



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

I. Abschnitt. Die stereographische Projektionslehre.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76263](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76263)

I. Abschnitt.

Die stereographische Projektionslehre.

Die Grundlage der stereographischen Projektionslehre.

Um einen Körper perspectivisch darzustellen, muss man vor Allem die Bildebene und die Lage des Augenpunktes, von welchem aus nach den Grenzen des Gegenstandes Sehstrahlen gezogen werden, annehmen. Die Punkte wo diese Strahlen die Bildebene treffen, geben in ihrer Gesamtheit ein Bild des Gegenstandes, welches auch seine Projektion genannt wird. Wollte man auf diese Weise einen Theil der Erdoberfläche perspectivisch darstellen, so würde die Anzahl der auszuführenden Operationen so beträchtlich sein, dass ein schneller Fortschritt der Arbeit unmöglich wäre. Man beschränkt sich daher darauf das Netz der Parallelkreise und Meridiane, welches man sich auf der Erd- oder Himmelskugel gezogen denkt, abzubilden und alsdann die Grenzen der Contiente und Länder, die Strassen, Berge, Flüsse und Seen näherungsweise in dasselbe einzuzeichnen. Dabei kann man die Parallelkreise und Meridiane so nahe an einanderlegen, als die Anforderungen in Bezug auf die Genauigkeit der auszuführenden Karte es nothwendig machen.

Denkt man sich bei der Darstellung einer Kugelfläche die Bildebene und den Augenpunkt der Projektion angenommen, so bilden alle vom Auge nach den Punkten eines Kugelkreises gezogenen Strahlen in ihrer Gesamtheit einen schiefen Kreiskegel, dessen Durchschnitt mit der Bildebene nichts anderes als eine Curve zweiten Grades sein kann.

Die Gleichung dieser Curve wird für den Fall, in welchem die Schnittebene E (Fig. 4) auf der Ebene SAA' die durch die längste und kürzeste Seitenkante des Kegels geht, senkrecht steht, auf folgende Weise erhalten:

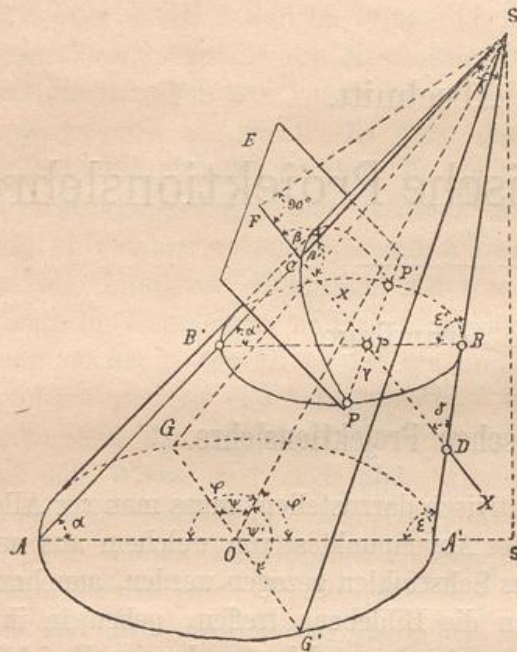


Fig. 4.

In Fig. 4 sei SAA' ein schiefer Kegel, dessen Basis AA' ein Kreis ist, SA seine längste, SA' seine kürzeste Seitenkante, welche mit der Basisebene die Winkel α und ϵ bilden, dann steht zunächst die Ebene SAA', welche durch diese Kanten geht, senkrecht auf der Basisebene AA', denn sie muss durch die Senkrechte Ss gehen, welche man von der Spitze S des Kegels auf die Basisebene zieht.

Legt man nämlich durch die Senkrechte Ss und die Axe SO des Kegels eine Ebene, so schneidet sie die Kegelfläche in der längsten und kürzesten Seitenkante, wie sich dies auf folgende Weise beweisen lässt:

Man lege durch die Axe SO irgend eine andere Ebene SGG', so ist φ' der Winkel, welchen die Gerade SO mit ihrer Projektion bildet und ψ' der Winkel, welchen sie mit der Durchschnittslinie OG' der Ebenen SGG' und AA' einschliesst,

$$\text{und } \varphi' < \psi' \text{ somit } SA' < SG'$$

$$\text{ferner } \varphi > \psi \text{ also } SA > SG$$

was sich auch für irgend eine andere Ebene, die durch SO gelegt wird, beweisen lässt. SA' ist also die kürzeste, SA die längste Seitenkante des Kegels.

Wird nun dieser Kegel durch eine beliebige Ebene E geschnitten, welche auf der Dreiecksebene ASA' senkrecht steht, so ist sein

Durchschnitt mit dieser Ebene die Curve PCP', deren Gleichung abzuleiten ist. Der Einfachheit wegen wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen. Es sei β der Winkel, welchen die Schnittebene mit der längsten Seitenkante SA bildet, γ der Winkel den die längste und kürzeste Seitenkante mit einander einschliessen und $SF = d$ der senkrechte Abstand der Kegelspitze von der Schnittebene. Durch irgend einen Punkt P der Curve lege man eine Ebene BB', welche mit der Basisebene parallel ist und die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da die Ebenen E und BB' auf der Ebene ASA' gleichzeitig senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie PP' auf der Ebene ASA' senkrecht und Pp ist sowohl auf der Geraden BB' als auch auf der Geraden CD senkrecht. Legt man nun in der Ebene E durch den Punkt C ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Abzissenaxe mit CD zusammenfällt, während die Ordinatenaxe mit PP' parallel ist, so ist Cp = x die Abzisse, Pp = y die Ordinate des Punktes P und man hat zwischen diesen Grössen eine Gleichung aufzustellen.

Da BB' ein Kreis ist, so besteht die Gleichung:

$$1) y^2 = B'p \cdot Bp$$

Aus Dreieck B'Cp folgt: $B'p : Cp = \sin B'Cp : \sin \alpha'$

oder da $Cp = x$, $B'Cp = \beta$, und $\alpha' = \alpha$ ist

$$2) B'p = \frac{x \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

ferner folgt aus $\triangle BpD$:

$$Bp : Dp = \sin \delta : \sin DBp$$

oder da $Dp = CD - Cp = CD - x$, ferner $\beta = \gamma + \delta$ also $\delta = \beta - \gamma$ und $DBp = 180^\circ - \epsilon' = 180^\circ - \epsilon = \alpha + \gamma$ ist, so ergibt sich

$$3) Bp = \frac{(CD - x) \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

Substituirt man die Werthe 2) und 3) in Gleichung 1) so erhält man

$$y^2 = \frac{x \sin \beta (CD - x) \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\text{oder } 4) y^2 = \frac{CD \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \cdot x - \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x^2.$$

Den Werth von CD kann man noch durch den senkrechten Abstand $SF = d$ der Kegelspitze von der Schnittebene ausdrücken. Aus dem Dreieck SCD folgt:

$$CD : SC = \sin \gamma : \sin \delta \text{ oder da } \delta = \beta - \gamma \text{ ist}$$

$$CD = \frac{SC \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$$

ferner folgt aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck:

$$SC = \frac{d}{\sin \beta} \text{ und daher}$$

$$CD = \frac{d \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 4) so lautet die Gleichung der Schnittkurve:

$$(I) y^2 = \frac{d \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x - \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} x^2.$$

Diese Gleichung besitzt aber die Form:

$$y^2 = mx - nx^2,$$

welche für positives n die Scheitelgleichung der Ellipse, für negatives n die Scheitelgleichung der Hyperbel und für n = 0 diejenige der Parabel ist. Da nun die Werthe von α , β , $(\alpha + \gamma)$ nie grösser als 180° sein können, so hängt das Zeichen von n einzig von der Grösse $\sin(\beta - \gamma)$ ab. Ist $\sin(\beta - \gamma)$ positiv, d. h. $\beta - \gamma$ positiv, und $\beta > \gamma$, so ist die Curve eine Ellipse,

ist $\sin(\beta - \gamma)$ negativ, d. h. $\beta - \gamma$ negativ und $\beta < \gamma$, so ist sie eine Hyperbel,

und für $\sin(\beta - \gamma) = 0$, d. h. für $\beta - \gamma = 0$ und $\beta = \gamma$ eine Parabel.

Um im ersten und zweiten Falle die Werthe der grossen und kleinen Axe der Curve zu berechnen, vergleiche man die erhaltene Gleichung (I) mit der Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet:

$$(Ia) y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

diejenige der Hyperbel dagegen:

$$y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

In beiden Fällen bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$5) \frac{2b^2}{a} = \frac{d \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \quad (6)$$

(vergleiche Gch. I und Ia)

aus welchen die Werthe von a und b zu ermitteln sind. Es ist

$$7) b^2 = \frac{ad \sin \gamma}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } b^2 = \frac{a^2 \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}.$$

Comparirt man diese Werthe, wobei man die gleichen Grössen auf beiden Seiten weglässt, so ergibt sich:

$$a \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \frac{d \sin \gamma}{2}$$

$$(II) a = \frac{d \sin \gamma}{2 \sin \beta \sin(\beta - \gamma)}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 7) so ist

$$b^2 = \frac{d^2 \sin^2 \gamma}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}$$

$$\text{und (III) } b = \frac{d \sin \gamma}{2 \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}}$$

welcher Werth für $\beta < \gamma$ d. h. für die Hyperbel imaginär ist.

Für den Fall dass die Ellipse in einen Kreis übergeht, ist

$$a = b \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} = \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}}$$

Nimmt man den reciproken Werth dieser Gleichung und quadriert dieselbe, so hat man:

$$\sin^2 \beta \sin^2(\beta - \gamma) = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta - \gamma)$$

$$\text{oder (IV) } \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma).$$

Nun besteht bekanntlich die goniometrische Beziehung:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y \text{ und daher}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\text{somit } \sin \beta \sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\cos \gamma - \cos(2\beta - \gamma)] \text{ und}$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2} [\cos \gamma - \cos(2\alpha + \gamma)]$$

Die Bedingungsgleichung IV lautet nun:

$$\cos \gamma - \cos(2\beta - \gamma) = \cos \gamma - \cos(2\alpha + \gamma) \text{ oder}$$

$$(IVa) \cos(2\beta - \gamma) = \cos(2\alpha + \gamma).$$

Diese Gleichung ist aber richtig für:

$$(V) 2\beta - \gamma = \pm(2\alpha + \gamma) + n \cdot 360^\circ$$

Nimmt man das positive Zeichen, so ergibt sich:

$$2\beta - \gamma = 2\alpha + \gamma + n \cdot 360^\circ \text{ oder}$$

$$2\beta = 2\alpha + 2\gamma + n \cdot 360^\circ$$

$$\beta = \alpha + \gamma + n \cdot 180^\circ; \beta \text{ ist aber immer } < 180^\circ$$

also $n = 0$ und es ist

$\beta = \alpha + \gamma$ die eine Bedingung für welche die Ebene die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da nun, wie aus Fig. 4 ersichtlich $\beta' = 180^\circ - \beta$ und $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ so ist auch $\beta' = \varepsilon$. Es ist aber $\delta = 180^\circ - (\beta' + \gamma)$ und $\alpha = 180^\circ - (\varepsilon + \gamma)$ somit für diesen Fall auch $\delta = \alpha$.

Die Schnittebene E bildet alsdann mit der längsten und kürzesten Kegelkante dieselben Winkel, welche diese Kanten mit der Basisebene einschliessen, und man sagt

die Kegelfläche werde von der Ebene E antiparallel geschnitten.

Nimmt man in Gleich. V das negative Zeichen, so ergibt sich:

$$2\beta - \gamma = -2\alpha - \gamma \mp n \cdot 360^\circ \text{ oder}$$

$\beta = -\alpha \mp n \cdot 180^\circ$. Da β immer kleiner als 180° sein muss, so ist $n = 1$ zu setzen und

$$\beta = 180^\circ - \alpha \text{ oder da } \beta = 180^\circ - \beta' \text{ ist}$$

$$180^\circ - \beta' = 180^\circ - \alpha$$

$$\beta' = \alpha, \text{ d. h. die Schnittebene ist mit der Basis-}$$

ebene parallel. Es gibt also nur zwei Fälle in welchen ein schiefer Kreiskegel von einer auf ASA' senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

Der Satz, dass der Durchschnitt einer Ebene, welche einen schiefen Kegel mit Kreisbasis antiparallel schneidet, immer ein Kreis sein muss, findet sich schon im ersten Buche (Lehrsatz 5) der Conica des Apollonius von Perga und wird derselbe daselbst auf folgende Art bewiesen: Es ist Pp senkrecht auf BB' und CD , (Fig. 4 Seite 8)) und BB' ein Kreis, also:

$$Pp^2 = Bp \cdot B'p$$

Nun ist nach Voraussetzung $\delta = \alpha = \alpha'$ also $\triangle DBp \sim \triangle B'Cp$

und daher $Bp : Cp = Dp : B'p$ somit

$$Bp \cdot B'p = Cp \cdot Dp \text{ und}$$

$$Pp^2 = Cp \cdot Dp$$

Denkt man sich nun die Ebene BB' parallel mit sich selbst verschoben, so wird sich für jeden Curvenpunkt dieselbe Gleichung ergeben, und es ist in Folge dessen diese Curve ein Kreis, dessen Durchmesser die Gerade CD ist.

Schon zur Zeit des Ptolemäus hat man erkannt, dass wenn man bei Darstellungen der Kugeloberfläche die Bildebene durch das Centrum der Kugel gehen lässt und den Augenpunkt im Endpunkte desjenigen Kugelradius annimmt, welcher auf dieser Ebene senkrecht steht, alle Kreise des Globus sich wieder als Kreise projiciren, welche sich unter denselben Winkeln wie die Kugelkreise schneiden.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass bei dieser Annahme die Kegelfläche, welche die vom Augenpunkt nach dem Kugelkreis gezogenen Projektionsstrahlen bilden, durch die Bildebene antiparallel geschnitten wird.

Es sei in Fig. 5 CD die Bildebene, so errichte man im Mittelpunkte M der Kugel eine Senkrechte MO auf die Ebene CD, welche die Kugeloberfläche in O trifft, O wird dann als Augenkpunkt der Projektion angenommen. Ferner sei AB ein beliebiger Kugelkreis und OAB der schiefe Kreiskegel, welcher von der Bildebene CD in der Curve **ab** geschnitten wird. Um zu beweisen, dass diese ein Kreis ist, ziehe man OG und MF senkrecht auf die Ebene AB des Kugelkreises und lege durch OG und die Augenaxe OQ eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise QPD schneidet. In dieser Ebene muss auch die Senkrechte MF liegen, welche durch den Mittelpunkt F des Kugelkreises geht und die Kugel im Pole P dieses Kreises trifft, und endlich befindet sich auch die Axe OF des Kegels in dieser Ebene. Wie oben bewiesen wurde, schneidet aber die durch die Normale OG und die Kegellaxe OF gelegte Ebene den Kegel in der längsten und kürzesten Seitenkante. Es ist also OA die längste, OB die kürzeste Erzeugende der Kegelfläche, und da die Bildebene CD senkrecht steht auf der Ebene OAB des Axendreieckes, so hat man nun die Gleichheit der Winkel OAB und Oba, sowie der Winkel OBA und Oab nachzuweisen.

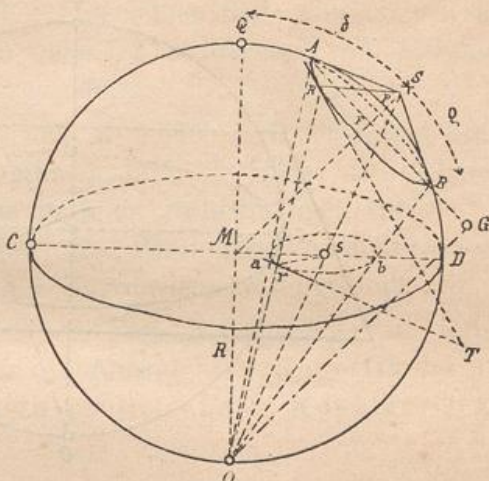


Fig. 5

Es ist der Winkel OAB Peripheriewinkel über Bogen ODB, somit

$$\sphericalangle OAB = \frac{1}{2} (OD + DB) = \frac{1}{2} (90^\circ + BD)$$

ferner nach einem bekannten Satze:

$$\sphericalangle Oba = \frac{1}{2} (OC + BD) = \frac{1}{2} (90^\circ + BD)$$

also $\sphericalangle OAB = \sphericalangle Oba$ und da die Dreiecke OAB und Oab zwei Winkel gleich haben, so ist auch $\sphericalangle OBA = \sphericalangle Oab$.

Der Kegel wird also antiparallel geschnitten, und die Durchschnittskurve ab ist ein Kreis.

Der zweite Theil des Satzes, nach welchem sich die Projektionen zweier Kugeln unter denselben Winkeln schneiden, wie die Kreise selbst, wird auf folgende Weise bewiesen.

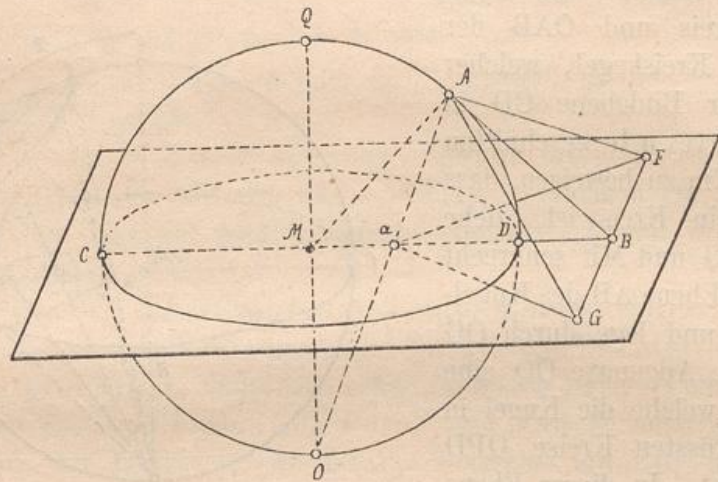


Fig. 6.

Es seien AG und AF (Fig. 6) Tangenten an zwei Kugeln, welche sich im Punkte A schneiden und den sphärischen Winkel FAG einschliessen, und FG die Durchschnittslinie, in welcher die Ebene, die durch die Tangenten gelegt wurde, die Bildebene schneidet; dann sind aF und aG Tangenten an die sich im Punkte a schneidenden Projektionskreise und es ist zu beweisen, dass $\sphericalangle FaG = \sphericalangle FAG$.

