichtstrahlen, welche den Schatten der Kurve entstehen lassen, eine cylindrische Lichtstrahlfläche, deren Schnitt mit einer oder beiden Projektionsebenen der Schatten der Kurve ist.

Man ersieht auch hieraus wieder, daß die Schattenkonstruktion auf der Lehre der Durchdringung beruht, und welche Ähnlichkeit sie mit der schiefen Projektion hat.

Zu den auf den Tafeln 2 und 3 dargestellten Schatten von Punkten, Linien und ebenen Figuren treten noch einige besondere Fälle, die hier aufgeführt werden mögen.

1) Fällt eine Gerade mit der Lichtstrahlrichtung zusammen, so ist ihr Schatten ein Punkt. **Fig. 26a und b.**

2) Fällt eine Gerade mit einer projizierenden Lichtstrahlebene zusammen, so ist ihr Schatten, sofern er auf beide Projektionsebenen zu liegen kommt, eine gebrochene Linie, deren Teile Winkel von 90° bezw. 45° mit der Projektionsachse einschließen. **Fig. 26c und d.** Es entsteht also derselbe Schatten wie in **Fig. 8c** bezw. **9b.**

3) Fällt eine ebene Figur mit einer projizierenden Lichtstrahlebene zusammen, so ist ihr Schatten, sofern er auf beide Projektionsebenen zu liegen kommt, eine gebrochene Gerade, deren Teile Winkel von 90° bezw. 45° mit der Projektionsachse einschließen. **Fig. 26e und f.** Es entsteht also derselbe Schatten wie in **Fig. 26c und d,** als auch wie in **Fig. 8c** bezw. **9b.**

Das über die Lichtstrahlflächen von Linien Gesagte kommt selbstverständlich auch vor, wenn der schattenwerfende Gegenstand ein Körper ist.

Sind bei einem Körper, **Fig. 27a,** sämtliche schattenwerfende Kanten gerade Linien, so bilden ihre Lichtstrahlebenen ein Prisma, dessen Durchschnitt mit den Projektionsebenen der Schatten des Körpers ist.

Bei einem Cylinder, **Fig. 27b,** berühren die Lichtstrahlen dessen Mantelfläche in zwei Mantellinien A C und B D, bilden also zwei Lichtstrahlebenen A C I a und

B D II b, während die Lichtstrahlen, die durch den rechten, oberen Bogen A B hindurchgehen, eine cylindrische Lichtstrahlfläche A B b a erzeugen. Die beiden Mantellinien A C und B D, in welchen der Cylinder von den Lichtstrahlen berührt wird, sind seine Kernschattenlinien, und sind deren Schlagschatten C I und D II bezw. I a und II b unter sich bezüglich parallel.

Der Kegel in **Fig. 27c** wird von den Lichtstrahlen in zwei Mantellinien A S und B S berührt. Es entstehen dadurch zwei Lichtstrahlebenen, A S I s„ und B S I s„. Die beiden Mantellinien A S und B S bilden den Kernschatten des Kegels, und sind deren Schlagschatten A I und B I, bezw. I s„ und II s„ unter sich nicht parallel. Sie schneiden sich in s, bezw. in s„; dieses sind die Durchgangspunkte des Lichtstrahls von der Spitze S mit dem Grundriß, bezw. Aufriß.

Schnitte projizierender Lichtstrahlebenen. Um zu erkennen, welche Flächen eines Körpers beleuchtet sind, und welche sich im Schatten befinden, legt man am einfachsten durch den Körper eine projizierende Lichtstrahlebene zum Grundriß. Die Grundrißspur dieser lotrechten Lichtstrahlebene fällt mit dem Lichtstrahlgrundriß l, zusammen. **Fig. 28 bis 30.**

Der Schnitt der projizierenden Lichtstrahlebene mit dem Körper ist in den Figuren auf der Tafel 5 durch Schraffur hervorgehoben.

In **Fig. 28a** wird das vierseitige Prisma durch die lotrechte Lichtstrahlebene in dem Viereck 1·2·3·4 geschnitten. Aus dem Aufriß dieses Viereckes und den Lichtstrahlen l„ ersieht man, daß dieselben die Seiten 1·4 und 1·2 beleuchten, weshalb auch die entsprechenden Seitenflächen des Prismas beleuchtet sind. Die Seiten 2·3 und 3·4 werden von den Lichtstrahlen l„ nicht getroffen, liegen also, wie auch die zugehörigen Seitenflächen, im Schatten. Ferner erkennt man, daß die Punkte 2 und 4, als auch die durch sie hindurchgehenden Seitenkanten, Schatten werfen müssen. Die in **Fig. 28b und c** gezeichneten Prismen stehen im Grundriß auf, und können aus diesem Grund ihre Aufstandsflächen keine Schatten werfen.