Man lege durch die Augenaxe OQ und den Punkt A eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise DAQ schneidet, und ziehe im Punkte A eine Tangente AB an diesen Kreis, die die Durchschnittslinie FG im Punkte B trifft. Da nun die Ebenen AFG und CD auf der Ebene ODAQ gleichzeitig senkrecht stehen, so ist auch ihr Durchschnitt die Gerade FG senkrecht auf der Ebene ODAQ also FG senkrecht auf BA und Ba und die Dreiecke ABF, ABG, aBF, aBG sind bei B rechtwinklig. Ferner ist

$$\sphericalangle OAB = \frac{1}{2} (OD + DA) = \frac{1}{2} (90^\circ + DA)$$

$$\text{und } \sphericalangle AaB = \frac{1}{2} (CO + DA) = \frac{1}{2} (90^\circ + DA) \text{ somit}$$

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle AaB \text{ und } \triangle BAa \text{ gleichschenkelig}$$

$$\text{also } AB = aB$$

Die Dreiecke ABG und aBG sowie die Dreiecke ABF und aBF sind nun congruent und es ist 1) $\sphericalangle GaB = \sphericalangle GAB$

2) $\sphericalangle FaB = \sphericalangle FAB$ also

$GaB + FaB = GAB + FAB$ oder

$GaF = GAF.$

Liegen die Geraden AF und AG auf derselben Seite von AB, so sind die Gleichungen 1) und 2) von einander abzuziehen, im Uebrigen bleibt der Beweis des Satzes unverändert.

Da sich die Parallelkreise und Meridiane auf der Kugel unter rechten Winkeln schneiden, so müssen auch die Bilder dieser Kreise unter sich rechte Winkel bilden und die rechtwinkligen sphärischen Vierecke, welche von den Meridianen und Parallelkreisen eingeschlossen werden, wieder durch rechtwinklige Curvenvierecke dargestellt sein.

Eine andere Eigenschaft dieser Projektionsmethode ist ferner folgende: Denkt man sich an die Kugel eine Kegelfläche gelegt, welche sie längs dem zu projicirenden Kugelkreis AB (Fig. 5) berührt, so ist die Projektion s der Spitze S des Kegels der Mittelpunkt der Projektion ab des Kugelkreises, wie sich auf folgende Art leicht beweisen lässt:

Es sei R ein beliebiger Punkt des Kugelkreises, r seine Projektion, ferner RT eine Tangente an den Kugelkreis im Punkte R und rT ihre Projektion, dann sind RT und die Kegelkante RS Tangenten an die Kugelfläche welche auf einander senkrecht stehen, und da sich nach dem Vorhergehenden

die Projektionen zweier Kugeltangenten unter demselben Winkel schneiden wie die Tangenten selbst, so schliessen die Geraden rT und rs ebenfalls einen rechten Winkel ein. Die Gerade rs geht also durch den Mittelpunkt des Kreises a b, und da diess von jeder anderen Linie

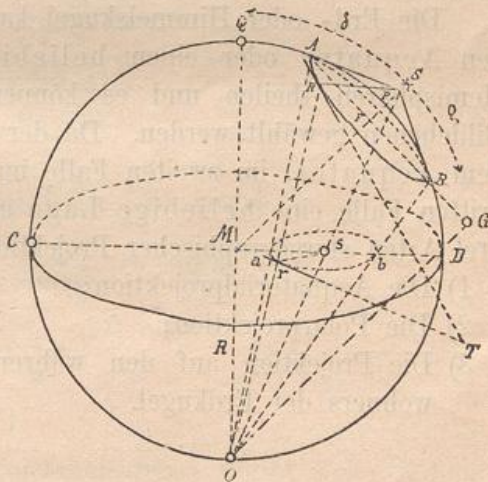


Fig. 5.

rs auch gesagt werden kann, so muss der Punkt s der Mittelpunkt des Kreises a b sein.

Man nennt solche Projektionen, bei welchen die Bildebene durch den Mittelpunkte der Kugel geht und der Augenpunkt im Endpunkt des auf dieser Ebene senkrechten Kugelradius liegt: stereographische Projektionen.

Wie schon erwähnt, werden dieselben hauptsächlich zur Darstellung ganzer Kugelhemisphären angewandt und nennt man die Gesammtheit zweier Hemisphären, welche nach dieser Methode abgebildet werden: Weltkarte. Bei einer solchen Karte sind nur die in ihrer Mitte liegenden Theile in den richtigen Verhältnissen dargestellt, während die übrigen Parthien an Ausdehnung zunehmen, je weiter sie vom Centrum der Karte abstehen. Dieses Wachsthum kömmt von der Schiefe der Sehstrahlen her, welche um so bedeutender wird, je weiter sich die Strahlen von der optischen Axe entfernen. Es folgt hieraus, dass man bei Weltkarten nicht für die ganze Karte denselben Massstab anwenden darf. (Ueber die Bestimmung des Vergrößerungsverhältnisses für verschiedene Theile der Karte siehe das Capitel über die conformen Abbildungen.)

Die Erd- oder Himmelskugel kann man durch einen Meridian, den Aequator oder einen beliebigen grössten Kreis in zwei Hemisphären theilen und es können die Ebenen dieser Kreise als Bildebenen gewählt werden. Da der Augenpunkt im ersten Falle auf dem Aequator, im zweiten Falle im Pole der Kugel liegt und im dritten Falle eine beliebige Lage auf der Kugel besitzt, so gibt es drei Arten stereographischer Projektionen der Kugeloberfläche:

- 1) Die Aequatorialprojektion;
- 2) Die Polarprojektion;
- 3) Die Projektion auf den wahren Horizont eines beliebigen Bewohners der Erdkugel.

Ableitung der allgemeinen Formeln auf welchen die Construction stereographischer Netze beruht.

Es sei CD (Fig. 5) die Bildebene, O der Augenpunkt und OQ die Augenaxe, ferner AB ein beliebiger Kugelkreis, dessen Projektion ab gesucht ist, und P der Pol dieses Kreises. Legt man durch die Augen-

axe OQ und den Pol P des Kreises eine Ebene, so steht diese senkrecht auf der Bildebene und es ist die Projektion des Kreises CQPD die gerade Linie CD. Ist P der eine Pol der Erd- oder Himmelskugel, so nennt man diesen Kreis, resp. seine Projektion CD den Hauptmeridian des Kartennetzes.

Um den Kreis AB auf der Kugelfläche zu bestimmen, sei die Entfernung QP = δ seines Poles vom Gegenpunkte Q des Auges und der Bogenhalbmesser PA = ϱ des Kreises, ferner der Radius R der Kugel gegeben. Aus diesen Werthen lässt sich dann für den Projektionskreis ab, die Entfernung Ms = d seines Mittelpunktes s vom Centrum der Karte, sowie der Radius as = r des Kreises ermitteln.

In Fig. 5 ist QB = $\delta + \varrho$; QA = $\delta - \varrho$

ferner \sphericalangle QOB = $\frac{1}{2}(\delta + \varrho)$; QOA = $\frac{1}{2}(\delta - \varrho)$

Mb = OM . Tg QOB; Ma = OM Tg QOA

$e' = R \cdot \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho)$; $e = R \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$ (I)

Ist $\varrho > \delta$, so ist $e = R \text{Tg } \frac{1}{2}(\varrho - \delta)$ (Ia)

in welchem Falle jedoch e vom Punkte M aus auf die andere Seite von CD aufzutragen ist. Ferner ergibt sich:

$$Ms = d = Ma + as = Ma + \frac{ab}{2} = \frac{2Ma + ab}{2}$$

$$\text{oder } d = \frac{Ma + (Ma + ab)}{2} = \frac{Ma + Mb}{2}$$

$$d = \frac{R}{2} \left[\text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho) + \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) \right]$$

oder da $\text{Tg } \alpha + \text{Tg } \beta = \frac{\text{Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Cos } \alpha \text{Cos } \beta}$, so ergibt sich

$$d = \frac{R \text{Sin } \delta}{2 \text{Cos } \frac{\delta + \varrho}{2} \text{Cos } \frac{\delta - \varrho}{2}} \text{ (II) oder}$$

$$d = \frac{R \text{Sin } \delta}{\text{Cos } \delta + \text{Cos } \varrho} \text{ (IIa)}$$

Der Werth des Radius as des Projektionskreises ergibt sich wie folgt:

$$as = r = \frac{ab}{2} = \frac{Mb - Ma}{2}$$

$$r = \frac{R}{2} \left[\text{Tg } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) - \text{Tg } \frac{1}{2}(\delta - \varrho) \right]$$

oder da $\text{Tg } \alpha - \text{Tg } \beta = \frac{\text{Sin } (\alpha - \beta)}{\text{Cos } \alpha \text{Cos } \beta}$

$$r = \frac{R \text{Sin } \varrho}{2 \text{Cos } \frac{1}{2}(\delta + \varrho) \text{Cos } \frac{1}{2}(\delta - \varrho)} \text{ (III) oder } r = \frac{R \text{Sin } \varrho}{\text{Cos } \delta + \text{Cos } \varrho} \text{ (IIIa)}$$

Die Gleichungen I, II, III sind die Fundamentalformeln, nach welchen für jeden Kugelkreis seine stereographische Projection berechnet werden kann. Obgleich zwei dieser Gleichungen genügen, um die zur Construction eines Kreises nöthigen Elemente zu berechnen, so ist es doch zweckmässig mittelst einer 3. Gleichung eine Controlle auszuüben, durch welche allfällige Rechnungsfehler leicht aufgefunden werden. Aus den Gleichungen IIa und IIIa folgt noch:

$$d : r = \sin \delta : \sin \varrho \quad (\text{IV})$$

welche Proportion demselben Zwecke dienen kann.

Im vorliegenden Falle lag der Pol P des Kugelkreises auf dem Hauptmeridiane der Kugel, welcher sich als gerade Linie projicirt. Besitzt nun der Kugelkreis DD' wie in Fig. 7 eine beliebige Lage, so müssen zu seiner Bestimmung folgende Werthe gegeben sein:

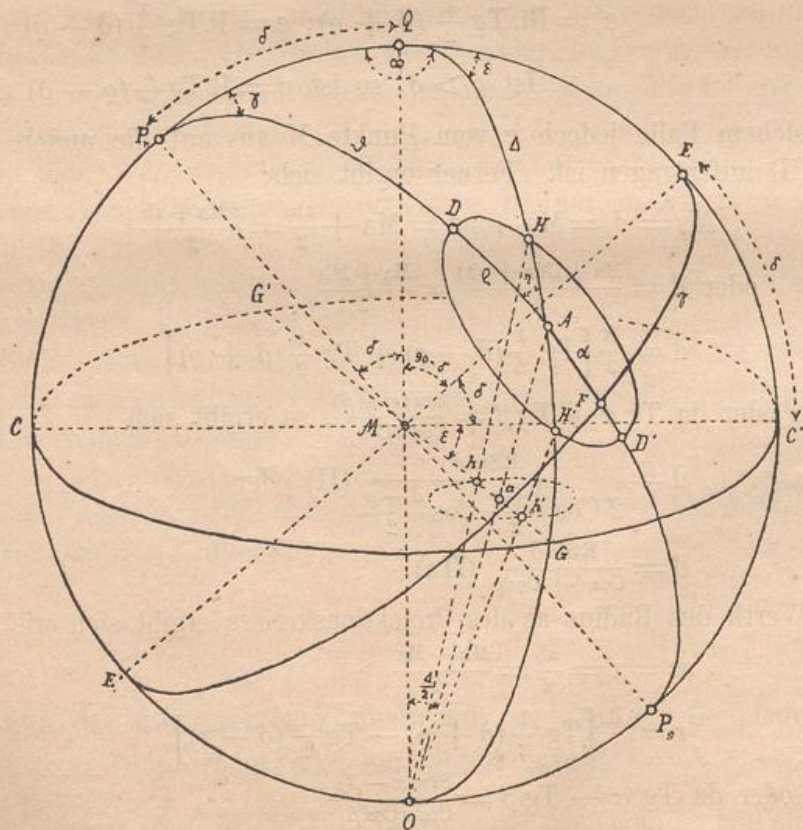


Fig. 7.

Die Distanz $P_n Q = \delta$ des Erd- oder Himmelspoles vom Gegenpunkte Q des Auges, der Winkel γ , welchen der Meridian $P_n \dot{A} P_n$ der durch den Pol des gegebenen Kreises geht mit dem Hauptmeridiane $P_n Q P_n$ bildet, derselbe wird wie bekannt durch den Bogen EF des Aequators gemessen. Ferner muss noch der Abstand $AF = \alpha$ des Poles A des Kugelkreises vom Aequator und der Bogenhalbmesser $AD = \rho$ des Kreises bekannt sein.

Legt man durch die Augenaxe OQ und den Pol A des Kugelkreises eine Ebene, so steht diese auf der Bildebene senkrecht und schneidet die Kugel in dem grössten Kreise QAO , welcher sich als gerade Linie MG projicirt. Zieht man die Projektionsstrahlen OH und OH' , so schneiden sie die Gerade MG in den Punkten h und h' und da HH' ein Durchmesser des Kugelkreises ist, so muss auch hh' ein Durchmesser seiner Projektion sein. Vor Allem hat man nun den Winkel $C'MG = \varepsilon$ zu berechnen, welchen die Gerade MG , auf der der Mittelpunkt des Kreises hh' liegt, mit dem Hauptmeridiane MC' einschliesst. Es ist aber

$$\varepsilon = \sphericalangle GQC' = 180^\circ - \omega.$$

Der Winkel ω ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $AP_n Q$, von welchem zwei Seiten $P_n Q = \delta$ und $P_n A = 90^\circ - \alpha = \vartheta$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben sind. Nach den Nepersehen Analogien ist

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\omega + \eta) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\vartheta - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\omega - \eta) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (\vartheta - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega + \eta) + \frac{1}{2} (\omega - \eta) \text{ (VI)}$$

Nachdem mit Gleich VI ω berechnet ist, ergibt sich $\varepsilon = 180^\circ - \omega$. Man kann statt dessen auch zuerst die Seite $AQ = \mathcal{A}$ mittelst des Cosinussatzes und alsdann den Winkel ω mit dem Sinussatze berechnen.

$$\cos \mathcal{A} = \cos \delta \cos \vartheta + \sin \delta \sin \vartheta \cos \gamma \text{ oder}$$

$$\cos \mathcal{A} = \cos \delta \sin \alpha + \sin \delta \cos \alpha \cos \gamma \text{ (Va)}$$

$$\text{ferner ist } \sin \omega = \frac{\sin \gamma \sin \vartheta}{\sin \mathcal{A}} = \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\sin \mathcal{A}} \text{ (VIa)}$$

$$\text{und } \varepsilon = 180^\circ - \omega \text{ (VII)}$$

Macht man im Entwurfe des Kartennetzes den Bogen $C'G = \varepsilon$, so ist die Richtung der Geraden MG bestimmt und man berechnet nun nach Gleichung (I) (II) (III) die Werthe von $Mh = e$, $Mm = d$ und $hm = r$. (m ist der Mittelpunkt des Projektionskreises).

Wir wollen nun die einzelnen Projektionsarten der stereographischen Projektionsmethode betrachten und die erhaltenen Gleichungen auf spezielle Fälle anwenden.

I. Projektion auf den Meridian.

(Stereographische Aequatorialprojektion.)

Anwendung derselben auf die Konstruktion von Planigloben und Sternkarten.

(Siehe Fig. 8 und 9.)

Es sei $P_n H P_s G$ die Erd- oder Himmelskugel, $P_n' H' P_s' G'$ ihre horizontale, $P_n'' H'' P_s'' G''$ ihre vertikale Projektion*), so denke man sich die Kugel in eine solche Lage gebracht, dass ihre Axe auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht und die Ebene des nullten Meridianes $P_n H P_s G$, welcher bei Darstellungen der Erdkugel gewöhnlich durch die Insel Ferro gelegt wird, mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Nimmt man die Ebene des 0^{ten} Meridianes als Bildebene an, so liegt das Auge im Punkte 0 des Aequators. Die Augenaxe OQ steht im vorliegenden Falle senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene und in dieser projicirt sich das stereographische Bild der Halbkugel, welches in der Ebene $P_n H P_s G$ liegt, in der wahren Grösse.

Um das stereographische Bild irgend eines Parallelkreises $BCDE$ zu erhalten, betrachte man die zweite vertikale Projektion der Kugel, in welcher die Bildebene als gerade Linie $P_n''' P_s'''$ erscheint. O''' ist die Projektion des Augenpunktes, von welchem aus die Strahlen $O'''C'''$ und $O'''E'''$ gezogen werden, die die Bildebene in den Punkten c''' und e''' treffen. ce ist ein Durchmesser des Projektionskreises und man hat die Punkte c''' und e''' nach c'' und e'' zu projiciren. Der Mittelpunkt l'' von $c''e''$ ist das Centrum des gesuchten Kreises, welcher durch die Punkte $B''D''$ gehen muss. Sollte e'' zu weit wegfallen, so ist es ein Leichtes durch die Punkte $B''c''D''$ einen Kreis

*) In der Folge werden die Punkte im Raume mit grossen Buchstaben ($P, Q \dots$), ihre Projektionen mit $P'P''P'''$, $Q'Q''Q'''$, \dots bezeichnet. Ferner sollen die stereographischen Bilder dieser Punkte im Raume gleichnamige kleine Buchstaben ($p, q \dots$) erhalten, und ihre Projektionen $p'p''p'''$, $q'q''q'''$, \dots heissen.

zu legen. Es ist noch zu bemerken, dass sich der Aequator, dessen Ebene auf der vertikalen Pr. Eb. senkrecht steht, als gerade Linie

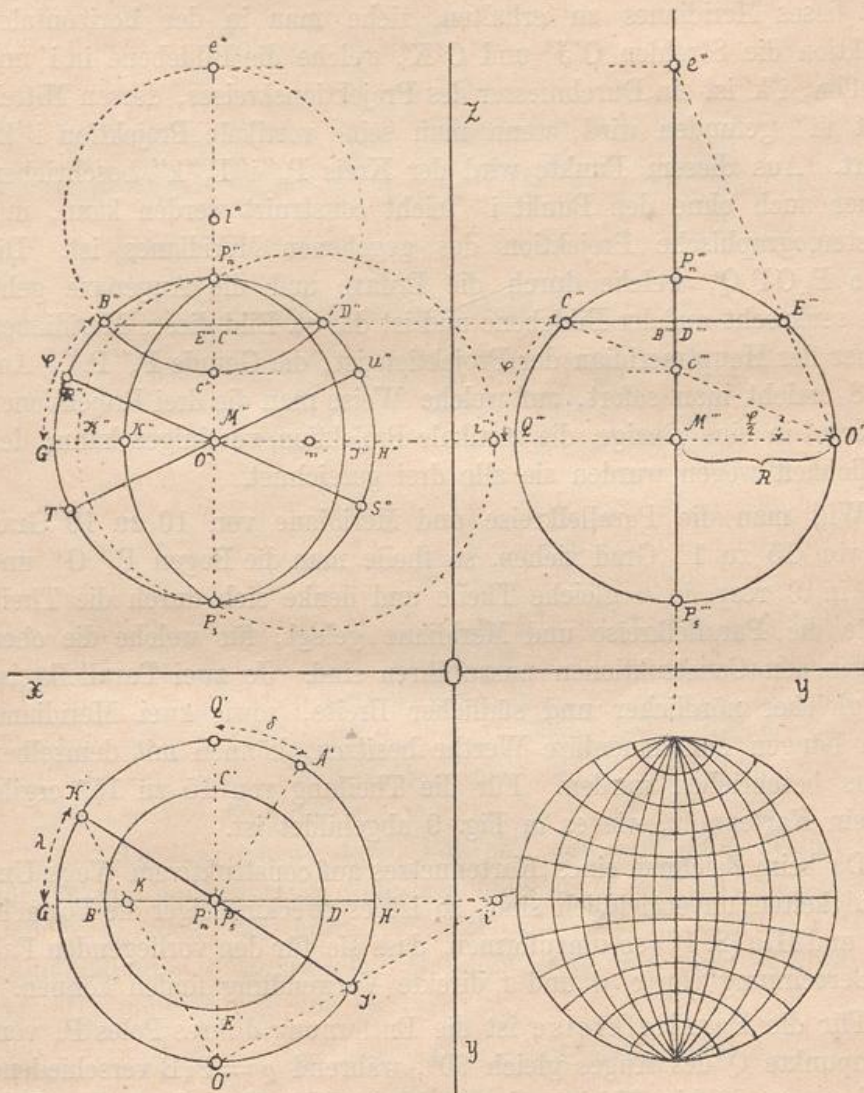


Fig. 8.

Fig. 9.

$G''H''$ projicirt. Ferner besitzen je zwei und zwei Parallelkreise, welche gleichweit vom Aequator entfernt sind, zu ihm eine symmetrische Lage, und müssen daher auch die stereographischen Bilder dieser Kreise zu der Geraden $G''H''$ eine symmetrische Lage haben.

Die stereographische Projection irgend eines Meridianes

wird auf folgende Weise erhalten: Es sei $P_n J P_s K$ (Fig. 8) ein Meridian, welcher mit dem 0^{ten} Meridian den Winkel λ einschliesst, $J'K'$ seine horizontale, $J''K''$ seine vertikale Projektion. Um das stereographische Bild dieses Meridianes zu erhalten, ziehe man in der horizontalen Projektion die Strahlen $O'J'$ und $O'K'$, welche die Bildebene in i' und k' treffen, $i'k'$ ist ein Durchmesser des Projektionskreises, dessen Mittelpunkt m'' gefunden wird, wenn man seine vertikale Projektion $i''k''$ halbiert. Aus diesem Punkte wird der Kreis $P_n''i''P_s''k''$ beschrieben, welcher auch ohne den Punkt i'' leicht construirt werden kann, und die stereographische Projektion des gegebenen Meridianes ist. Die Ebene $P_n O P_s Q$, welche durch die Erdaxe und die Augenaxe geht, steht senkrecht auf der Bildebene und ist das st. Bild dieses Meridianes, welcher der Hauptmeridian der Projektion ist, die Gerade $P_n''P_s''$. Aus Fig. 8 ersieht man sofort, auf welche Weise man die drei Projektionen der Kugel in eine einzige, die vertikale Projektion, vereinigen kann; der Deutlichkeit wegen wurden sie alle drei gezeichnet.

Will man die Parallelkreise und Meridiane von 10 zu 10 Grad oder von 15 zu 15 Grad ziehen, so theile man die Bogen $P_n''G''$ und $G'Q'$ in 9 resp. in 6 gleiche Theile und denke sich durch die Theilpunkte die Parallelkreise und Meridiane gelegt, für welche die oben angegebenen Konstruktionen auszuführen sind. Je zwei Parallelkreise von gleicher nördlicher und südlicher Breite, sowie zwei Meridiane, deren Längen supplementäre Werthe besitzen, können mit demselben Radius beschrieben werden. Für die Theilung von 15 zu 15° ergibt sich ein Kartennetz, wie es in Fig. 9 abgebildet ist.

Da beim Zeichnen eines Kartennetzes auf konstruktivem Wege Ungenauigkeiten unvermeidlich sind, so ist es zweckmässiger die Formeln I, IIa und IIIa (S. 17) so umzuformen, dass sie für den vorliegenden Fall zur Berechnung von e , d und r direkte Verwendung finden können.

Für die Parallelkreise ist die Entfernung δ ihres Poles P_n vom Gegenpunkte Q des Auges gleich 90° , während $\varrho = P_n B$ verschiedene Werthe von 0° bis 90° annehmen kann. Die Formeln I, IIa, IIIa nehmen daher folgende Form an

$$e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varrho) \quad (\text{VIII})$$

$$d = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varrho} \quad (\text{IX})$$

$$r = R \cdot \operatorname{Tg} \varrho \quad (\text{X}).$$

Statt der Poldistanz ϱ des Parallelkreises kann auch seine Breite φ

gegeben sein. Es ist aber $\varrho = 90^\circ - \varphi$ und $\text{Cos } \varrho = \text{Sin } \varphi$,
 $\text{Tg } \varrho = \text{Cotg } \varphi$, die Formeln lauten daher:

$$e = R \text{Tg } \frac{\varphi}{2} \quad (\text{VIIIa})$$

$$d = \frac{R}{\text{Sin } \varphi} \quad (\text{IXa})$$

$$r = R \cdot \text{Cotg } \varphi \quad (\text{Xa}).$$

Man kann diese Werthe auch unmittelbar aus Fig. 8 erhalten, in
 welcher $\sphericalangle Q'''O'''C''' = \frac{\varphi}{2}$ und $\sphericalangle Q'''O'''E''' = \frac{180^\circ - \varphi}{2} =$

$90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ist. Es ergibt sich:

$$M'''e''' = M''e'' = e = R \text{Tg } \frac{\varphi}{2}$$

$$M'''e''' = M''e'' = R \text{Tg } \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = R \text{Cotg } \frac{\varphi}{2}$$

$$d = \frac{M''e'' + M'''e'''}{2} = \frac{R}{2} \left(\text{Tg } \frac{\varphi}{2} + \text{Cotg } \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$d = \frac{R}{2} \left(\frac{\text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} + \text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2}}{\text{Cos } \frac{\varphi}{2} \text{Sin } \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{R}{\text{Sin } \varphi}$$

ferner ist $2r = e''e''' = M''e'' - M'''e''' = R \left(\text{Cotg } \frac{\varphi}{2} - \text{Tg } \frac{\varphi}{2} \right)$

$$2r = \frac{R \left(\text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2} - \text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{\text{Cos } \frac{\varphi}{2} \text{Sin } \frac{\varphi}{2}} = \frac{R \text{Cos } \varphi}{\frac{\text{Sin } \varphi}{2}} = 2 R \text{Cotg } \varphi$$

$$r = R \text{Cotg } \varphi.$$

Für die Meridiane deren Pole auf dem Aequator liegen, variiert
 die Distanz δ dieser Pole vom Gegenpunkte Q des Auges zwischen 0°
 und 90° (siehe die horiz. Projektion der Fig. 8), dagegen ist der
 Bogenhalbmesser sämtlicher Meridiane $\varrho = 90^\circ$ und die Formeln Ia
 IIa, IIIa nehmen folgende Gestalt an:

$$e = R \text{Tg } \frac{1}{2} (90^\circ - \delta) \quad [(\text{XI})] \quad \text{denn } \varrho = \overline{\delta}$$

$$d = R \text{Tg } \delta \quad (\text{XII})$$

$$r = \frac{R}{\text{Cos } \delta} \quad (\text{XIII}).$$

Ist die Bildebene $G'H'$ (Fig. 8) der 0° Meridian, und die geog.
 Länge $G'K' = \lambda$ des zu projicirenden Meridianes gegeben, so ist $\text{Bg}A'Q'$
 $= \text{Bg}.G'K'$ d. h. $\delta = \lambda$ und

$$e = R \text{Tg } \frac{1}{2} (90^\circ - \lambda) \quad (\text{XIa})$$

$$d = R \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{XIIa})$$

$$r = \frac{R}{\operatorname{Cos} \lambda} \quad (\text{XIIIa}).$$

Nach dieser Methode werden die meisten Weltkarten construirt, wobei man gewöhnlich den Meridian von Ferro, welcher die Erde in die Land- und Wasserhälfte resp. in die alte und neue Welt theilt, als 0^{ten} Meridian und gleichzeitig als Bildebene annimmt.

In nachfolgender Tabelle sind sowohl für die Parallellkreise als Meridiane die Werthe von e d r angegeben, wenn die Werthe von φ und λ von 5° zu 5° wachsen. Der Radius der Kugel wurde = 1 gesetzt.

φ oder λ	Parallellkreise			Meridiane		
	$e = \operatorname{Tg} \frac{\varphi}{2}$	$d = \frac{1}{\operatorname{Sin} \varphi}$	$r = \operatorname{Cotg} \varphi$	$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda)$	$d = \operatorname{Tg} \lambda$	$r = \frac{1}{\operatorname{Cos} \lambda}$
5°	0,04366	11,47371	11,43005	0,91634	0,08749	1,00382
10°	0,08749	5,75877	5,67128	0,83910	0,17633	1,01543
15°	0,13165	3,86370	3,73205	0,76733	0,26795	1,03528
20°	0,17633	2,92380	2,74748	0,70021	0,36397	1,06418
23° 28'	0,20770	2,51120	2,30351			
25°	0,22169	2,36620	2,14451	0,63707	0,46631	1,10338
30°	0,26795	2,00000	1,73205	0,57735	0,57735	1,15470
35°	0,31530	1,74345	1,42815	0,52057	0,70021	1,22077
40°	0,36397	1,55572	1,19175	0,46631	0,83910	1,30541
45°	0,41421	1,41421	1,00000	0,41421	1,00000	1,41421
50°	0,46631	1,30541	0,83911	0,36397	1,19175	1,55572
55°	0,52057	1,22077	0,70021	0,31530	1,42815	1,74345
60°	0,57735	1,15470	0,57735	0,26795	1,73205	2,00000
65°	0,63707	1,10338	0,46631	0,22169	2,14451	2,36620
66° 32'	0,65604	1,09016	0,43412			
70°	0,70021	1,06418	0,36397	0,17633	2,84748	2,92380
75°	0,76733	1,03528	0,26795	0,13165	3,73205	3,86370
80°	0,83910	1,01543	0,17633	0,08749	5,67127	5,75876
85°	0,91633	1,00382	0,08749	0,04366	11,43005	11,47371

Wir wollen nach dieser Methode noch einen beliebigen Kugelkreis, z. B. die Ekliptik projeciren. Um die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne darzustellen, wie sie von einem Bewohner des Erd-äquators gesehen werden, ist es am zweckmässigsten diese Projektion anzuwenden. Für die Frühlingsgestirne ist der 180^{te}, für die Sommergestirne der 270^{te}, für die Herbstgestirne der 360^{te} und für die Wintergestirne der 90^{te} Declinationskreis der Kugel Hauptmeridian der

Projektion. Wollte man in diese 4 Karten, welche ein vollständiges Bild der ganzen Himmelskugel geben, einen beliebigen Kugelkreis einzeichnen, so hätte man nach den Gleichungen, V VI und VII (Seite 19) die Winkelwerthe von ω und ε , und nach den Gleichungen I, IIa, IIIa (Seite 17) die Werthe von e d r zu berechnen.

Ist $P_n Q = \delta$ (siehe Fig. 7, Seite 18) die Entfernung des Poles vom Gegenpunkt Q des Auges

$EF = \gamma$ die Rectascension des Poles der Ekliptik

$P_n A = \vartheta$ die Distanz des Poles der Ekliptik vom Himmelspol

$AD = \varrho$ der Bogenhalbmesser der Ekliptik

so sind in die Gleichungen Va und VIa für δ γ ϑ ϱ folgende Zahlenwerthe zu substituiren:

- 1) für die Frühlingsgestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 2) „ „ Sommergestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 0^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 3) „ „ Herbstgestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 270^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$
- 4) „ „ Wintergestirne: $\delta = 90^\circ, \gamma = 180^\circ, \vartheta = 23^\circ 27' 20'', \varrho = 90^\circ$

Für No. 1 ergibt sich

$$\cos A = 0 \text{ also } A = 90^\circ$$

$$\sin \omega = \sin 23^\circ 27' 20'' \text{ also}$$

$$\omega = 23^\circ 27' 20''$$

$$\varepsilon = 180^\circ - \omega = 156^\circ 32' 40''$$

Der Winkel ε ist an die Gerade $M''P_n''$ (Fig. 8) in der Richtung des Uhrzeigers anzutragen und liegt auf seinem Schenkel MG (Fig 7) der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ferner ergeben sich nach den Gleichungen I, IIa und IIIa die Werthe von e d r .

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (A - \varrho) = \operatorname{Tg} 0^\circ = 0$$

$$d = \frac{\sin A}{\cos A + \cos \varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$r = \frac{\sin \varrho}{\cos A + \cos \varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$

Da d und r unendlich gross ist, so projicirt sich die Ekliptik in diesem Falle als gerade Linie $R''S''$ (Fig. 8), welche mit dem Aequator $G''H''$ einen Winkel von $23^\circ 27'$ einschliesst, und kann man auch ohne Hülfe der Formeln zu diesem Resultate gelangen, denn die Ebene der Ekliptik geht durch die Augenaxe und steht daher senkrecht auf der Bildebene, wesshalb sie sich als gerade Linie projicirt. Diese Linie muss mit dem Aequator einen Winkel von $23^\circ 27'$ bilden, denn die stereographischen Projektionen zweier Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel, wie die Kreise selbst.

Auch für die Herbstgestirne projectirt sich die Ekliptik als gerade Linie T''U'' (Fig 8), welche in Bezug auf den Aequator G''H'' zu der Geraden R''S'' eine symetrische Lage besitzt.

Für No. 2 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\begin{aligned} \cos A &= \sin \vartheta = \sin 23^\circ 27' 20'' \\ A &= 66^\circ 32' 40'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{0}{\sin 66^\circ 32' 40''} = 0 \\ \omega &= 0^\circ \\ \varepsilon &= 180^\circ \end{aligned}$$

ferner nach Gleichung I, IIa, IIIa:

$$\begin{aligned} e &= \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (66^\circ 32' 40'' - 90^\circ) \\ e &= - \operatorname{Tg} 11^\circ 43' 40'' \\ e &= - 0,20760 \\ d &= \operatorname{Tg} A = \operatorname{Tg} 66^\circ 32' 40'' \\ d &= 2,30473 \\ r &= \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos 66^\circ 32' 40''} \\ r &= 2,51233 \end{aligned}$$

Für No. 4 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\begin{aligned} \cos A &= - \sin \vartheta = \\ &= - \sin 23^\circ 27' 20'' \\ A &= 66^\circ 32' 40'' \\ A &= 180^\circ - 66^\circ 32' 40'' \\ A &= 113^\circ 27' 20'' \\ \sin \omega &= 0, \quad \omega = 180^\circ \\ \varepsilon &= 0^\circ \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen I, IIa, IIIa erhält man:

$$\begin{aligned} e &= \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (113^\circ 27' 20'' - 90^\circ) \\ e &= \operatorname{Tg} 11^\circ 43' 40'' \\ e &= 0,20760 \\ d &= \operatorname{Tg} A = \operatorname{Tg} 113^\circ 27' 20'' \\ d &= - 2,30473 \\ r &= \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos 113^\circ 27' 20''} \\ r &= - 2,51233 \end{aligned}$$

Zusammenstellung der erhaltenen Werthe.

• Ansicht	ε	e	d	r
I. Frühlingsgestirne	156°32'40''	0,00000	∞	∞
II. Sommergestirne	180°	- 0,20760	2,30473	2,51233
III. Herbstgestirne	203°27'20''	0,00000	∞	∞
IV. Wintergestirne	360°	0,20760	- 2,30473	- 2,51233

II. Projektion auf den Aequator.

(Stereographische Polarprojektion.)

Befindet sich das Auge in dem einen Pol der Kugel, so fällt die Bildebene mit der Aequatorebene zusammen und der Aequator A'B'C'D' (Fig. 10) ist der Grenzkreis der Karte. Die Erd- oder Himmelsaxe ist

dentisch mit der Augenaxe und steht daher senkrecht auf der Bildebene, wesshalb sich alle Meridiane als gerade Linien projiciren, welche durch das Centrum der Karte gehen und unter sich gleiche Winkel einschliessen. Will man dieselben von 10° zu 10° oder von 15° zu 15° ziehen, so hat man den Umfang des Kreises $A'B'C'D'$ in 36 resp. 24 gleiche Theile zu theilen, und die Theilpunkte mit dem Centrum P_n' der Karte zu verbinden.

Um die Projektion irgend eines Parallelkreises $E''F''$ zu erhalten, denke man sich zu seinen Punkten Projektionsstrahlen gezogen, welche in ihrer Gesamtheit einen senkrechten Kreiskegel bilden, der von der Bildebene AC in dem Kreise ef geschnitten wird, ef ist die stereographische Projektion des Parallelkreises, welcher in der horizontalen Projektionsebene in der wahren Grösse erscheint. Theilt man den Bogen $A''Q''$ in ebensoviele gleiche Theile wie den Bogen $A'B'$, so gehen durch die Theilpunkte die zu projicirenden Parallelkreise, welche alle auf dieselbe Weise erhalten werden. Ihre

Radien ergeben sich, wenn man in Gleichung IIIa (S. 17) die Entfernung ihres Poles P_n vom Gegenpunkte Q des Auges gleich Null setzt. Man erhält:

$$r = \frac{R \sin \varrho}{\cos 0^\circ + \cos \varrho} = \frac{R \sin \varrho}{1 + \cos \varrho}$$

$$r = \frac{R \cdot 2 \sin \frac{\varrho}{2} \cos \frac{\varrho}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varrho}{2}} = R \operatorname{Tg} \frac{\varrho}{2} \quad (\text{XIV})$$

Die Poldistanz ϱ der Parallelkreise ist aber das Complement ihrer Breite φ und daher:

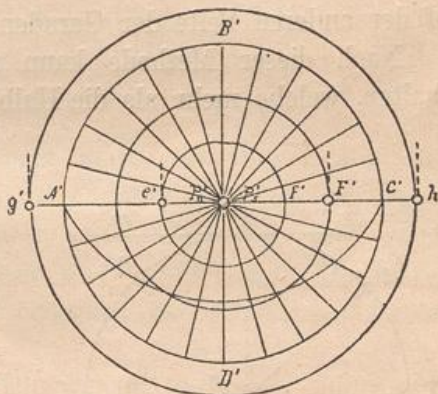
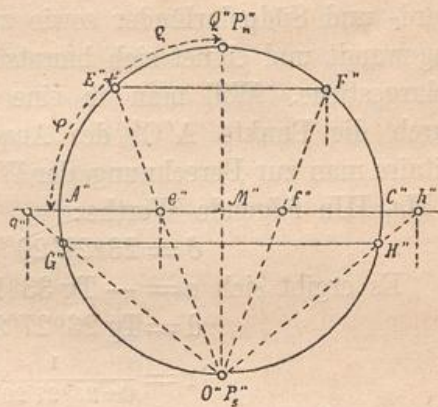


Fig. 10.

$$r = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi) \quad (\text{XIVa})$$

Für $R = 1$ gibt die Tabelle Seite 24 in der drittletzten Colonne die Werthe von r wenn φ von 5° zu 5° zunimmt.