Der Schnitt des Prismas in **Fig. 28b** mit der projizierenden Lichtstrahlebene ist ein Dreieck, dessen eine Seite 2·3 mit der Richtung der Lichtstrahlen l„ zusammenfällt. Diese Seite 2·3, wie auch die entsprechende Seitenfläche des Prismas liegen in der Richtung der Lichtstrahlen, befinden sich also im Streiflicht.

Bei dem Prisma in **Fig. 28c** ergiebt sich aus dem Schnittdreieck 1·2·3, daß die Seiten 1·2 und 2·3, als auch demnach die entsprechenden, oberen Seitenflächen des Prismas beleuchtet sind. Der kleinere Schnitt 4·5·6·7 durch das Prisma ist so gewählt, daß die eine seiner Ecken 6 auf der rechten oberen Seite des hinteren Dreiecks liegt. Da nun der Punkt 6 Schatten wirft, so gilt dies auch von der Dreiecksseite des Prismas, auf welcher er sich befindet.

In ganz ähnlicher Weise kann das eben angedeutete Verfahren auch bei anderen Körpern benutzt werden.

Soll bei dem Cylinder in **Fig. 29** erörtert werden, in welcher Beziehung seine Mantelfläche zu den Lichtstrahlen steht, so wird durch ihn wiederum eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt. Der Schnitt dieser Ebene mit dem Cylinder ist eine Ellipse, die sich im Aufriß als Kreis projiziert. Dieser Kreis wird von den Lichtstrahlaufrissen l„ in den beiden Punkte b_2 berührt und demnach auch der Cylinder. Durch die Punkte b_2 sind die Mantellinien des Cylinders bestimmt, die im Kernschatten liegen. Der Teil b_2 h b_2 des Cylindermantels liegt lichtzugewendet, ist also hell, der andere Teil b_2 d b_2 ist lichtabgewendet, also dunkel.

Von der in **Fig. 30** gezeichneten Kugel ist klarzulegen, in welcher Beziehung die Lichtstrahlen, die sich nach l_1 projizieren, zur Kugeloberfläche stehen. Es wird zu diesem Behuf durch l_1 eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt. Dieselbe schneidet die Kugel in einem Kreis, welcher sich im Aufriß als die anschraffierte Ellipse darstellt. Die Lichtstrahlaufrisse l_2 berühren die Ellipse in den beiden Punkten b_2 und demnach auch die Kugel. Beide Punkte sind Kernschattenpunkte der Kugel.

Die genaue Ermittelung der Punkte b_2 hängt besonders von der genauen Zeichnung der Schnittellipse ab. Sicherer und schneller können die Berührungspunkte b durch folgendes Verfahren bestimmt werden. Man nimmt zu der lotrechten Lichtstrahlebene durch l_1 (**Fig. 30**) eine parallele Ebene an, welche den Grundriß in der Achse G G schneidet. Auf diese neue, dritte Projektionsebene projiziert man sodann den Schnittkreis der Kugel mit der lotrechten Lichtstrahlebene, als auch die Lichtstrahlen selbst. Darauf dreht man die neue Projektionsebene mit dem auf ihr befindlichen Schnittkreis und den Lichtstrahlaufrissen l_3 um die Achse G G so lang, bis sie in den Grundriß zu liegen kommt. Die Lichtstrahlen l_3 ergeben die Berührungspunkte b_3 mit dem, in der Figur unten rechts befindlichen, anschraffierten Schnittkreis. Durch Zurückdrehen und weiteres Projizieren erhält man dann die Punkte b_1 und b_2.

Bezüglich der Projektionen auf der neuen Projektionsebene ist zu bemerken, daß der Mittelpunkt m_3 des Schnittkreises dieselbe Höhenlage hat, wie der Kugelmittelpunkt m_2; ferner, daß die Lichtstrahlen l_3 mit der Achse G G keine Winkel von 45°, sondern den Neigungswinkel γ der Lichtstrahlen einschließen. Die Berührungspunkte b_3 befinden sich auf den wagerechten Kugelkreisen P_u und P_o, die ihrerseits parallel zum Kugeläquator A A liegen.