Diese Projektionsmethode wird beim Entwurfe von Karten der Nord- und Südpolarländer sowie zur Construction von Himmelskarten angewandt und eignet sich hauptsächlich zur Darstellung der Circumpolargestirne. Will man in eine solche Karte die Ekliptik, welche durch die Punkte $A' C'$ des Aequators geht, einzeichnen, so substituirt man zur Berechnung der Werthe e d und r in die Gleichungen I, IIa, IIIa folgende Werthe:

$$\delta = 23^\circ 27' 20'' \quad \varphi = 90^\circ$$

$$\text{Es ergibt sich } e = -\operatorname{Tg} 33^\circ 16' 20'' = -0,65618$$

$$d = \operatorname{Tg} 23^\circ 27' 20'' = 0,43389$$

$$r = \frac{1}{\operatorname{Cos} 23^\circ 27' 20''} = 1,09007$$

Für eine Karte, welche die südliche Hemisphäre darstellt, ergeben sich dieselben Werthe von e d r , der Mittelpunkt der Ekliptik liegt jedoch auf der anderen Seite der Geraden $B'D'$ (Fig. 10).

Nach dieser Methode kann man Projektionen der Kugelfläche erhalten, welche mehr als die Halbkugel darstellen. Ist z. B. in Fig. 10

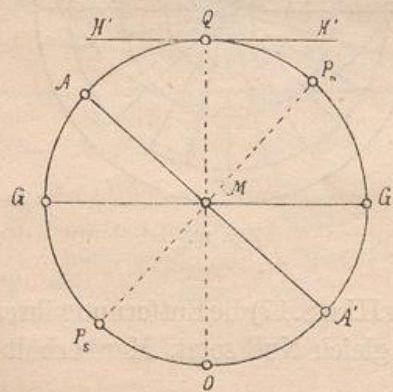


Fig. 11.

$G''H''$ ein Parallelkreis, welcher südlich vom Aequator liegt, so besitzt seine stereographische Projektion $g''h''$ einen grösseren Halbmesser als der Aequator und ist ein zu diesem concentrischer Kreis $g'h'$. Je grösser die südliche Breite der Parallelkreise wird, um so grösser werden die Radien der Bildkreise, welche in Folge der Schiefe der Sehstrahlen unverhältnissmässig wachsen, wesshalb die an den Grenzen einer solchen Karte liegenden Figuren verzerrt erscheinen. Zur Darstellung der in unseren Breiten im Laufe des Jahres sichtbaren Him-

melszone sowie beim Entwurfe einer Karte, welche mehr als die eine Erdhemisphäre darstellen soll, wird diese Projektionsart hie und da angewandt. In Fig. 11 ist P_n P_s die Erdaxe, $A A'$ der Aequator und Q ein beliebiger Erd-

ort, dessen geog. Breite $AQ = \varphi$ gegeben ist. $H'H'$ ist der scheinbare, GG' der wirkliche Horizont dieses Ortes, welcher letzterer die Himmelskugel in eine sichtbare und unsichtbare Hälfte theilt. Alle Gestirne, welche daher eine südl. Declination bis $AG = 90^\circ - \varphi$ besitzen, sind für diesen Ort im Laufe des Jahres sichtbar, und es bildet für einen Bewohner dessen geog. Breite 48° beträgt, derjenige Parallelkreis die Grenze der Karte, dessen südl. Declination $= 42^\circ$ ist. Die Radien der südlichen Parallelkreise ergeben sich, wenn man in Gleichung XIV ϱ der Reihe nach die Werthe $95^\circ 100^\circ \dots 130^\circ$ gibt. Für den Kugelradius $R = 1$ erhält man folgende Werthe von r :

südliche Declination	$r = \text{Tg } \frac{\varrho}{2}$
5°	1,0913
10	1,1918
15	1,3032
20	1,4281
25	1,5697
30	1,7321
35	1,9210
40	2,1445

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, dass der Radius desjenigen Parallelkreises dessen südliche Declination 40° beträgt, doppelt so gross ist als der Radius der Kugel, wesshalb die Gestirne, welche die Kugelzone zwischen dem Aequator und -40° südl. Declination einnehmen, eine viel grössere Fläche bedecken als die Gestirne zwischen 0° und 90° nördl. Declination.

Dieser Uebelstand wird vermieden, sobald man den Augenpunkt auf der Verlängerung der Weltaxe annimmt. Die Projektionen der Meridiane bleiben dabei unverändert, diejenigen der Parallelkreise sind concentrische Kreise, deren Radien von der Annahme des Augenpunktes abhängen. Prof. Otto Möllinger hat bei der Construction seiner transparenten Sternkarte den Augenpunkt in solcher Entfernung vom Centrum der Kugel angenommen, dass die Bogen vom Aequator bis 42° nördlicher und südlicher Declination auf der Karte gleich gross erscheinen und in Folge dessen die Parallelkreise von $+42^\circ$ und -42° Declination gleichweit vom Aequator entfernt sind. Die Karte ist für einen Bewohner des 48° Parallelkreises construirt, wesshalb der Bogen $AQ = 48^\circ$, der Bogen $AG = 42^\circ$ zu setzen ist (Fig. 11).

Es sei AB (Fig. 12) der Aequator der Himmelskugel, welcher gleichzeitig die Bildebene ist. $P_n P_s$ die Weltaxe auf deren Verlängerung der Augenkpunkt O der Projektion liegt. CD und EF seien zwei Parallelkreise, welche die gleiche nördliche und südliche Declination von 42° besitzen. Vom Punkte O denke man sich nach diesen Kreisen Projektionsstrahlen gezogen, die die Bildebene in den Kreisen cd und ef treffen. Da die Entfernungen Ae und Ae dieser Kreise vom Aequator einander gleich sein sollen, so ist vor Allem zu be-

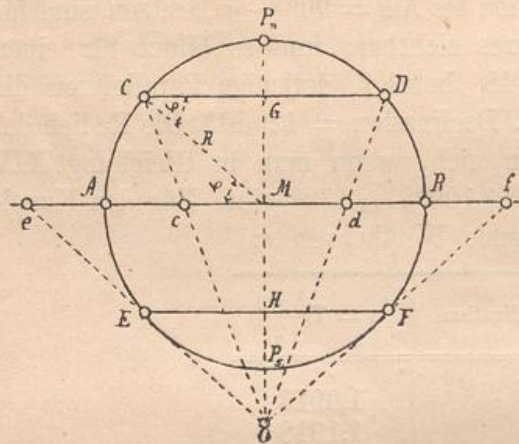


Fig. 12.

weisen, dass es auf der Geraden $P_n P_s$ einen Punkt O gibt, welcher als Augenkpunkt dieser Anforderung entspricht. Es kann diess auf folgende Weise gezeigt werden: In Fig. 12 ist:

$$Me : CG = MO : GO$$

$$Me : EH = MO : HO$$

Setzt man in diesen Proportionen $MO = D$, so ist $GO = D + MG$, $HO = D - MH$ und man erhält:

$$1) Me = \frac{CG \cdot D}{D + MG}$$

$$2) Me = \frac{EH \cdot D}{D - MH}$$

Aus Fig. 12 ergibt sich ferner: $CG = EH = R \cdot \cos \varphi$ und $MG = MH = R \sin \varphi$ somit:

$$(XV) \begin{cases} Me = \frac{R \cos \varphi D}{D + R \sin \varphi} \\ Me = \frac{R \cos \varphi \cdot D}{D - R \sin \varphi} \end{cases}$$

$$\text{und } 3) Ae = AM - Me = R - \frac{R \cos \varphi D}{D + R \sin \varphi} = R \left(1 - \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi} \right)$$

$$4) Ae = Me - AM = \frac{R \cos \varphi D}{D - R \sin \varphi} - R = R \left(\frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} - 1 \right)$$

Nimmt man den Augenkpunkt zuerst im Pole P_s der Kugel an, so ergibt sich für $\varphi = 42^\circ$ nach Gleichung XIV:

$$Mc = RTg 24^\circ = 0,4452 R$$

$$Me = RTg 66^\circ = 2,2460 R$$

$$\text{ferner } Ac = R - 0,4452 R = 0,5548 R$$

$$Ae = 2,2460 R - R = 1,2460 R$$

und daher $Ae > Ac$.

Nimmt man dagegen den Augenpunkt in einer Entfernung $D = 2R$ von der Bildebene an, so ergeben sich die Werthe von Ac und Ae nach den Gleichungen 3 und 4. Es ist

$$Ac = R \left(1 - \frac{2 \cos \varphi}{2 + \sin \varphi} \right)$$

$$Ae = R \left(\frac{2 \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} - 1 \right)$$

und für $\varphi = 42^\circ$, $Ac = 0,4432 R$ und $Ae = 0,1168 R$

somit $Ac > Ae$.

Es muss also zwischen P_s und der neuen Lage des Augenpunktes, für welche $MO = 2R$ ist, ein Punkt liegen, von welchem aus die Bogen AC und AE gleich gross erscheinen, d. h. für den $Ac = Ae$ ist. Um seine Distanz D vom Centrum der Kugel zu berechnen, setze man die Werthe für Ac und Ae (Gleich. 3 und 4) einander gleich.

$$\text{Es ist } 1 - \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi} = \frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} - 1 \text{ oder}$$

$$2 = \frac{D \cos \varphi}{D - R \sin \varphi} + \frac{D \cos \varphi}{D + R \sin \varphi}$$

$$\text{oder } 2 = \frac{D}{R} \cdot \frac{\cos \varphi}{\left(\frac{D}{R} - \sin \varphi\right)} + \frac{D}{R} \cdot \frac{\cos \varphi}{\left(\frac{D}{R} + \sin \varphi\right)}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{D}{R} = x$, so ist

$$2 = \frac{x \cos \varphi}{x - \sin \varphi} + \frac{x \cos \varphi}{x + \sin \varphi}$$

$$2(x^2 - \sin^2 \varphi) = x \cos \varphi (x + \sin \varphi + x - \sin \varphi)$$

$$2(x^2 - \sin^2 \varphi) = 2x^2 \cos \varphi$$

$$x^2(1 - \cos \varphi) = \sin^2 \varphi$$

$$x = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

$$x = \frac{D}{R} = \sqrt{1 + \cos \varphi} \text{ somit}$$

$$(XVI) \quad D = R \sqrt{1 + \cos \varphi} = R \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{2}$$

für $\varphi = 42^\circ$ ist $D = 1,3203 R$

Setzt man $R = 1$ so ist $D = 1,3203$ und es ergeben sich die Radien sämt-

licher Parallelkreise nach den Gleichungen XV. Man erhält folgende Werthe:

Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion	Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion
5°	0,04967	75°	0,8075
10°	0,09945	80°	0,8705
15°	0,14945	85°	0,9345
20°	0,19980	90°	1,0000
25°	0,25055	95°	1,0665
30°	0,30190	100°	1,1340
35°	0,35395	105°	1,2015
40°	0,40675	110°	1,2685
45°	0,46045	115°	1,3330
50°	0,51500	120°	1,3940
55°	0,57106	125°	1,4485
60°	0,62800	130°	1,4935
65°	0,6865	132°	1,5063
70°	0,7458		

Um die Projektion der Ekliptik und des Horizontes zu erhalten, welche sich bei dieser Annahme des Augenpunktes als Ellipsen projectiren, hat man die grosse und die kleine Axe dieser Ellipsen, sowie die Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Centrum der Karte zu berechnen.

In Fig. 13 ist A''B'' der Aequator, E''D'' die Ekliptik, welche mit ihm einen Winkel von $23\frac{1}{2}^\circ$ bildet, ferner H''G'' der Horizont, für welchen die Poldistanz $P_n''G'' = 48^\circ$ ist. Ekliptik und Horizont, welche beide grösste Kreise der Kugel sind, schneiden sich in dem Kugeldurchmesser PQ, welcher in der Bildebene liegt und daher seine eigene Projektion ist. Beide Ellipsen gehen durch die Punkte P'Q' des Aequators (Fig. 14), die Ekliptik geht ausserdem durch die Punkte e'd', und der Horizont durch die Punkte h'g', welche aus Fig. 13 in die Fig. 14 projectirt werden.

Da E''D'' ein Durchmesser der Ekliptik ist, so muss auch seine perspectivische Projektion e'd' ein Durchmesser der Ellipse e'f'd'i' sein, dessen Grösse wie folgt erhalten wird:

Es ist $e'd' = e''d'' = e''M'' + M''d'' = DTg\gamma + D \cdot Tg\delta$ (Fig. 13) wenn die Entfernung $M''O'' = D$ gesetzt wird. Oder

$$1) e'd' = D (Tg\gamma + Tg\delta) = \frac{D \sin(\gamma + \delta)}{\cos\gamma \cos\delta}$$

Sobald die Winkel γ und δ bekannt sind, kann auch $e'd'$ mit dieser Gleichung berechnet werden. Betrachtet man die Dreiecke $O''M''E''$ und $O''M''D''$,

so ist 2)
$$\begin{cases} E'' + \gamma = 90^\circ - \varepsilon \\ D'' + \delta = 90^\circ + \varepsilon \end{cases}$$

ferner bestehen die Gleichungen:

3)
$$\begin{cases} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' + \gamma) \cdot (D - R)}{D + R} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) (D - R)}{D + R} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' - \delta) = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' + \delta) (D - R)}{D + R} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varepsilon) (D - R)}{D + R} \end{cases}$$

Mittels den Gleichungen 2) und 3) berechnet man die Werthe von γ und δ , und setzt dieselben in Gleichung 1) ein, wodurch die eine Axe $e'd'$ der Ellipse erhalten wird. Die Entfernung $M'C'$ ihres Mittelpunktes C' vom Centrum der Karte wird auf folgende Weise berechnet. Es ist:

$$\begin{aligned} M'C' &= M'd' - d'C' \\ &= M''d'' - \frac{e''d''}{2} \\ &= D \operatorname{Tg} \delta - \frac{D \operatorname{Sin} (\gamma + \delta)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta} \end{aligned}$$

4)
$$M'C' = x_1 = \frac{D \operatorname{Sin} (\delta - \gamma)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta}$$

Dieser Werth ist die Abszisse x_1 des Punktes P' durch welchen die Ellipse gehen muss, in Bezug auf $C'd'$ als Abscissenaxe und $C'f'$ als Ordinatenaxe. Die Ordinate von P' ist $M'P' = y_1 = R$ und es ergibt sich die zweite Axe der Ellipse, wenn man in ihre Mittelpunkts-Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ für a, y und x die erhaltenen

Werthe setzt, und alsdann b ermittelt. Es ist: 5)
$$a = \frac{e'd'}{2} = \frac{D \operatorname{Sin} (\gamma + \delta)}{2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \delta}$$

Fig. 13.

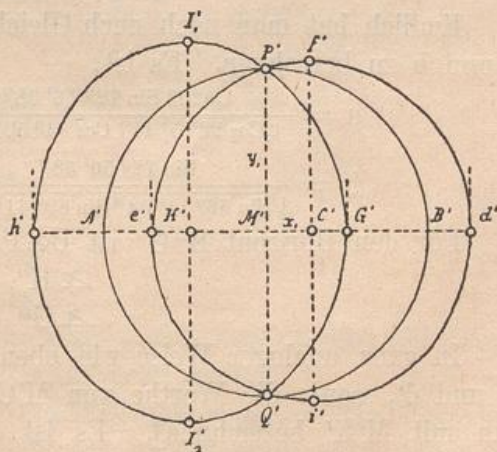
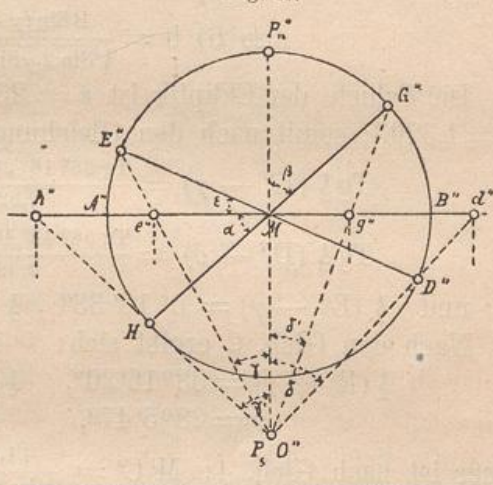


Fig. 14.

$$x = x_1 = \frac{D \sin(\delta - \gamma)}{2 \cos \gamma \cos \delta}$$

$$y = y_1 = R, \quad \text{somit}$$

$$\frac{D^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} R^2 + b^2 \frac{D^2 \sin^2(\delta - \gamma)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} = \frac{D^2 \sin^2(\gamma + \delta)}{4 \cos^2 \gamma \cos^2 \delta} b^2 \text{ und}$$

$$b^2 (\sin^2(\gamma + \delta) - \sin^2(\delta - \gamma)) = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

$$\text{oder } b^2 [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\delta - \gamma)] \cdot [\sin(\gamma + \delta) - \sin(\delta - \gamma)] \\ = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

Durch gehörige Entwicklung und Reduktion ergibt sich:

$$b^2 \sin 2\gamma \sin 2\delta = R^2 \sin^2(\gamma + \delta)$$

$$\text{also } b = \frac{R \sin(\gamma + \delta)}{\sqrt{\sin 2\gamma \sin 2\delta}}$$

Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^\circ 27' 20''$, ferner ist für $R = 1$
 $D = 1,3203$; somit nach den Gleichungen 3:

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = \frac{\operatorname{Tg} 33^\circ 16' 20'' \cdot 0,3203}{2,3203}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{1}{2} (D'' - \delta) = \frac{\operatorname{Tg} 56^\circ 43' 40'' \cdot 0,3203}{2,3203}$$

$$\text{und } \frac{1}{2} (E'' - \gamma) = 5^\circ 10' 33'', \quad \frac{1}{2} (D'' - \delta) = 11^\circ 52' 49''$$

Nach den Glch. 2 ergibt sich:

$$\frac{1}{2} (E'' + \gamma) = 33^\circ 16' 20'', \quad \frac{1}{2} (D'' + \delta) = 56^\circ 43' 40'' \\ \gamma = 28^\circ 5' 47'', \quad \delta = 44^\circ 50' 51''$$

$$\text{ferner ist nach Glch. 4: } M'C' = \frac{1,3203 \cdot \sin 16^\circ 45' 04''}{2 \cos 28^\circ 5' 47'' \cos 44^\circ 50' 51''}$$

$$M'C' = 0,30421.$$

Endlich hat man noch nach Gleichung 5) und 6) die Werthe von
 a und b zu berechnen. Es ist:

$$a = \frac{1,3203 \sin 72^\circ 56' 38''}{2 \cos 28^\circ 5' 47'' \cos 44^\circ 50' 51''} = 1,00908$$

$$b = \frac{\sin 72^\circ 56' 38''}{\sqrt{\sin 56^\circ 11' 34'' \sin 89^\circ 41' 42''}} = 1,04880$$

Für den Horizont $H''G''$ ist $\operatorname{Bg.} P_n'' G'' = \beta = 48^\circ$

$$\nearrow H'' + \gamma' = 180^\circ - \beta = 132^\circ$$

$$\nearrow G'' + \delta' = \beta = 48^\circ.$$

In ganz analoger Weise wie oben ergeben sich die Werthe von
 γ' und δ' , sowie die Werthe von $M'C'$, a' und b' [$M'C'$ wollen wir
 nun mit $M'K'$ bezeichnen]. Es ist (siehe Fig. 13 und 14) $\gamma' =$
 $48^\circ 46' 26''$, $\delta' = 20^\circ 28' 59''$, $M'K' = -0,50679$, $a' = 1$, $b' = 1,1600$.