Nach **Fig. 31** ist dieselbe Aufgabe mit einer Kugel gelöst durch eine projizierende Lichtstrahlebene zum Aufriß, die durch l_2 geht. Die Lösung ist ähnlich der eben besprochenen eine doppelte. Die Berührungspunkte b_1 ergeben sich aus den Lichtstrahlen l_1 und der Schnittellipse, oder aus den Lichtstrahlen l_3 und dem Schnittkreis.

e) Schlag- und Kernschatten von Körpern. (Taf. 6 bis 8.)

Der Schlagschatten der auf den Tafeln 6 bis 8 dargestellten Körper ist parallel zur Projektionsachse, der sichtbare, im Schatten liegende Teil der Körper dagegen senkrecht zu dieser Achse schraffiert.

Prisma, Cylinder, Pyramide und **Kegel.** Die Konstruktion der Schatten von Körpern ist, wenn dieselben selbst einfache sind und eine einfache Lage zu den Projektionsebenen haben, wie es in den praktischen Anwendungen meistens der Fall ist, ohne sonderliche Schwierigkeiten. Man überlege, welche Kanten von den Körpern Schatten werfen können und erhält mit Konstruktion der Schatten dieser Kanten den Schlagschatten des Körpers. Z. B. in **Fig. 32** ersieht man sofort aus dem Grundriß, daß die Flächen I·II·1·2, II·III·2·3 und 1·2·3·4 des Würfels beleuchtet sind und demnach die Kanten I·1, 1·4, 4·3 und 3·III schattenwerfende sind. Der Schlagschatten des Würfels ist das Vieleck I·k·s_1·s_4 k·s_3 III·IV·I.

Bei dem Cylinder in **Fig. 36a** wird der Schlagschatten erzeugt durch die beiden Mantellinien I.1, 5·V und den Kreisbogen 1·2·3·4·5. Der Schlagschatten des Cylinders in **Fig. 36b** entsteht durch den Schatten der beiden Mantellinien I·1, 5·V, des hinteren Kreisbogens I·VIII·VII.VI·V und des vorderen Kreisbogens 1·2·3.4·5. Nach **Fig. 37** ist der Schlagschatten eines Cylinders mit Hilfe des Seitenrisses gefunden.

Der Schlagschatten der Pyramide in **Fig. 38** ist derselbe wie der des Dreieckes

1 · s · 3. Die Knickpunkte k_1 und k_3 werden am sichersten erhalten, indem man sich den Schatten s'_s der Spitze s auf den verlängerten Grundriß konstruiert; sie sind dann der Schnitt der Schatten $1 s'_s$ und $3 s'_s$ mit der Projektionsachse.

Der Schatten des Kegels in **Fig. 39** wird erhalten, indem zuerst der Schlagschatten s'_s der Spitze s auf dem verlängerten Grundriß gesucht wird. Hierauf zieht man von s'_s die Tangente $l s'_s$ und $r s'_s$ an den Grundrißkreis des Kegels und erhält damit die Berührungspunkte l und r. Die Verbindungslinien von l bezw. r mit s, sind Mantellinien und zugleich der Kernschatten des Kegels. Der Schlagschatten des letzteren ist der des Dreieckes l s, r.

Der Winkel β, welchen die Grundrisse der Kernschattenlinien einschließen, hängt ab von dem Spitzenwinkel α des Kegels bei $s_{,,}$, er kann nie 180° sein, sondern ist immer kleiner. In den beiden Punkten l und r, können nicht, wie bei dem Cylinder z. B. in **Fig. 36a** an I und V Tangenten an den Grundkreis gezogen werden, welche mit den Grundrissen der Lichtstrahlen zusammenfallen. Stellt man sich vor, die Spitze des Kegels in **Fig. 39** sänke nach und nach tiefer, so würden sich gleichzeitig die Punkte r und l nähern und schließlich einmal zusammenfallen. Ein Kegel, bei welchem dies zutrifft, ist in **Fig. 40a** gezeichnet, derselbe hat nur eine Kernschattenlinie s, s_s. Sinkt die Spitze des Kegels noch tiefer, (**Fig. 40b**) so ist überhaupt ein Kernschatten nicht mehr möglich, und wird die gesamte Mantelfläche des Kegels beleuchtet.

Die Konstruktion des Schattens eines Kegels, welcher nicht im Grundriß aufsteht, ist aus **Fig. 41** zu ersehen. Zur Erhaltung der Kernschattenpunkte wird vom Grundkreis des Kegels der Schatten auf den Grundriß konstruiert.