III. Projektion auf den Horizont.

(Stereographische Horizontalprojektion.)

Will man diejenige Hemisphäre der Erdkugel abbilden, in deren Centrum sich irgend ein Land oder eine grössere Stadt, z. B. Wien oder Paris befindet, so lässt man den Gegenpunkt Q des Auges mit demjenigen Orte zusammenfallen, der im Mittelpunkte der Karte liegen soll. Die Augenaxe steht alsdann senkrecht auf dem Horizont $H''H''$ (Fig. 15) des Ortes Q'' und die Bildebene $L''N''$ ist der wahre Horizont dieses Ortes. In Fig. 15 und 16 ist die Bildebene parallel mit der horizontalen Projektionsebene angenommen,

während der Hauptmeridian $Q''P_n''O''P_s''$, welcher durch die Erdaxe $P_n''P_s''$ und die Augenaxe $O''Q''$ geht, eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Lage besitzt. Die stereographische Projektion des Hauptmeridianes ist in Folge dessen eine zur Projektionsaxe parallele Gerade $p_n'p_s'$.

Da sämtliche Parallelkreise $C''D''$, $A''B''$ etc. von dem grössten Kreise $A''P_n''B''P_s''$ in Durchmessern $C''D''$, $A''B''$ etc. geschnitten werden, so liegen die Projektionen dieser Durchmesser auf der Geraden $p_n'p_s'$, welche sämtliche Mittelpunkte der stereographischen Projektionen der Parallelkreise enthält.

Um das Bild des Kreises $C''D''$ zu erhalten, ziehe man die Projektionsstrahlen $O''C''$ und $O''D''$, welche die Bildebene in $c''d''$ treffen, die horizontale Projektion $c'd'$ der Geraden ed ist ein Durchmesser des Parallelkreises $c'd'$, dessen Mittelpunkt i' gefunden wird, wenn man $c'd'$ halbirt. Ebenso kann man auch für die übrigen Parallelkreise, welche

Fig. 15.

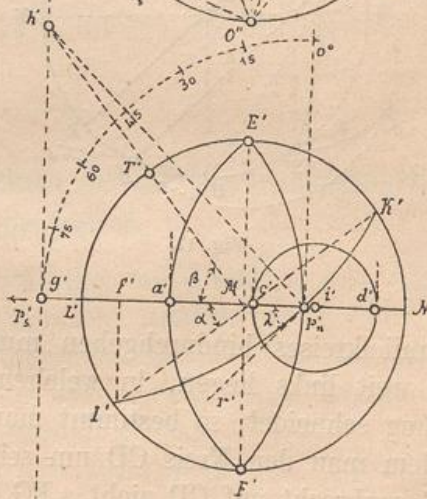
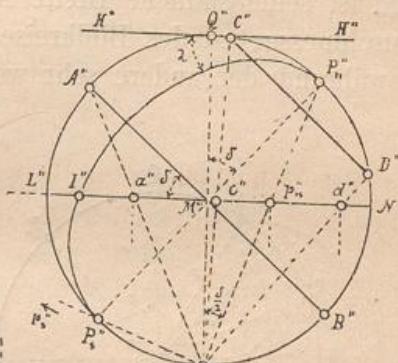


Fig. 16.

entweder von 10 zu 10^o oder von 15 zu 15^o gezogen werden, die Mittelpunkte construiren. Der Aequator A"B", dessen Ebene auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht, schneidet die Bildebene in der Geraden EF, welche ebenfalls eine zur vertikalen Projektionsebene senkrechte Lage besitzt. Da die Gerade EF ihre eigene stereographische Projektion ist, so geht durch ihre Endpunkte E, F' das Bild des Aequators.

Liegt wie in Fig. 17 ein Parallelkreis CD südlich vom Aequator und ist seine südliche Breite AC etwas gross, so erhält man von dem Durchmesser ed des Bildkreises gewöhnlich nur den einen Endpunkt e, während der andere sehr weit wegfällt, wesshalb man den Mittel-

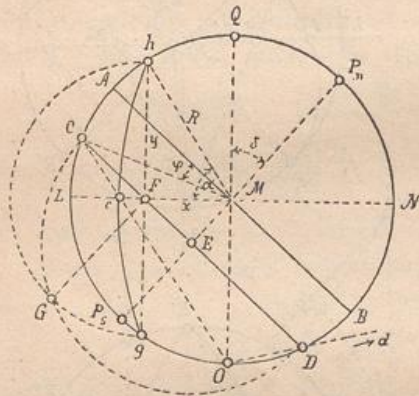


Fig. 17.

Parallelkreises hindurchgehen muss. Sollte die Sehne gh (Fig. 17) zu weit links liegen, in welchem Falle sie den Kreis nicht scharf genug schneidet, so bestimmt man die wahre Grösse von Fg und Fh indem man den Kreis CD um seinen Durchmesser CD niederlegt und FG senkrecht auf CD zieht. FG ist dann die wahre Grösse der halben Sehne, welche nach Fg und Fh getragen wird.

Da sämtliche Meridiane durch die Pole P_nP_s der Kugel gehen, so müssen ihre Bilder durch die Projektionen p_n'p_s' dieser Pole gehen. (Fig. 16) p_s' ist daher eine sämtlichen Meridianen gemeinschaftliche Sehne, und die Mittelpunkte dieser Meridiane liegen auf der Senkrechten g'h', welche man in der Mitte von p_n'p_s' auf dieser Geraden errichtet. Um sie zu erhalten erinnere man sich, dass sich die stereographischen Bilder zweier Kreise unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise selbst. Ist daher λ (Fig. 16) der Winkel, welchen der gesuchte

punkt i dieses Kreises auf andere Weise zu erhalten suchen muss. Dies geschieht auf folgende Art: Die Ebene des Kreises CD steht senkrecht auf dem Hauptmeridiane und schneidet die Bildebene in der Sehne GH, welche im Punkte F ebenfalls auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht. GH ist ihr eigenes Bild und erscheint bei der Niederlegung der Bildebene um den Durchmesser LN in der wahren Grösse, wesshalb durch die Endpunkte gh dieser Geraden das Bild des

Meridian mit dem Hauptmeridiane der Karte bildet, so trage man diesen Winkel im Punkte p_n' an $L'p_n'$ an, $p_n'r'$ ist dann eine Tangente an den gesuchten Kreis, dessen Mittelpunkt h' erhalten wird, wenn man $p_n'h'$ senkrecht auf $p_n'r'$ zieht und sie mit der Geraden $g'h'$ zum Schnitt bringt. Will man die Meridiane von 10° zu 10° oder von 15° zu 15° zeichnen, so beschreibt man am einfachsten aus dem Punkte p_n' mit beliebigem Halbmesser (in Fig. 16 wurde er gleich $p_n'g'$ angenommen) einen Kreis, errichtet in p_n' eine Senkrechte auf $p_n'g'$ und theilt den Quadranten $g'0$ vom Punkte 0 aus in 9 resp. in 6 gleiche Theile, verbindet die Theilpunkte mit dem Punkte p_n' , welche Linien die Senkrechte $g'h'$ in den gesuchten Mittelpunkten der Meridiane schneiden. In Fig. 16 bildet der gezeichnete Meridian mit dem Hauptmeridiane einen Winkel von 45° . Sämmtliche Meridiane besitzen zum Hauptmeridiane je zwei und zwei eine symetrische Lage, wesshalb ihre Mittelpunkte gleichweit von g' entfernt sind. Derjenige Meridian, dessen Ebene auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht, schneidet die Bildebene in der Geraden $E'F'$ durch deren Endpunkte das Bild dieses Meridians hindurchgehen muss, der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in g' .

Ableitung der Fundamentalformeln für die stereographische Horizontalprojection.

Da bei der constructiven Ausführung eines Kartennetzes immer unvermeidliche Constructionsfehler gemacht werden, so ist es zweckmässig auch für diesen Fall die Fundamentalformeln abzuleiten, nach welchen sowohl die Parallelkreise als auch die Meridiane unmittelbar berechnet und alsdann gezeichnet werden können.

Fundamentalformeln für die Parallelkreise. Für diese bleiben die Formeln I, II, III (Seite 17) vollständig unverändert und ist in denselben $\delta = P_n''Q''$ (Fig 15) d. h. gleich der Poldistanz des Ortes Q zu setzen, welcher den Mittelpunkt der Karte einnimmt während ϱ die Poldistanz der Parallelkreise ist. Da $\varrho = 90^\circ - \varphi$, wenn φ die Breite der Parallelkreise bezeichnet, so können die Formeln auch noch folgendermassen geschrieben werden:

$$(XVII) \quad e' = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + 90^\circ - \varphi) \quad e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + \varphi - 90^\circ)$$

$$(XVIII) \quad d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{2 \operatorname{Cos} \frac{\delta + 90^\circ - \varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta + \varphi - 90^\circ}{2}} = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Sin} \varphi}$$

$$(XIX) \quad r = \frac{R \cos \varphi}{2 \cos \frac{\delta + 90^\circ - \varphi}{2} \cos \frac{\delta + \varphi - 90^\circ}{2}} = \frac{R \cos \varphi}{\cos \delta + \sin \varphi}$$

für den Aequator ist $\varphi = 0$ also

$$(XVIIa) \quad e' = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + 90^\circ) \quad \text{und} \quad e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta - 90^\circ)$$

$$(XVIIIa) \quad d = \frac{R \sin \delta}{\cos \delta} = R \operatorname{Tg} \delta$$

$$(XIX a) \quad r = \frac{R}{\cos \delta}$$

Will man in eine Weltkarte den Polarkreis und den einen Wendekreis einzeichnen, so setze man in den Formeln (XVII) (XVIII) (XIX) $\varphi = 23^\circ 27' 20''$ und $\varphi = 66^\circ 32' 40''$, wodurch man die entsprechenden Werthe von e' e d r erhält.

Für die südlichen Parallelkreise, welche grössere Radien als der Aequator besitzen, ist es zweckmässig ausser dem Punkte c (Fig. 17), welchen man durch Berechnung der Distanz Mc erhält, noch die Schnittpunkte g und h des Parallelkreises mit dem Grenzkreise der Karte zu bestimmen. Diess geschieht am einfachsten durch Berechnung der Coordinaten MF und $Fh = Fg$ der Punkte h und g oder durch Bestimmung des Winkelwerthes $LMh = \alpha$. Aus dem bei E rechtwinkligen Dreieck FEM folgt:

$FM = x = \frac{ME}{\cos(90^\circ - \delta)} = \frac{ME}{\sin \delta}$, wenn δ die Poldistanz des Ortes Q bedeutet, oder da $ME = R \sin \varphi$

$$(XX) \quad x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta} \quad (\varphi = \text{der südl. Breite des Parallelkreises}).$$

Zur Berechnung von y wendet man die Mittelpunkts Gleichung des Kreises $AP_n BP_s$ an. Es ist

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 \delta}}$$

$$(XXI) \quad y = \frac{R}{\sin \delta} \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}$$

Endlich ergibt sich der Winkel $LMh = \alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}}$$

$$(XXII) \quad \operatorname{Tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$$

Fundamentalformeln für die Meridiane. Zunächst ergeben sich die Entfernungen $M''p_n$, $M''p_s$ der Pole vom Mittelpunkte der Karte direkt aus Fig. 15 (Seite 41). Es ist $P_n''Q'' = \delta =$ der Poldistanz des Ortes Q , und daher:

$$(XXIII) \begin{cases} M'' p_n'' = O'' M'' \cdot \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} = R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} \\ M'' p_s'' = O'' M'' \cdot \operatorname{Tg} \left(90^\circ - \frac{\delta}{2} \right) = R \operatorname{Cotg} \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Die Distanz der Pole $p_n'' p_s'' = R \left(\operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{\delta}{2} \right)$

$$p_n'' p_s'' = \frac{R \left(\sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}$$

$p_n'' p_s'' = \frac{2R}{\sin \delta}$; also die Entfernung des Fusspunktes g' der Senkrechten, (Fig. 16) auf welcher die Mittelpunkte der Meridiane liegen, vom Pole p_n :

$p_n' g' = \frac{p_n'' p_s''}{2} = \frac{R}{\sin \delta}$ und die Entfernung dieser Geraden vom Mittelpunkte der Karte:

$$M' g' = p_n' g' - p_n' M' = \frac{R}{\sin \delta} - R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2}$$

$$M' g' = R \left(\frac{1}{\sin \delta} - \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}} \right)$$

$$M' g' = \frac{R \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}$$

$$(XXIV) M' g' = \frac{R \cos \delta}{\sin \delta} = R \operatorname{Cotg} \delta$$

Um die Entfernung $g' h'$ des Mittelpunktes irgend eines Meridianes, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ einschliesst, vom Fusspunkte g' der Senkrechten $g' h'$, sowie den Radius $h' p_n' = r$ des Meridianes zu berechnen, betrachte man das rechtwinklige Dreieck $h' g' p_n$ in welchem $\sphericalangle g' p_n' h' = 90^\circ - \lambda$ ist. Es ist

$$g' h' = p_n' g' \cdot \operatorname{Tg} (90^\circ - \lambda)$$

$$(XXV) g' h' = y = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$$

Ferner ergibt sich $h' p_n' = r = \frac{p_n' g'}{\cos (90^\circ - \lambda)}$

$$(XXVI) r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$$

Die Distanz $g' h'$ ist vom Punkte g' aus nach oben und unten aufzutragen und können mit demselben Halbmesser gleichzeitig zwei Meridiane beschrieben werden. Aus Fig. 16 lässt sich ferner der Winkel

β berechnen, welchen die zur Bestimmung des Mittelpunktes h' dienende Gerade $h'M'$ mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist

$$\text{Cotg } \beta = \frac{M'g'}{g'h'} = \frac{R \cdot \text{Cotg } \delta \cdot \text{Sin } \delta}{R \text{ Cotg } \lambda}$$

$$(XXVII) \text{ Cotg } \beta = \text{Cos } \delta \text{ Tg } \lambda$$

Man kann den Werth von r auch mittelst der Fundamentalformel IIIa (Seite 17) erhalten, wenn man in diese die entsprechenden

Werthe von δ und ϱ einsetzt. In Fig. 18 ist P_nCP_n ein beliebiger Meridian, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ bildet. AB der Aequator und R der Pol des Meridianes, für welchen $QR = \Delta$ die Entfernung vom Gegenpunkte Q des Auges ist. Diess ist aber der für δ in Gleichung IIIa zu substituierende Werth. Es ergibt sich aus dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck AQR , dessen Katheten $AQ = \varphi = 90^\circ - \delta$ und $AR = AC + CR = \lambda + 90^\circ$ gegeben sind.

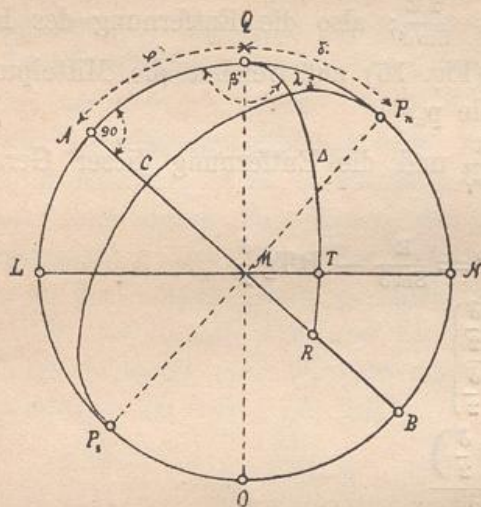


Fig. 18.

(AR kann auch $= \lambda - 90^\circ$ sein.) Es ist

$$\text{Cos } \Delta = \text{Cos } (90^\circ - \delta) \text{Cos } (90^\circ + \lambda)$$

$$\text{Cos } \Delta = - \text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda \quad \text{Im vorliegenden Falle ist } \Delta$$

ein stumpfer Winkel, also allgemein:

$$(XXVIII) \text{ Cos } \Delta = \text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung IIIa und beachtet man gleichzeitig, dass für jeden Meridian der Bogenhalbmesser $\varrho = 90^\circ$ ist,

$$\text{so ergibt sich: } r = \frac{R \text{Sin } 90^\circ}{\text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda + \text{Cos } 90^\circ} = \frac{R}{\text{Sin } \delta \text{Sin } \lambda} \quad (\text{wie oben.})$$

Aus demselben Dreieck AQR (Fig. 18) kann man auch die Gleichung XXVII erhalten, durch welche sich der Winkel β ergibt, dessen Maass das Supplement des Bogens LT des Grenzkreises der Karte ist; die horizontale Projektion $L'T'$ dieses Supplementes (Fig. 16) bestimmt die Richtung der Geraden $M'h'$. Aus Fig. 18 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Tg } AR &= \text{Sin } \varphi \cdot \text{Tg } \beta' \\ \text{Tg } (90^\circ + \lambda) &= \text{Cos } \delta \text{ Tg } \beta' \\ \text{Tg } \beta' &= - \frac{\text{Cotg } \lambda}{\text{Cos } \delta} \\ \frac{1}{\text{Cotg } \beta'} &= - \frac{1}{\text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta} \\ \text{Cotg } \beta' &= - \text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta \text{ oder da } \beta = 180^\circ - \beta' \\ \text{Cotg } \beta &= - \text{Cotg } \beta' = \text{Tg } \lambda \text{ Cos } \delta \text{ (wie oben). —} \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich nach Gleichung IIa (Seite 17) die Entfernung d des Centrums des Meridianes vom Mittelpunkte der Karte. Es ist

$$(XXIX) \quad d = \frac{R \text{Sin } A}{\text{Cos } A} = R \text{Tg } A$$

Nach Gleichung XXVIII berechnet man die Winkelgrösse Δ und substituirt ihren Werth in Gleichung (XXIX) wodurch d erhalten wird. —

Wir haben noch den Fall zu erwähnen, in welchem der Mittelpunkt des Meridianes ausserhalb des Blattes fällt und der letztere durch drei Punkte zu bestimmen ist. Da die Ebene eines Meridianes durch die Erdaxe geht, so schneidet sie die Bildebene in einer Geraden $J'K'$, (Fig. 16) welche durch das Centrum der Karte geht und den Grenzkreis der Karte in den Punkten J' und K' trifft. Mittelst den Punkten $J'p_n'K'$ kann der Meridian gezeichnet werden und man hat daher nur den Winkel $L'M'J' = \alpha$ zu berechnen, welchen die Gerade $J'K'$ mit dem Hauptmeridiane bildet. Aus dem bei

L'' rechtwinkligen sphärischen Dreieck $P_n''L''J''$ (Fig. 15), in welchem $P_n''L'' = 90^\circ + \delta$ und $\sphericalangle L''P_n''J'' = \lambda$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \text{Tg } L''J'' &= \text{Sin } P_n''L'' \cdot \text{Tg } \lambda \text{ oder da } Bg L''J'' = L'J' = \alpha \text{ ist} \\ \text{Tg } \alpha &= \text{Sin } (90^\circ + \delta) \text{ Tg } \lambda \end{aligned}$$

Fig. 15.