Kugel. Wie der Schlagschatten beim Cylinder und Kegel aus ihrem Kernschatten gefunden wird, so ist es auch bei der Kugel. Der Konstruktion des Kernschattens der Kugel liegt folgende Betrachtung zu Grunde. Die Lichtstrahlen, welche den Kernschatten erzeugen, bilden in ihrer Gesamtheit einen Cylinder. Dieser sogen. Lichtstrahlcylinder berührt mit seinem Normalkreis die Kugel in einem größten Kreis, welcher der Kernschatten ist. Da nun der Lichtstrahlcylinder zu beiden Projektionsebenen schräg steht, so stellt sich der Kernschatten im Auf- und Grundriß als Ellipse dar.

Die Konstruktion auf Tafel 7 wird zurückgeführt auf den Fall in **Fig. 30.** Man bildet von der Kugel und dem Lichtstrahlcylinder eine neue dritte Projektion. Dieselbe befindet sich auf einer Projektionsebene, welche parallel zum Lichtstrahlgrundriß l_1 gerichtet ist und senkrecht zum Grundriß steht. Der Schnitt der neuen Projektionsebene mit dem Grundriß ist die Gerade G G. Um diese Gerade wird nun die neue Projektionsebene mit der auf ihr befindlichen Projektion der Kugel und des Lichtstrahlcylinders gedreht, bis sie in den Grundriß zu liegen kommt, siehe **Fig. 44.** Der Lichtstrahlcylinder bildet mit seiner, durch den Kugelmittelpunkt m_3 gehenden Achse L und der Achse G G den Neigungswinkel γ der Lichtstrahlen. Der Berührungskreis von Kugel und Lichtstrahlcylinder ist die Gerade $1 \cdot m_3 5$.

Die Punkte 1 und 5 dieses Kreises kommen in dem Grundriß **Fig. 43** auf die projizierende Lichtstrahlebene, die durch l_1 geht, zu liegen. Auf dem Äquator A A, **Fig. 44,** befinden sich die Kreispunkte 3 und 7, die sich im Grundriß ebenfalls auf dem Äquator projizieren müssen. Soll nun weiter von einem beliebigen Kreispunkt, z. B. 8, auf $1 \cdot m_3 \cdot 5$ liegend, der Grundriß gewonnen werden, so geschieht dies, indem man durch ihn einen wagerechten Parallelkreis P_u legt. Genannter Kreis erscheint im Grundriß in seiner wahren Größe und wird auf ihm durch das Ziehen der Senkrechten 8 · 8 zur Achse G G der Grundrißpunkt 8 gefunden. Auf diese Weise können im Grundriß **Fig. 43** so viel Ellipsenpunkte gefunden werden, als zum genauen Zeichnen dieser Kurve erforderlich ist.

Die gewonnenen Grundrißpunkte der Ellipse in **Fig. 43** werden in dem Aufriß **Fig. 42** mit Hilfe der Ordinaten und Parallelkreise P konstruiert.

Man sieht aus den Figuren, daß die beiden Kernschatten-Ellipsen im Grund- und Aufriß kongruent sind. Ihre großen Achsen sind 3 · 7 bezw. g · g, ihre kleinen die Linien 1 · 5 bezw. k · k. Die tiefsten und höchsten Punkte 1 und 5 des Kernschattens bestimmen sich im Aufriß durch die Parallelkreise P_t und P_h, deren Entfernung b vom Äquator A A aus **Fig. 44** zu entnehmen ist.

Nachdem die Projektionen des Kernschattens gefunden sind, ist der Schlagschatten der Kugel zu konstruieren. Derselbe ist der Schlagschatten der Kernschattenellipsen. Die Konstruktion der Schlagschatten-Ellipsen ist aus der Figur zu ersehen.

Ring, Fig. 45. Die Kernschattenpunkte s und σ, die ein beliebiger Lichtstrahl l auf der Ringfläche hervorruft, sind die Berührungspunkte dieses Lichtstrahles mit der Ringfläche. Zur Konstruktion dieser Punkte kann durch den Lichtstrahlgrundriß l_1 eine projizierende Lichtstrahlebene gelegt werden, deren Schnitt mit der Ringfläche im Aufriß durch Schraffur hervorgehoben ist. Die Berührungspunkte der Lichtstrahlrichtungen l_2 an diese Schnittfigur sind die Aufrisse $s_{\prime\prime}$ und $\sigma_{\prime\prime}$ der gesuchten Kernschattenpunkte, ihre Grundrisse s, und σ_1 liegen auf l_1. Durch mehrfaches Wiederholen dieses Verfahrens können die Kernschattenkurven gezeichnet werden.

Einfacher und genauer findet man den Kernschatten beim Ring mit Hilfe des Kernschattens einer Kugel nach Tafel 8. Den Ring (**Fig. 46 und 47**) kann man sich entstanden denken durch eine Kugel, deren Mittelpunkt sich auf dem Kreis m_1, m_2 ..... m_8 bewegt. An die rotierende Kugel ist der Kernschatten konstruiert worden, ihr Grund- und Aufriß sind in **Fig. 48 und 49** dargestellt. Von der rotierenden Kugel sind in dem Grundriß des Ringes (**Fig. 47**) acht Lagen gezeichnet. In jeder Lage berührt sich die Kugel mit der Ringfläche in einem lotrechten Meridiankreis. Sie haben also in jeder Lage einen Meridiankreis gemeinsam und ebenso die auf diesem Kreis befindlichen Kernschattenpunkte. Da nun aus **Fig. 48**, dem Grundriß der Kugel, bekannt ist, wo die Kernschattenpunkte eines jeden Meridianes liegen, können diese Punkte ohne weiteres nach **Fig. 47**, dem Grundriß des Ringes übertragen werden. So entspricht z. B. der Ringmeridian 2 M 6 dem Kugelmeridian 2 m 6, von welch' letzterem die Kernschattenpunkte 2 und 6 sind. Beide Punkte 2 und 6 haben gleiche Entfernung von m, dieselbe wird in **Fig. 47** von m_2, bezw. m_6 radial nach 2 und II, bezw. VI und 6 abgetragen, womit 4 Kernschattenpunkte des Ringes erhalten werden.

Der Ring wird von den Lichtstrahlen in einer äußeren und einer inneren Kernschattenkurve berührt. Die erstere ist mit arabischen, die andere mit römischen Zahlen bezeichnet.

Mit Hilfe des Kugelaufrisses **Fig. 49** ist man nun imstande, auch den Aufriß der Kernschattenkurven des Ringes in **Fig. 46** zu finden. Den Abstand, den die Kernschattenpunkte der Kugel von ihrer Äquatorebene A A haben, besitzen auch die entsprechenden Punkte der Kernschattenlinie des Ringes von der Äquatorebene A A des letzteren.

Die Konstruktion des Schlagschattens ist auf der Tafel mit angegeben.

3. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlagschatten auf beliebige Flächen.

Bei den bisherigen Aufgaben wurde immer nur der Schlagschatten auf die Projektionsebenen konstruiert, während er im Folgenden auf ganz beliebigen Flächen gefunden werden soll.

Auf den zu diesem Kapitel gehörenden Tafeln 9 bis 12 ist der Deutlichkeit halber von der schattenaufnehmenden Fläche der Schlagschatten auf die Projektionsebenen nicht dargestellt worden.

a) Schlagschatten von Punkten. (Taf. 9.)

Der Schatten eines **Punktes** mit irgend einer Fläche ist der Durchgangspunkt seines Lichtstrahles mit dieser Fläche.

Diese Aufgabe löst man am besten mit lotrechten Lichtstrahlebenen. Ist z. B. vom Punkt p in **Fig. 50b** der Schatten auf dem Dreieck 1·2·3 zu suchen, so wird durch den Grundriß seines Lichtstrahles eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt, welche das Dreieck in der Linie a b schneidet. Der Schnittpunkt $p_{s''}$ dieser Linie mit dem Lichtstrahlaufriß ist die zweite Projektion des Schattens, die erste Projektion ps, ist durch die Ordinate aus $p_{s''}$ bestimmt. In derselben Weise sind auf Tafel 9 sämtliche Schatten konstruiert; nur in **Fig. 50c** ist die Lichtstrahlebene ausnahmsweise einmal senkrecht zum Aufriß gelegt worden.

Da der Schatten der Punkte mittels Schnitten von Lichtstrahlebenen gefunden wird, bezeichnet man dieses Verfahren mit Schnittmethode.