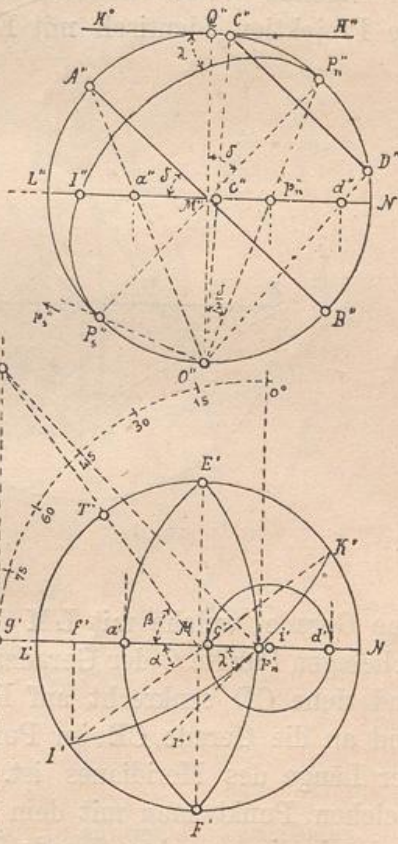


Fig. 16.

$$(XXX) \operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda.$$

Die Abscisse $M'f'$ und Ordinate $f'J'$ des Punktes J' ergeben sich nach den Gleichungen (XXXI) $M'f' = x = R \operatorname{Cos} \alpha$ und $f'J' = y = R \operatorname{Sin} \alpha$.

Wir werden später ein Verfahren kennen lernen, beliebige andere Punkte des Meridianes $J'p_n'K'$ als Durchschnittspunkte mit einem zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreise zu bestimmen, so dass der Meridian mit dem Peripheriezirkel auch dann gezogen werden kann, wenn der Durchmesser der Karte sehr gross ist.

Die Gerade JK (Fig. 16) kann gestützt auf Formel (XXX) auch auf folgende Weise construirt werden: Es sei Fig. 19 in Bezug auf die Projektion identisch mit Fig. 16, LN der Hauptmeridian, P_nP

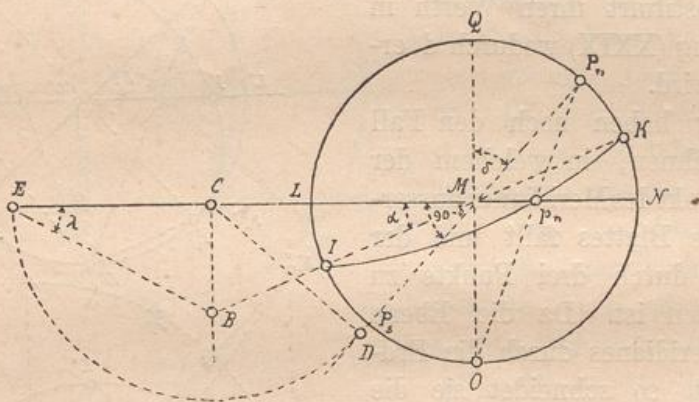


Fig 19.

eine Gerade, welche mit LM den Winkel $90^\circ - \delta$ bildet. In einem beliebigen Punkte C der Geraden LM errichte man die Senkrechte CB und ziehe CD senkrecht auf P_nP_s , trage die Distanz CD nach CE , und an die Gerade CE im Punkte E den Winkel λ , welcher gleich der Länge des Meridianes ist. EB und CB schneiden sich in B , welchen Punkt man mit dem Mittelpunkte M der Karte verbindet, wodurch die gesuchte Gerade JK erhalten wird, denn es ist:

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{CB}{CM} = \frac{EC \operatorname{Tg} \lambda}{CM} = \frac{CD \operatorname{Tg} \lambda}{CM}$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Sin} (90^\circ - \delta) \operatorname{Tg} \lambda$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{wie oben.})$$

Um das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, von welchem $\delta \gamma \vartheta$ und ϱ (Fig. 7), gegeben ist, wendet man unmittelbar die

Formeln V, VI, VII (Seite 19) an, mit welchen die Werthe von ω und ε berechnet werden. Dadurch ergibt sich die Richtung der Geraden MG (Fig. 7), auf welcher der Mittelpunkt m des gesuchten Kreises liegt. Man berechnet nun die Werthe von e , d und r nach den Gleichungen I, II, III, (Seite 17) und kann alsdann den Kreis construiren.

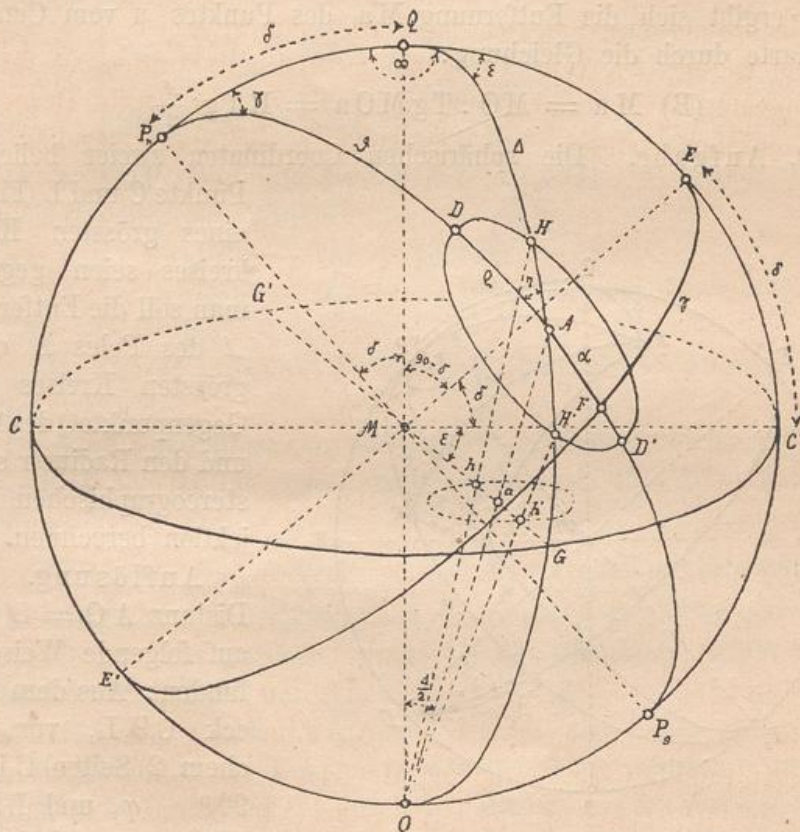


Fig. 7.

Hierher gehören auch die Lösungen folgender 3 Aufgaben:

1. Aufgabe. Gegeben sind die sphärischen Coordinaten eines Punktes A (Fig. 7), der Kugel, als welche wir $EF = \gamma$ und $AF = \alpha$ annehmen wollen, [$\gamma =$ dem Winkel, welchen der Meridian des Punktes A mit dem Hauptmeridiane einschliesst, $\alpha =$ der geog. Breite des Ortes A] man soll die stereographische Projektion a des Punktes A bestimmen.

Auflösung. Zunächst ergibt sich $P_n A = \vartheta = 90^\circ - \alpha$ und man erhält mittelst den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Werthe von ω und ε . Durch den Winkel ε ist die Richtung MG der Geraden bestimmt, auf welcher die Projektion a des Punktes liegt. Mittelst des Sinussatzes wird nun die Entfernung A des Punktes A vom Gegenpunkte Q des Auges berechnet, es ist:

$$(A) \sin A = \frac{\sin \vartheta \sin \gamma}{\sin \omega}$$

ferner ergibt sich die Entfernung Ma des Punktes a vom Centrum der Karte durch die Gleichung:

$$(B) Ma = MO \cdot \text{Tg} MO a = R \text{Tg} \frac{A}{2}$$

2. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten zweier beliebiger Punkte C und L (Fig. 37)

eines grössten Kugelkreises seien gegeben, man soll die Entfernung A des Poles A dieses grössten Kreises vom Gegenpunkte Q des Auges und den Radius r seiner stereographischen Projektion berechnen. —

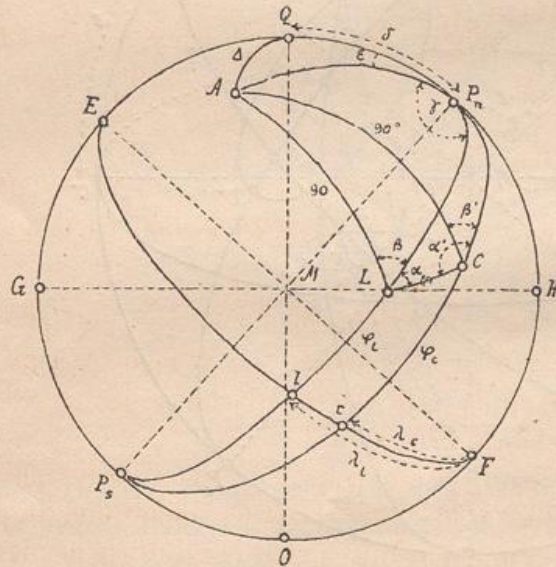


Fig. 37.

Auflösung. Die Distanz $AQ = A$ wird auf folgende Weise gefunden: Aus dem Dreieck $CP_n L$, von welchem 2 Seiten $CP_n = 90^\circ - \varphi_c$ und $LP_n = 90^\circ - \varphi_l$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $CP_n L$ gegeben

ist, erhält man mittelst den Neperschen Analogien die Winkel α und α' .

$$(C) \begin{cases} \text{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha) = \frac{\cos \frac{1}{2} (P_n L - P_n C)}{\cos \frac{1}{2} (P_n L + P_n C)} \text{Cotg} \frac{CP_n L}{2} \\ \text{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2} (P_n L - P_n C)}{\sin \frac{1}{2} (P_n L + P_n C)} \text{Cotg} \frac{CP_n L}{2} \end{cases}$$

Durch diese sind auch die Winkel β und β' bekannt.

$$D) \beta = 90^\circ - \alpha; \beta' = \alpha' - 90^\circ$$

und man kann aus $\triangle AP_nL$ oder aus $\triangle AP_nC$, in welchen zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Seite AP_n berechnen. Durch Anwendung des Cosinussatzes auf diese beiden Dreiecke, in welchen $AL \perp AC = 90^\circ$ ist, ergeben sich die Gleichungen:

$$(E) \begin{cases} \cos AP_n = \sin LP_n \cos \beta \\ \cos AP_n = \sin CP_n \cos \beta' \end{cases}$$

ferner ist:

$$(F) \begin{cases} \sin AP_nL = \sin \gamma = \frac{\sin \beta \sin AL}{\sin AP_n} = \frac{\sin \beta}{\sin AP_n} \\ \sin AP_nC = \sin \gamma' = \frac{\sin \beta'}{\sin AP_n} \end{cases}$$

In $\triangle AQP_n$ sind nun zwei Seiten AP_n , $QP_n = \delta$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$(G) \begin{cases} \varepsilon = 180^\circ - (\lambda_1 + \gamma) \text{ oder} \\ \varepsilon = 180^\circ - (\lambda_c + \gamma') \end{cases} \text{ bekannt, und kann } \angle A = \mathcal{A}$$

nach der Gleichung:

$$(H) \cos \mathcal{A} = \cos AP_n \cos \delta + \sin AP_n \sin \delta \cos \varepsilon$$

erhalten werden.

Da der Bogenhalbmesser eines grössten Kreises der Kugel $= 90^\circ$ ist, so wird der Radius seiner stereographischen Projektion nach der Gleichung:

$$(J) r = \frac{R}{\cos \mathcal{A}} \text{ berechnet, in welche Gleichung IIIa übergeht.}$$

3. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten der Eckpunkte eines Kugeldreieckes sind gegeben, man soll die Oberfläche seiner stereographischen Projektion berechnen.

Auflösung. Nach Aufgabe 1 werden zuerst die stereographischen Projektionen der Eckpunkte des Dreieckes bestimmt und ihre Coordinaten in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Karte gehendes rechtwinkliges Axensystem ermittelt (die Ordinatenaxe lässt man mit dem Hauptmeridiane zusammenfallen). Mit den letzteren können die Sehnenlängen der stereographischen Projektionen der Kreisbogen, sowie die Oberfläche des Sehnendreieckes berechnet werden. Ferner ergeben sich nach Aufgabe 2 die Radien der stereographischen Kreisbogen, durch diese und die Sehnenlängen sind auch die Centriwinkel der 3 Kreissectoren bestimmt, deren Oberfläche nun berechnet werden kann. Zieht man von den Sektoren die drei Mittelpunktsdreiecke ab, so ergeben sich die Oberflächen der Kreisabschnitte, die zu dem Sehnendreieck zu adiren sind. Es wird dadurch die Gesamt-

oberfläche der stereographischen Projektion des sphärischen Dreieckes erhalten. —

Für das sphärische Dreieck Lissabon-Constantinopel-Petersburg wurden folgende Dreiecksseiten gefunden:

$$LC = p = 29^{\circ} 7' 33'', LP = c = 32^{\circ} 32' 8'', CP = l = 18^{\circ} 57' 18''$$

Nach den Gleichungen C bis J der vorigen Aufgabe ergeben sich die Radien ihrer stereographischen Projektionen wie folgt:

$$r_p = 3,157167 = 5318,33 \text{ g. Meilen}; r_c = 2,358500 = 3972,96 \text{ g. M.}$$

$$r_l = 11,98233 = 20184,57 \text{ g. M.}$$

Ferner erhält man folgende den Sehnen lc, lp, cp entsprechende Centriwinkel:

$$\nu_p = 4^{\circ} 42' 12'', \nu_c = 7^{\circ} 0' 2'', \nu_l = 0^{\circ} 47' 40''$$

Die Oberfläche des Sehnendreieckes ist:

$$F = \sqrt{\frac{S}{2} \left(\frac{S}{2} - p\right) \left(\frac{S}{2} - c\right) \left(\frac{S}{2} - l\right)} = 60485,88 \square \text{ M.}$$

die Oberflächen der 3 Kreisabschnitte sind: $A_p = 1352,30$

$$A_c = 2415,70$$

$$A_l = 639,00$$

Also der Inhalt der stereogr. Projektion

$$\text{des sphärischen Dreieckes } O = 64892,88$$

Nach der Formel von L'Huillier ergibt sich der sphärische Excess ε des Kugeldreieckes:

$$\text{Tg } \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\text{Tg } \frac{S}{4} \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - p\right) \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - c\right) \text{Tg } \frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - l\right)},$$

in dieser ist $S = p + c + l =$ der Summe der Seiten des sphärischen Dreieckes. Man erhält

$\varepsilon = 4^{\circ} 54' 56'' = 17696''$ und somit die Oberfläche des sphärischen Dreieckes

$$O' = \frac{R^2 \pi \varepsilon}{180} = \frac{859,437^2 \cdot 3,14159 \cdot 17696}{648000} = 63369,13 \text{ geogr. Q.-Meilen.}$$

Die stereographische Projektion ist daher um 1523,75 Q.-Meilen oder um 2,4 % grösser als die Oberfläche des sphärischen Dreieckes. (Für den ganzen Kugelabschnitt beträgt die Flächendifferenz 2 %).*)

Vor Kurzem wurden vom Verfasser dieses Buches vier transparente Sternkarten von einem Meter Durchmesser veröffentlicht, die unter dem Titel „Ansichten des Sternhimmels“ erschienen sind, bei welchen die stereographische Horizontalprojektion zur An-

*) Der Radius der stereog. Projektion desjenigen Kugelkreises, welcher den Kugelabschnitt begrenzt auf dem sich Europa befindet und der daher Grenzkreis der Karte ist, wurde gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieser Kreises angenommen.

wendung kam. Die Karten stellen die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne dar, wie sie von einem Bewohner des mittleren Europa gesehen werden. Bei ihrer Construction wurde als Bildebene der Horizont eines Bewohners des 48. Parallelkreises angenommen und um die Sterne genau eintragen zu können die Parallelkreise und Meridiane von Grad zu Grad gezogen. Für die nördlichen Parallelkreise wurden nach den Gleichungen I, IIa, IIIa, die Werthe von e d und r berechnet, für die südlichen Parallelkreise nach den Gleichungen (XX) und (XXII) die Werthe x und α , für die Meridiane nach Gleichung (XXIV) die Distanz $M'g'$; für die Meridiane, bei welchen $\lambda \begin{matrix} > 0^\circ \\ < 56^\circ \end{matrix}$ ist nach den Gleichungen (XXX) und (XXXI) die Werthe von α und x und endlich für die Meridiane, bei welchen $\lambda > 50^\circ$ ist nach den Gleichungen (XXV) und (XXVI) die Werthe von $g'h' = y$ und r .

Da das auf solche Weise erhaltene Kartennetz auch zur Construction einer Karte des mittleren Europa verwendet werden kann, so seien die zu seiner Construction dienenden Zahlenwerthe in nachfolgender Tabelle angegeben.

Für $R = 0,5$ (Radius der Kugel) und $\delta = 42^\circ$ ergaben sich folgende Werthe:

Tabelle zur Construction einer Karte des mittleren Europa nach der stereog. Horizontalprojektion.
Parallelkreise.

ϱ	$e = R \cdot \text{Tg} \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$ für $\varrho < \delta$	$d = \frac{R \text{Sin} \delta}{\text{Cos} \delta + \text{Cos} \varrho}$	$r = \frac{R \text{Sin} \varrho}{\text{Cos} \delta + \text{Cos} \varrho}$	ϱ	$e = R \cdot \text{Tg} \frac{1}{2}(\varrho - \delta)$ für $\varrho > \delta$	$d = \frac{R \text{Sin} \delta}{\text{Cos} \delta + \text{Cos} \varrho}$	$r = \frac{R \text{Sin} \varrho}{\text{Cos} \delta + \text{Cos} \varrho}$
0°	0,1919	0,1919	0,0000	60°	-0,0792	0,2691	0,3483
5	0,1673	0,1922	0,0250	65	-0,1017	0,2870	0,3887
10	0,1434	0,1933	0,0502	70	-0,1247	0,3083	0,4330
15	0,1200	0,1953	0,0755	75	-0,1481	0,3339	0,4820
20	0,0972	0,1988	0,1016	80	-0,1722	0,3649	0,5371
25	0,0747	0,2028	0,1281	85	-0,1969	0,4030	0,5999
30	0,0526	0,2079	0,1554	90	-0,2226	0,4502	0,6728
35	0,0306	0,2142	0,1836	95	-0,2493	0,5100	0,7593
40	0,0087	0,2217	0,2130	100	-0,2771	0,5875	0,8646
45	-0,0131	0,2307	0,2438	105	-0,3064	0,6908	0,9972
50	-0,0350	0,2414	0,2764	110	-0,3372	0,8341	1,1713
55	-0,0570	0,2541	0,3111				

Parallelkreise.