Nach **Fig. 50a bis c**, in welchen der Schatten auf ebene Flächen fällt, reihen sich in **d** und **e**, sowie in **Fig. 51a** Aufgaben mit Cylinderflächen an. Auch bei diesen ist zur Auflösung dieselbe Methode angewendet. Soll z. B. auf dem schrägen Cylinder in **Fig. 51a** vom Punkt p der Schatten gefunden werden, so wird durch den Lichtstrahl aus p eine lotrechte Ebene gelegt. Diese Ebene schneidet den Cylinder in einer Ellipse, deren Aufriß mit Hilfe des umgeklappten Normalschnittes, d. i. der anschraffierte Kreis im Grundriß, gezeichnet wird. Der Schnitt des Lichtstrahlaufrisses aus p'' mit der Ellipse ist der Schattenpunkt ps'', der Grundriß ps, ergiebt sich sofort durch Projektion.

Der Schatten eines Punktes auf einer Kegelfläche (**Fig. 51b**), auf einer Kugelfläche (**Fig. 51c**) und endlich auf einer Ringfläche (**Fig. 51d**) wird ebenfalls mit Benutzung von lotrechten Lichtstrahlebenen konstruiert. Bei der Kugelfläche sind noch zwei andere Lösungen mit angegeben. Nach der einen wurde durch den Punkt eine projizierende Lichtstrahlebene zum Grundriß gelegt, nach der anderen eine solche zum Aufriß. Die Schnittkreise dieser Ebenen mit der Kugel, der Punkt und der von diesem ausgehende Lichtstrahl wurden, wie bei **Fig. 30 und 31** besprochen, auf eine neue dritte Projektionsebene projiziert, wodurch sich in dieser die Schattenpunkte $p_{s'''}$ ergeben und aus diesen schließlich $p_{s'}$ und $p_{s''}$.

b) Schlagschatten von Linien. (Taf. 10.)

Die Lösung derartiger Aufgaben beruht auf zwei- oder mehrmaliger Anwendung des eben besprochenen Verfahrens der Schnittmethode.

Die Schatten der Linien sind in den Figuren auf Tafel 10 zum Unterschied von den Projektionen kräftig ausgezogen.

In den **Fig. 52a bis e** sind Schatten von Geraden auf ebene Figuren, in f der Schatten von einer Kurve auf ein Dreieck konstruiert. Im letzten Fall ist es notwendig, zum genauen Verzeichnen der Schattenkurve Zwischenpunkte z zu verwenden. Dasselbe ist auch erforderlich bei den **Fig. 53a bis d**, nach welchen der Schatten von Geraden auf Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen fällt.

c) Schlagschatten von ebenen Figuren. (Taf. 11.)

Die Schlagschatten sind durch Schraffur hervorgehoben.

Der Schatten des Kreises in **Fig. 55c** ist der Durchgang des Lichtstrahlcylinders mit dem Viertelkegel und deshalb eine doppelt gekrümmte Kurve.

d) Schlagschatten von Körpern. (Taf. 12.)

Auch bei derartigen Aufgaben gründet sich die Lösung auf die von Punkten.

Der Schlagschatten der Körper ist auf Tafel 12 parallel, der im Schatten liegende Teil des Körpers zum Unterschied dagegen senkrecht zur Projektionsachse schraffiert.

---

4. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten von Körper auf Körper. (Taf. 13 und 14.)

Auf der Tafel 13 sind von einigen Körperzusammenstellungen unter Angabe der Konstruktionslinien die Schlag- und Kernschatten dargestellt. In der unteren Reihe dieser Tafel und auf Tafel 14 befinden sich Konstruktionen der Schlagschatten bei Nischen.

Bei der Cylindernische in **Fig. 60e** wirft der linke, vordere Achtelkreis Schatten auf den Hohlcylinder, die übrigen Punkte des oberen Kreises sind beleuchtet. In **Fig. 61a** ist eine Cylindernische gezeichnet, welche oberhalb durch eine Viertelkugel geschlossen ist. Der Schlagschatten liegt zum Teil auf der Kugel-, zum andern Teil auf der Cylinderfläche. Um vom Punkt p den Schatten zu finden, wird durch ihn eine lotrechte Lichtstrahlebene gelegt, welche die Kugel in einem Kreisbogen und den Cylinder in einer lotrechten Geraden schneidet. Der Kreisbogen stellt sich im Aufriß als Ellipsenbogen dar, der durch Annahme der Horizontalschnitte h konstruiert werden kann. Der Schnitt des Lichtstrahlaufrisses durch p,, mit dem Ellipsenbogen ist der Schatten von p. Der letzte schattenwerfende Punkt t ist der Tangentialpunkt der Lichtstrahlrichtung mit dem Halbkreis der Kugel.

Von der halben Hohlkugel **Fig. 61b** wird der Schlagschatten ebenso wie bei der Cylindernische gefunden. Die letzten schattenwerfenden Punkte t sind die Tangentialpunkte der Lichtstrahlrichtung an den Äquatorkreis der Kugel.

Von der Kegelnische in **Fig. 61c** werden die Tangentialpunkte t gefunden, indem durch einen Lichtstrahl die Kegelspitze S auf die vordere, lotrechte Begrenzungsfläche nach s_1 und s_2 projiziert wird. Durch die Tangenten von s_2 an den größten Nischenkreis erhält man beide t. Der Schatten eines jeden Punktes p wird auch hier wieder durch lotrechte Lichtstrahlebenen ermittelt. Diese Ebenen schneiden den Kegel in Ellipsen.

Der Schatten vom Punkt m kann bequem durch eine projizierende Lichtstrahlebene zum Aufriß konstruiert werden. Dieselbe, durch m gelegt, geht durch die Kegelspitze und schneidet den Kegel in dem Dreieck m S a. Der Schnitt des Lichtstrahles aus m, mit S, a, ist der Schatten von m.

Weitere Nischen mit dem zugehörigen Schlagschatten sind in **Fig. 62 und 63** gezeichnet. In **Fig. 62** sind die Nischen oben durch Cylinderflächen abgeschlossen, **Fig. 63** ist der umgekehrte Fall von **Fig. 61a**.

---

5. Kapitel.

Die Konstruktion der Schlag- und Kernschatten bei Rotationskörpern. (Taf. 15.)

Von dem auf Tafel 15 in **Fig. 64 und 65** gezeichneten Rotationskörper ist zunächst der Kernschatten seines unteren Ringteiles mit Hilfe der Kugel in **Fig. 66** konstruiert worden.

Der Kernschatten am mittleren Teil des Rotationskörpers wird am leichtesten und genauesten mit Benutzung von Tangentialkegeln gefunden. Der Horizontalschnitt h h schneidet den Rotationskörper in einem horizontalen Kreis t t. Diesen Kreis kann man als Grundfläche eines Kegels auffassen, dessen Achse mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfällt, und von welchem die Mantellinien s t die Tangenten in t an der Meridiankurve des Rotationskörpers sind. Dieser Tangentialkegel und der Rotationskörper haben also hiernach den Kreis t t gemein und in diesem gleiche Kernschattenpunkte. Konstruiert man sich nun von dem Tangentialkegel den Schlagschatten s_s seiner Spitze s auf die horizontale Ebene h h, so ergeben sich die im Grundriß gezeichneten Kernschattenlinien T t und T s, deren untere Punkte T auch Kernschattenpunkte des Rotationskörpers sind. Auf diese Weise kann man soviel Punkte der Kernschattenlinie erhalten, als es notwendig ist, diese genau zeichnen zu können.

Auf dem Horizontalkreis **k k** haben die Meridiane des Rotationskörpers lotrechte Tangenten lt, die zusammen einem lotrechten Berührungscylinder angehören, von welchem der Kernschatten ohne weiteres aus dem Grundriß gefunden werden kann. Der Kegel in **Fig. 66 b** hat einen Basiswinkel von 45°, woraus folgt, daß seine Kernschattenlinien t s im Grundriß einen rechten Winkel einschließen. Ein solcher Kegel in **Fig. 64** eingezeichnet, würde den Rotationskörper in dem Kreisbogen, auf welchem die Punkte 5 und 7 liegen, berühren. Die Punkte 5 und 7 selbst haben im Grundriß **Fig. 65** die Lage wie die Punkte t und **t** in **Fig. 66 b**.

Der Schlagschatten, welcher auf den Rotationskörper fällt, rührt her von einem Teil des unteren Grundkreises des oberen Cylinders. Der Punkt O′ von diesem Kreise, welcher auf dem Meridian liegt, welcher mit der lotrechten Lichtstrahlebene zusammenfällt, hat, wie man sofort einsehen wird, einen Schatten o, welcher in der Schlagschattenkurve u P o P u der höchste Punkt ist.

Der Schatten von O′ auf die Rotationsfläche kann nun direkt ermittelt werden. Man denke sich dann den Lichtstrahl, der durch O′ geht, mit dem Meridian 2 s gedreht, bis beide parallel zur Aufrißebene kommen. Der Meridian 2 s deckt sich dann mit dem linken Meridian 3 s. Punkt O′ liegt in O und der Lichtstrahl L bildet mit einer Wagerechten den Neigungswinkel γ. Der Durchschnitt von L mit dem linken Meridian ist der Schatten von O′, der wieder zurückgedreht auf o zu liegen kommt.