Südl. Breite φ	Entfernung e	Abzisse $x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta}$	$Tg \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$	Südl. Breite φ	Entfernung e	Abzisse $x = \frac{R \sin \varphi}{\sin \delta}$	$Tg \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\right)^2 - 1}$
5°	-0,2493	0,0651	82° 31'	25°	-0,3700	0,3158	50° 50'
10	-0,2771	0,1297	74 .58	30	-0,4049	0,3736	41 .39
15	-0,3064	0,1934	67 .15	35	-0,4424	0,4286	31 .00
20	-0,3372	0,2555	59 .16	40	-0,4828	0,4803	16 .08

Meridiane $\lambda < 56^\circ$

$M'g' = R \operatorname{Cotg} \delta = 0,5553$

λ	$Tg \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda$ α	$M'f = R \operatorname{Cos} \alpha$ x	λ	$Tg \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda$ α	$M'f = R \operatorname{Cos} \alpha$ x
0°	0° 00'	0,5000	30°	23° 13'	0,4595
5	3.43	0,4989	35	27.29	0,4435
10	7.28	0,4957	40	31.57	0,4242
15	11.16	0,4903	45	36.37	0,4013
20	15.08	0,4826	50	41.32	0,3743
25	19.07	0,4724	55	46.42	0,3431

Meridiane $\lambda > 50^\circ$

λ	$g'h' = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$ y	$r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$	λ	$g'h' = \frac{R \operatorname{Cotg} \lambda}{\sin \delta}$ y	$r = \frac{R}{\sin \delta \sin \lambda}$
55°	0,5232	0,9122	75°	0,2002	0,7726
60	0,4314	0,8628	80	0,1318	0,7588
65	0,3484	0,8245	85	0,0654	0,7501
70	0,2720	0,7962	90	0,0000	0,7472

Um die Ekliptik in die Karten einzuzichnen, wurden zur Berechnung der Werthe ε e d r die Gleichungen V, VI, VII, I, II, III angewandt.

Wie schon früher erwähnt, ist für die Frühlingsgestirne der 180te,

für die Sommergestirne der 270^{te} , für die Herbstgestirne der 360^{te} und für die Wintergestirne der 90^{te} Declinationskreis Hauptmeridian des Beobachters und sind daher in die genannten Gleichungen für $\delta \gamma \vartheta \varrho$ (Fig. 7) folgende Werthe zu substituiren:

für die Frühlingsgestirne : $\delta = 42^{\circ}$, $\gamma = 90^{\circ}$, $\vartheta = 23^{\circ}27'20''$, $\varrho = 90^{\circ}$
 „ „ Sommergestirne : „ „ $\gamma = 0^{\circ}$ „ „ „ „ „ „
 „ „ Herbstgestirne : „ „ $\gamma = 270^{\circ}$ „ „ „ „ „ „
 „ „ Wintergestirne : „ „ $\gamma = 180^{\circ}$ „ „ „ „ „ „

Da $R = 0,5$ Meter angenommen wurde, so ergaben sich für ε e d und r folgende Werthe:

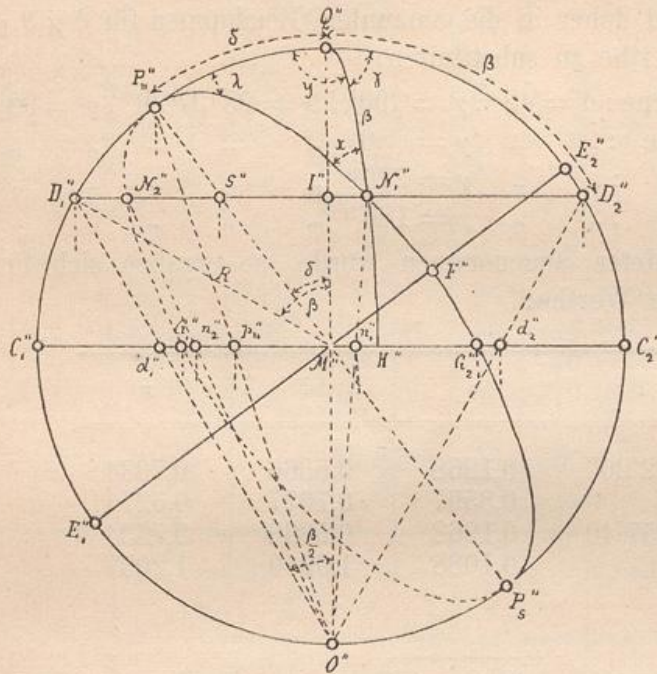
γ	ε	e	d	r
90°	$147^{\circ}2'20''$	0,1968	0,5366	0,7334
0°	0°	0,3597	0,1677	0,5274
270°	$212^{\circ}57'40''$	0,1968	0,5366	0,7334
180°	0°	0,1088	1,0949	1,2037

Stereographische Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes wenn die Bildebene mit der Ebene seines Grenzkreises parallel angenommen wird.

Um einen beliebigen Erdtheil z. B. Europa, Afrika etc. oder ein beliebiges Land wie Frankreich, Deutschland, die Schweiz etc. nach der stereographischen Projektionsmethode darzustellen, denke man sich den betreffenden Erdtheil von einem kleinen Kugelkreise umschlossen, und verbinde den Pol dieses Kreises, welcher gleichzeitig Mittelpunkt des Landes ist mit dem Centrum der Kugel. Der so erhaltene Durchmesser wird als Augenaxe und sein Endpunkt als Augenpunkt der Projektion angenommen. In Fig. 20 ist Q'' der Mittelpunkt des Landes, das von dem Kugelkreise $D_1'' D_2''$ umschlossen wird; $C_1'' C_2''$ die Bildebene, welche mit der Ebene des Kreises $D_1'' D_2''$ parallel ist und $O'' Q''$ die Augenaxe, ferner $Q'' P_n'' O'' P_s''$ der durch die Augenaxe und die Erdaxe gehende grösste Kreis, dessen stereographische Projektion die Gerade $C_1 C_2$ ist, die wir den Hauptmeridian der Projektion genannt haben.

Um alsdann das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, muss

Fig. 20.



vor allem die Distanz $P_n'' Q'' = \delta$ des Erdpoles vom Gegenpunkte des Auges und der Bogenhalbmesser $D_1'' Q'' = \beta$ des Grenzkreises der Karte gegeben sein.

Ferner für einen Meridian der Winkel λ , welchen seine Ebene mit der Ebene des Hauptmeridianes bildet, für einen Parallelkreis

der Bogenhalbmesser ϱ , mit welchem man sich denselben vom Nordpol P_n der Kugel beschreiben denken kann und für einen beliebigen Kugelkreis endlich die aus Fig. 7 (Seite 18) ersichtlichen Elemente δ γ ϑ und ϱ .

Um einen Meridian $G_1'' P_n G_2'' P_s''$ (Fig. 20) zu projicieren, berechne man zunächst den Radius der Basis

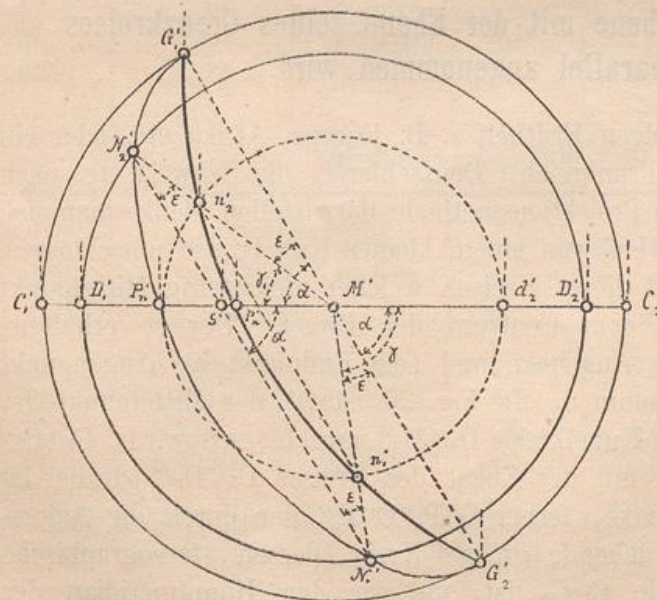


Fig. 21.

Bemerkung. In Fig. 21 ist bei P_n' der Buchstabe d_1' als Endpunkt des Durchmessers $d_1' d_2'$ zu setzen.

des Kugelabschnittes $D_1''Q''D_2''$. Es ergibt sich aus dem Dreiecke $D_1''I''M''$:

$D_1''I'' = R \cdot \sin \beta$ (XXXII) ($R =$ dem Radius der Kugel), ferner erhält man aus dem Dreiecke $d_1''M''O''$ den Radius der stereographischen Projektion dieses Kreises, welcher der Grenzkreis $d_1 d_2$ der Karte ist.

$$d_1''M'' = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} \quad (\text{XXXIII}).$$

Die Ebene des Meridianes $P_n''G_2''P_s''G_1''$ schneidet nun die parallelen Ebenen $D_1''D_2''$ und $C_1''C_2''$ in den parallelen Geraden ($N_1''N_2''$, $N_1'N_2'$) und ($G_1''G_2''$, $G_1'G_2'$), von welchen die letztere in der Bildebene liegt, also gleichzeitig ihre stereographische Projektion ist. Mit ihr ist auch die Gerade ($n_1''n_2''$, $n_1'n_2'$) parallel, welche die stereographische Projektion von N_1N_2 ist, denn die Ebene ON_1N_2 schneidet auch die parallelen Ebenen D_1D_2 und C_1C_2 in parallelen Linien.

Vor Allem kann man nun mit Gleichung XXX (Seite 42) den Winkel α berechnen, welchen die Gerade $G_1'G_2'$ (Fig. 21) mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist:

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda \quad (\text{XXX}).$$

Da die Ebene des zu projicirenden Meridianes durch die Erdaxe $P_n P_s$ geht, so muss ihr Durchschnitt N_1N_2 mit der Ebene D_1D_2 des Kugelkreises durch den Punkt S gehen, in welchem die Erdaxe die Ebene dieses Kreises trifft, und die horizontale Projektion $N_1'N_2'$ dieses Durchschnittes geht durch den Punkt S' des Hauptmeridianes. Die Entfernung $S'M'$ ergibt sich aus dem Dreieck $S''I''M''$, in welchem

$$S''I'' = I''M'' \cdot \operatorname{Tg} \delta = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta$$

Es ist also auch:

$$S'M' = R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta.$$

Ferner kann aus dem Dreieck $M'S'N_1'$, in welchem zwei Seiten $S'M'$ und $N_1'M'$, sowie der Winkel α gegeben sind, der Winkel ε berechnet werden.

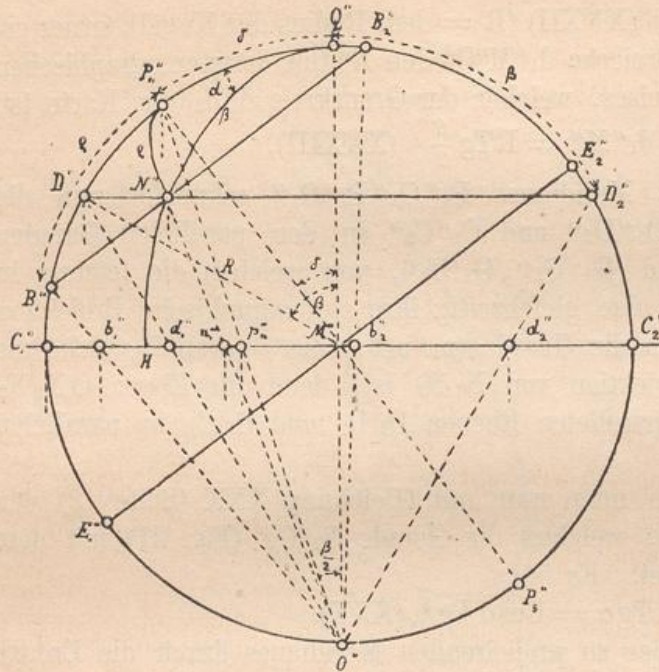
$$\sin \varepsilon = \frac{\sin \alpha \cdot S'M'}{M'N_1'} = \frac{\sin \alpha \cdot R \cdot \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Tg} \delta}{R \sin \beta} \quad (M'N_1' = D_1''I'')$$

$$\sin \varepsilon = \sin \alpha \operatorname{Cotg} \beta \operatorname{Tg} \delta \quad (\text{XXXIV}).$$

Der Winkel ε wird an die Gerade G_1G_2 auf beiden Seiten ange-
tragen, und die Richtungen der Geraden $M'n_1'$ und $M'n_2'$ erhalten,
welche den Grenzkreis der Karte $d_1'd_2'$ in zwei Punkten $n_1 n_2$ der
stereogr. Projektion des Meridianes treffen. Zwei andere Punkte des
Meridianes werden erhalten, wenn man den Winkel ε für einen zweiten
Kugelkreis berechnet, der mit D_1D_2 den Pol Q gemeinschaftlich hat,

und einen Bogenhalbmesser besitzt, welcher kleiner als β ist. Nach

Fig. 22.



den Gleichungen (XXXIII) und (XXXIV) ergeben sich die neuen Werthe von $d_1 M$ und ϵ , welche man entsprechend aufträgt.

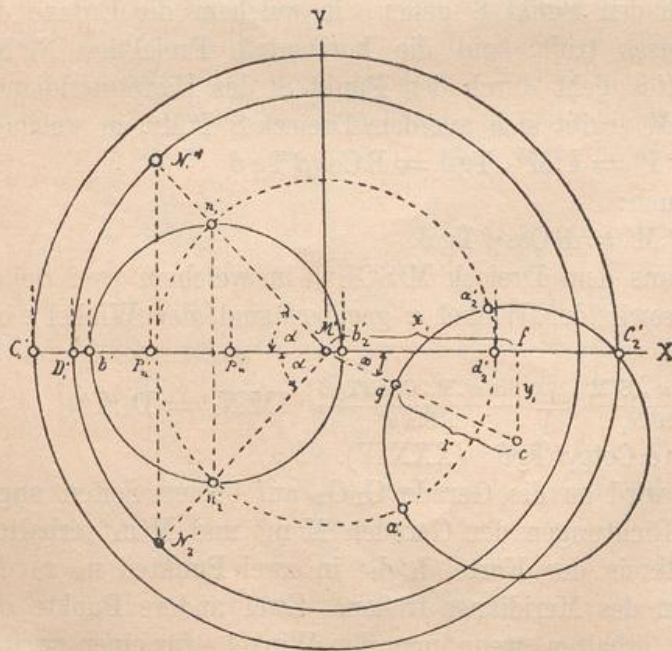
Man kann auch die Richtung der Geraden $M'N_1'$ und $M'N_2'$ durch die Winkel γ und γ_1 bestimmen, welche sie mit dem Hauptmeridiane bilden. Es ist

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \epsilon \\ \gamma_1 = \alpha - \epsilon \end{cases} \text{(XXXV)}$$

Ein zweites Verfahren, den Winkel ϵ zu berechnen ist folgendes:

$\epsilon = \gamma - \alpha$
und da α bekannt ist, so ist zur Bestimmung von ϵ noch γ zu berechnen. Der Winkel γ ist aber gleich dem sphärischen Winkel $N_1'' Q'' D_2''$

Fig. 23.



Bemerkung. In Fig. 22 ist statt D'' , D_1'' zu setzen; in Fig. 23 bei P_n' der Buchstabe d_1' als Endpunkt des Durchmessers $d_1'd_2'$.

(Fig. 20) dessen Werth durch die Gleichung $\gamma = 180^\circ - y$ (XXXVI) bestimmt ist.

Aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem $P_n''Q'' = \delta$, $Q''N_1'' = Q''D_2'' = \beta$, und Winkel λ gegeben sind, kann aber der Winkel y auf folgende Weise berechnet werden:

$$\sin x = \frac{\sin \lambda \sin \delta}{\sin \beta} \quad (\text{XXXVII})$$

und nach den Neper'schen Analogien:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\lambda + x) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{y}{2} \\ \operatorname{Cotg} \frac{y}{2} &= \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\lambda + x) \cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \delta)} \quad (\text{XXXVIII}) \end{aligned}$$

Nachdem man mittelst dieser Gleichung y gefunden hat, berechnet man γ , ε und γ_1 .

Für einen Parallelkreis (Fig. 22 und 23) ist $B_1''B_2''$ die vertikale Projektion, und $P_n''Q'' = \delta$ sowie $P_n''B_1'' = \varrho$ gegeben. Um seine stereographische Projektion zu zeichnen, beachte man, dass sich die Ebenen D_1D_2 und B_1B_2 , welche auf der Ebene des Hauptmeridianes senkrecht stehen, in einer Geraden N_1N_2 schneiden, welche ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht ist. Durch die Endpunkte N_1N_2 dieser Geraden geht der Parallelkreis B_1B_2 , und es muss daher das stereographische Bild des Parallelkreises durch die Endpunkte n_1n_2 ihrer Projektion gehen. n_1n_2 ist parallel mit N_1N_2 und beide stehen senkrecht auf dem Hauptmeridiane, dessen horizontale Projektion die Gerade $C_1'C_2'$ ist, auf welcher die Mittelpunkte sämtlicher Parallelkreise liegen.

Wie oben ergibt sich der Radius $M'd_2'$ des Grenzkreises der Karte:

$$M'd_2' = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} \quad (\text{XXXIII}).$$

Legt man ferner durch die Punkte N_1N_2 und den Gegenpunkt Q des Auges grösste Kreise, so schliessen diese mit dem Hauptmeridiane den Winkel $D_1''Q''N_1'' = \alpha$ ein, welchen auch die Radien $M'n_1'$ und $M'n_2'$ mit dem Hauptmeridiane bilden. Dieser Winkel ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem die drei Seiten δ , β und $P_n''N_1'' = \varrho$ gegeben sind. Es ist:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varrho - \cos \beta \cos \delta}{\sin \beta \sin \delta} \quad (\text{XXXIX})$$

oder nach einer zur Berechnung mit Logarithmen bequemeren Formel

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(\frac{S}{2} - \delta\right) \sin \left(\frac{S}{2} - \beta\right)}{\sin \frac{S}{2} \sin \left(\frac{S}{2} - \varrho\right)}} \quad (\text{XL})$$

Es ist selbstverständlich, dass es nur dann nothwendig ist den Winkel α zu berechnen, wenn der Mittelpunkt der stereographischen Projektion des Parallelkreises ausserhalb des Blattes fällt. Ist dies nicht der Fall, so rechnet man nach Gleichung XVII, XVIII, XIX (Seite 37 u 38) die Werthe von e d und r , von welchen der erstere immer aufgetragen werden kann. Durch die drei Punkte n_1 b_2 n_2 ist der Parallelkreis bestimmt, will man jedoch von ihm noch mehr Punkte haben, so berechnet man für einen zweiten Kugelkreis, für welchen der Bogenhalbmesser kleiner als β ist, ebenfalls den Werth des Winkels α , wodurch sich zwei neue Punkte des Parallelkreises ergeben.