Zur Konstruktion weiterer Schlagschattenpunkte P dient folgendes Verfahren. Ein wagerechter Kreis K, Fig. 67, hat seinen Mittelpunkt auf der Kegelachse; es wird nun gefragt, welcher Punkt p der Kreislinie wirft auf den beliebig angenommenen

Horizontalkreis k des Kegels einen Schatten P. Man kann sich aus dem Horizontalkreis k des Kegels einen Lichtstrahlcylinder errichtet denken, welcher die Ebene des großen Kreises K in einem Kreis mit dem Mittelpunkt m k schneidet; der Radius dieses Schnittkeises ist dann derselbe, wie der des auf der horizontalen Ebene k k liegenden. Der große Kreis K und der mit dem Mittelpunkte m_k schneiden sich in zwei Punkten p, die durch Lichtstrahlen auf k zurückprojiziert die beiden Schattenpunkte P ergeben. Auf genau dieselbe Weise und mit derselben Bezeichnung sind bei dem Rotationskörper (**Fig. 64 und 65**) auf dem horizontalen Kreis k k die Schatten P und P der beiden Punkte p des großen Kreises K K gefunden worden. Die unteren Punkte u der Schlagschattenkurve liegen auf den Kernschattenlinien und sind am besten durch Probieren zu finden.

Die Konstruktion des Schlagschattens des Rotationskörpers ist in der Figur angegeben und aus dieser zu verfolgen.

---

6. Kapitel.

Anwendungen. (Taf. 16 bis 23.)

Schatten bei Dächern und Treppen. Auf Tafel 16 und 17 ist eine Reihe von Aufgaben über Gebäudeformen gegeben, wie solche häufig beim Entwerfen vorkommen. Die Konstruktionslinien zur Bestimmung der Schatten sind eingezeichnet. Der Schlagschatten bei Giebeln hängt, wie z. B. aus Vergleich der **Fig. 72b, 73 und 74a** hervorgeht, von der Neigung der Dachflächen ab.

Schatten bei Gesimsen. Die Tafel 18 enthält die Konstruktion der Schatten an einigen öfters vorkommenden Gesimsanordnungen nebst den Konstruktionslinien.

Auf Tafel 19 ist der Schatten an ein Fenster konstruiert. Der Schatten an der Sohlbankskonsole ist in **Fig. 89 und 90**, der von der Spitzverdachung in **Fig. 93** auf Tafel 20 größer dargestellt. **Fig. 91** bringt die Schlagschattenkonstruktion bei einer Architrav-Verkröpfung. **Fig. 92** zeigt den Schatten eines profilierten Quaders, **Fig. 94 und 95** solchen von Füllungen.

Auf der Tafel 21 sind in **Fig. 96 und 97** bei Quaderungen und Sockelgesimsen, endlich in **Fig. 98 und 99** bei einfachen Holzwerken die Schatten konstruiert.

Schatten bei Säulen-Kapitälen und Sockeln. Die Konstruktion der Kern- und Schlagschatten bei diesen aus Rotationskörpern und Prismen gebildeten Kapitälen und Sockeln erfolgt am besten mit der Schnittmethode.

Bei dem toskanischen Kapitäl auf Tafel 22 ist zur Ermittelung von Kern- und Schlagschattenpunkten durch dasselbe die lotrechte Lichtstrahlebene $1,^1$ gelegt. Dieselbe schneidet das Kapitäl in einem Profil, von welchem der Aufriß in der Kapitälansicht gezeichnet ist. Die Lichtstrahlaufrisse an die Eckpunkte 1 und 2 ergeben in ihrem Schnitt mit dem Profil die Schlagschatten I und II. Der Kernschatten 3 ist der Berührungspunkt eines Lichtstrahlaufrisses an die Schnittkurve des Echinus, sein Schlagschatten fällt nach III, in die Cylinderfläche des Kapitälhalses. Der Schatten e_s vom Eckpunkt E des Abakus liegt auf dem Schnitt der lotrechten Lichtstrahlebene $1,^2$ mit dem Kapitäl.

Von den Lichtstrahlschnitten werden soviel aufgetragen, um ein sicheres Zeichnen der Schattenlinien vornehmen zu können.

In derselben Weise wurden die Schatten beim Sockel auf Tafel 23 konstruiert.