Für einen beliebigen Kugelkreis, für welchen die Grössen δ γ ϱ und ϱ (Fig. 7 Seite 18) gegeben sind, berechnet man nach den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Grössen ω und ε und nach Gleichung I, II, III (Seite 17) e d und r . Denkt man sich alsdann in Fig. 23 den Kreis construirt, so handelt es sich in dem Fall, in welchem der Mittelpunkt c des Kreises ausserhalb des Blattes fällt, darum, seine Durchschnittspunkte $a_1' a_2'$ mit dem Grenzkreise der Karte oder mit einem zu ihm concentrischen Kreise zu bestimmen, dessen Radius r' gegeben ist. Die Coordinaten des Mittelpunktes c des zu construierenden Kreises sind:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= d \cos \omega \\ y_1 &= d \sin \omega \end{aligned} \right\} \text{(XLI)} \quad \text{wenn } d = M'c \text{ die Entfernung}$$

seines Mittelpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten ist. Die Gleichung des Kreises in Bezug auf die Axen MX , MY lautet:

$$(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 = r^2 \quad (1)$$

ferner ist die Gleichung des Kreises $d_1' d_2'$:

$$y^2 + x^2 = r'^2 \quad (2)$$

Die Coordinaten m , n des Durchschnittspunktes beider Kreise ergeben sich, wenn man in Gleichung 1) und 2) an die Stelle der unbestimmten Coordinaten x und y diejenigen des Durchschnittspunktes setzt, und aus beiden Gleichungen die Werthe von n und m ermittelt.

$$\text{Es ist } (n - y_1)^2 + (m - x_1)^2 = r^2 \quad (3)$$

$$n^2 + m^2 = r'^2 \quad (4)$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich

$$-2ny_1 + y_1^2 - 2mx_1 + x_1^2 = r^2 - r'^2$$

$$\text{und } n = \frac{y_1^2 + x_1^2 + r'^2 - r^2 - 2mx_1}{2y_1} \quad (5)$$

Nachdem dieser Werth gehörig reducirt ist (y_1 x_1 r' r sind durch Zahlen gegeben), wird er in Gleichung (4) eingesetzt und aus dieser

m berechnet, endlich ist m in Gleichung (5) zu substituieren, durch welche sich alsdann n ergibt. Sowohl für m als für n erhält man zwei Werthe, von welchen je zwei zusammengehörende die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes a_1' oder a_2' sind. Will man ausser diesen noch zwei Punkte des Kreises bestimmen, so ist die Rechnung für einen zu $d_1'd_2'$ concentrischen Kreis zu wiederholen.

Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach der stereographischen Projektionsmethode.

1) Stereographisches Kartennetz von Europa. Als Gegenpunkt Q des Auges werde derjenige angenommen, dessen geographische Länge $\lambda_1 = 40^\circ$ östlich von Ferro und dessen Breite $\varphi_1 = +52^\circ$ ist. Der 40te Meridian ist dann Hauptmeridian der Karte und die Pol-distanz des Gegenpunktes Q: $\delta = 38^\circ$.

Zunächst ist der Bogenhalbmesser β des Grenzkreises der Karte zu berechnen. Für Europa ergibt sich dieser Winkelwerth, wenn man die Entfernung des Punktes Q ($\lambda_1 = 40^\circ, \varphi_1 = 52^\circ$) von einem ausserhalb Europa liegenden Punkte z. B. R ($\lambda_2 = 90^\circ, \varphi_2 = 60^\circ$) berechnet. Denkt man sich aus dem Punkte Q mit dem Bogenhalbmesser QR einen Kreis beschrieben, so muss durch diesen Europa eingeschlossen sein. Die Entfernung zweier Punkte der Kugeloberfläche ist nach Fig. 24 durch die Gleichung bestimmt:

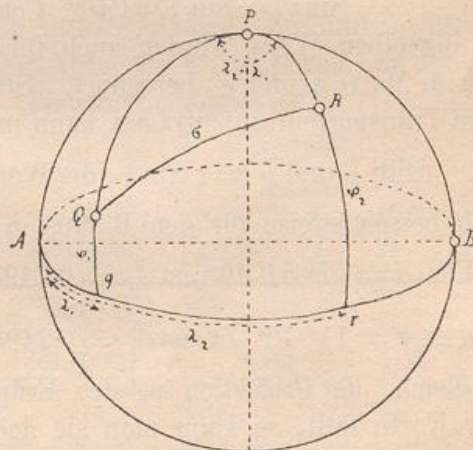


Fig. 24.

$$\begin{aligned} \cos RQ &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \text{oder } \cos \beta &= \sin 52^\circ \sin 60^\circ + \cos 52^\circ \cos 60^\circ \cos 50^\circ \\ \beta &= 28^\circ 19' 14'' \end{aligned}$$

Der Einfachheit wegen kann man $\beta = 28^\circ$ annehmen und erhält alsdann den Radius $d_1 M$ des Grenzkreises der Karte nach Gleichung XXXIII (Seite 51).

Bemerkung. In Fig. 24 ist σ durch β zu ersetzen.

Es ist $d_1 M = R \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2}$ oder für $R = 1$

$$d_1 M = \operatorname{Tg} 14^\circ = 0,249\,328 \quad (\log. = \bar{1}.396\,7711)$$

Will man das Kartennetz von 10° zu 10° berechnen, so hat man um die Meridiane zu konstruieren für λ der Reihe nach folgende Werthe zu setzen:

$$\lambda = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ.$$

Für $\lambda = 10^\circ$ ergibt sich nach Gleichung XXX (Seite 42):

$$\operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Cos} 38^\circ \operatorname{Tg} 10^\circ \quad \text{und} \quad \alpha = 7^\circ 54' 40''$$

ferner nach Gleichung XXXIV (Seite 51):

$$\operatorname{Sin} \varepsilon = \operatorname{Sin} 7^\circ 54' 40''. \operatorname{Cotg} 28^\circ. \operatorname{Tg} 38^\circ \quad \text{und} \quad \varepsilon = 11^\circ 40' 5''$$

Mittelst der Grössen $d_1 M$, α und ε sind zwei Meridianpunkte bestimmt, zwei weitere Punkte ergeben sich für einen zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreis, dessen Bogenhalbmesser β beispielsweise $= 10^\circ$ angenommen wird. Es ist dann:

$$d_1 M = \operatorname{Tg} 5^\circ = 0,0874887$$

Winkel α bleibt unverändert und ist $= 7^\circ 54' 40''$.

Ferner ist nach Gleichung XXXIV:

$$\operatorname{Sin} \varepsilon' = \operatorname{Sin} 7^\circ 54' 40''. \operatorname{Cotg} 10^\circ. \operatorname{Tg} 38^\circ \quad \text{und} \quad \varepsilon' = 37^\circ 34' 44''$$

In derselben Weise werden auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $d_1 M$, α , ε und ε' berechnet. Statt die berechneten Winkel mit dem Transporteur aufzutragen, kann man auch mittelst der Gleichungen $\frac{s}{2} = r \operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{s'}{2} = r \operatorname{Sin} \frac{\varepsilon}{2}$, die Werthe ihrer Sehnen erhalten, welche sich beispielsweise für den Radius $d_1 M = r = 0,249328$ ergeben.

$$\text{Für } \alpha = 7^\circ 54' 40'' \text{ ist } \frac{s}{2} = 0,249328 \operatorname{Sin} 3^\circ 57' 20'', \quad s = 0,034399$$

$$\text{„ } \varepsilon = 11^\circ 40' 5'' \text{ ist } \frac{s'}{2} = 0,249328 \operatorname{Sin} 5^\circ 50' 2'', \quad s' = 0,050686$$

Obgleich die Projektion p_n des Erdpoles ausserhalb den Grenzkreis der Karte fällt, so kann man sie doch bei der Konstruktion der Meridiane verwerthen. Ihre Entfernung vom Mittelpunkte der Karte ist:

$$M p_n = R \operatorname{Tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{Tg} 19^\circ = 0,344328 \quad \text{wenn } R = 1 \text{ ist.}$$

ferner ergibt sich nach Gleichung XXIV (Seite 39)

$$M' g' = R \operatorname{Cotg} \delta = \operatorname{Cotg} 38^\circ = 1,27994,$$

diese Distanz ist aber schon so gross, dass sie wohl nicht mehr aufgetragen werden kann, wesshalb die Mittelpunkte der Meridiane ausserhalb des Blattes fallen.

Berechnung der Parallelkreise. Ihre Bogenhalbmesser sind der Reihe nach:

$$\varrho = 20, 30, 40, 50, 60^\circ.$$

Zur Bestimmung der Parallelkreise dienen die Grössen e, d, r und α . Für $\varrho = 20^\circ$ und $R = 1$ ergibt sich nach den Gleichungen I, II, III (Seite 17)

$$e = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (38^\circ - 20^\circ) = \operatorname{Tg} 9^\circ = 0,15838$$

$$d = \frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ + \cos 20^\circ} = 0,356348, \quad r = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 38^\circ + \cos 20^\circ} = 0,197963$$

Nach Gleichung (XL) (Seite 53) ist:

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(\frac{s}{2} - \delta\right) \sin \left(\frac{s}{2} - \beta\right)}{\sin \frac{s}{2} \sin \left(\frac{s}{2} - \varrho\right)}} = \sqrt{\frac{\sin 5^\circ \sin 15^\circ}{\sin 43^\circ \sin 23^\circ}}$$

$$\alpha = 32^\circ 26' 40''$$

Für $r = 0,249328$ (Radius des Grenzkreises) ergibt sich die Sehne dieses Winkels durch die Gleichung:

$$\frac{s}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2} = 0,249328 \sin 16^\circ 13' 20''$$

$$s = 0,139306.$$

In analoger Weise wurden auch für die übrigen Parallelkreise e d r α und s berechnet. Für den nördlichen Polarkreis ist $\varrho = 23^\circ 27' 20''$ zu setzen. — Nachfolgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Zahlenwerthe, welche zur Konstruktion des Kartennetzes von Europa nach der stereographischen Projektionsmethode dienen.

Meridiane

Radius der Erde $R = 1$, Entfernung des Poles p_n vom Centrum der Karte:
 $M_{p_n} = 0,344328.$

Winkel welchen der Meridian mit dem Hauptmeridiane bildet: λ	Bogenhalbmesser der concentrischen Kreise β	Radien der concent. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α (siehe Gleich. XXX)	Sehne von α für $r = 0,249328$	ε (siehe Gleich. XXXIV)	Sehne von ε für $r = 0,249328$
10°	28°	0,249328	7° 54' 40''	0,034399	11° 40' 5''	0,050686
10	10	0,087489	7 54 40		37 34 44	0,160631
20	28	0,249328	16 0 10	0,069412	23 53 50	0,103239
20	15	0,131653	16 0 10		53 29 54	0,224438
30	28	0,249328	24 27 50	0,105650	37 28 50	0,160208
30	20	0,176327	24 27 50		62 44 23	0,259580
40	28	0,249328	33 28 20	0,143595	54 8 10	0,226912
40	25	0,221695	33 28 20		67 31 50	0,277150

Parallelkreise

Bogenhalb- messer ϱ	e (siehe Gleich. I)	d (siehe Gleich. II)	r (siehe Gleich. III)	α (siehe Gleich. XL)	Sehne von α für $r =$ 0,249328
20°	0,15838	0,356348	0,197963	32°26'40"	0,139306
23°27'20"	0,12761	0,361011	0,233401	39 56 36	0,170319
30°	0,06993	0,372217	0,302290	53 54 40	0,226040
40	—0,01746	0,396166	0,413621	75 55 44	0,306759
50	—0,10510	0,430292	0,535396	100 33 46	0,383562
60	—0,19438	0,477994	0,672375	132 38 8	0,456662

Um in Bezug auf einen bestimmten Massstab in welchem das st. Netz resp. die Karte von Europa gezeichnet werden soll, einen Anhaltspunkt zu bekommen, wollen wir zuerst die Annahme machen, dass der Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser 14° beträgt, also halb so gross ist als der Bogenhalbmesser des Grenzkreises, in der wahren Grösse erscheine. Für $R = 1$ ist der Radius der stereog. Projektion dieses Kreises $d_1 M = \text{Tg } 7^\circ = 0,122785$ und diese Distanz ist auf der Kugel $14 \cdot 15 = 210$ geog. Meilen [: 1° eines grössten Kreises der Erdkugel ist = 15 geog. Meilen, 1 geog. Meile = 7407,407 Meter :]. Um daher die in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe in geog. Meilen zu verwandeln, hat man sie bei dieser Annahme mit $\frac{210}{0,122785} = 1710,313$ zu multipliciren.

Für den Grenzkreis der Karte ist alsdann der Radius der stereog. Projektion = 426,429 Meilen, dieser entspricht seinem Bogenhalbmesser = 420 Meilen und es ergibt sich zwischen beiden ein Unterschied von 6,429 Meilen, um welchen für diesen Fall der Radius der stereographischen Projektion grösser ist als die Länge, die er auf der Kugel repräsentirt.

Diese Differenz ist als Fehler auf die dem Grenzkreise zunächst liegenden $14^\circ = 210$ Meilen zu betrachten.

Der Fehler wird geringer, wenn man die Annahme macht, dass der Radius des Grenzkreises der Karte gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieses Kreises sein soll. Der Radius des Grenzkreises ist $r = 0,249328$ und diese Distanz ist gleich $28 \cdot 15 = 420$ geogr. Meilen zu setzen. Bei dieser Annahme sind alle in obiger Tabelle enthaltenen Längen, wofern sie in geog. Meilen verwandelt werden sollen mit $\frac{420}{0,249328} = 1684,528$ (log. = 3,2264782) zu

multipliciren. Der Radius des zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser = 14° ist, beträgt alsdann 206,834 geog. Meilen, während der Bogenhalbmesser selbst gleich 210 geog. Meilen ist. Der Unterschied beider Dimensionen beträgt bei dieser Annahme auf eine Länge, welche gleich der obigen von 210 geog. Meilen ist, nur 3,166 geog. Meilen, und ist dieselbe der Vorhergehenden daher vorzuziehen.*) Es ist selbstverständlich, dass die Karte resp. ihr Netz nun immer noch in einem bestimmten Massstabe gezeichnet werden kann. Soll derselbe z. B. bei der Karte von Europa = $1 : 3\,000\,000$ sein, so beträgt der Radius des Grenzkreises $\frac{420 \times 7407,407}{3\,000\,000} = 1,037$ Meter, welche eine Länge von 0,249328 Einheiten repräsentiren, der Werth einer zehntels Einheit ist daher $\frac{1,037}{2,49328} = 0,4159$ Meter. Diese Länge kann nun in beliebig kleine Decimaltheile getheilt und der so erhaltene Massstab beim Auftragen der in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe benutzt werden.

Das durch obige Tabelle bestimmte Netz wurde auf Taf. I (siehe folgende Seite), in welcher gleichzeitig das Bonne'sche Netz von Europa enthalten ist, im Massstabe $1 : 40\,000\,000$ gezeichnet.

In diesem kleinen Massstabe finden in Bezug auf die Meridiane für beide Projektionen keine merklichen Abweichungen statt und haben nur die Parallelkreise, deren stereographische Bilder durch punktirte Linien eingezeichnet sind, solche aufzuweisen.

Was die Konstruktion der Meridiane betrifft, so wurde dabei auf folgende Weise verfahren: Mittelst den in Rubrik 3 (Seite 57) angegebenen Radien beschrieb man aus dem Mittelpunkte M der Karte concentrische

*) Man könnte noch beliebige andere Annahmen machen, doch liefern diese alle keine so günstigen Resultate wie die zuletzt genannte Bestimmung. Denkt man sich z. B. über dem Grenzkreise des Kugelabschnittes einen Kegel construirt, dessen Spitze im Augenpunkte liegt und dessen Basiskreis als Durchschnitt einer Ebene erhalten wird, welche mit der Ebene des Grenzkreises parallel ist und durch die Mitte der Höhe des Kugelabschnittes geht, so könnte man den Radius dieses Basiskreises, welcher = 416,022 geog. Meilen ist, gleich dem Radius der st. Projektion des Grenzkreises, = 0,249328 setzen, und würde eine andere Constante erhalten, mit welcher die stereog. Längen zu multipliciren sind. Doch auch diese scheinbar zweckmässige Annahme weist grössere Fehler auf als die oben genannte. Dasselbe gilt auch für den Fall, in welchem die Oberfläche des Kugelabschnittes auf welchem sich Europa befindet gleich der Oberfläche seiner stereog. Projektion gemacht wird. (Durch Rechnung kann man sich davon leicht überzeugen.)

Kreise und liegen auf jedem dieser Kreise je 4 Meridianpunkte. Um sie zu erhalten, wurden zunächst von dem südlichsten und nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes, welcher mit 40° bezeichnet ist, die in Rubrik 5 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α nach a b c d . . . und von diesen Punkten aus sodann die in der Rubrik 7 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel ε auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen. Für die Punkte des Meridianes a'1'1'a' verhält es sich beispielsweise wie folgt: Es wird zuerst (40°) $a = 0,034399$ (Rubrik 5 der Tabelle) und sodann von a aus $aa' = 0,050686$ und $a1 = 0,160631$ (beide in Rubrik 7 der Tabelle) aufgetragen. Die beiden Punkte 1 verbindet man mit dem Mittelpunkte M der Karte. Diese Verbindungslinien schneiden den zum Grenzkreise concentrischen Kreis 1'2'2'1' in den Meridianpunkten 1'1' und wird durch sie und die auf dem Grenzkreise der Karte liegenden Meridianpunkte a'a' der zu zeichnende Meridian hinreichend bestimmt. Ebenso verfährt man bei den übrigen Meridianen. Das Verfahren wurde Seite 51 begründet und ergibt sich seine Richtigkeit sofort aus Betrachtung von Fig. 20 und 21. (Seite 50.)

In Bezug auf die Konstruktion der Parallelkreise ist nur zu bemerken, dass nach Fig. 23 (Seite 52) die in der letzten Rubrik der Tabelle (Seite 58) enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α vom nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes aus auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen werden, wodurch sich die Endpunkte der Parallelkreise ergeben.

Stereographisches Kartennetz von Deutschland. Als Mittelpunkt der Karte nehmen wir denjenigen an, dessen Länge $\lambda = 30^\circ$ östlich v. Ferro und dessen Breite $\varphi = 50^\circ$ ist. Die Poldistanz δ dieses Punktes ist dann gleich 40° .

Der Bogenhalbmesser des Grenzkreises der Karte ergibt sich durch Berechnung des Abstandes der Punkte Q ($\lambda_1 = 30^\circ$, $\varphi_1 = 50^\circ$) und R ($\lambda_2 = 40^\circ$, $\varphi_2 = 54^\circ$)

$$\cos QR = \sin 50^\circ \sin 54^\circ + \cos 50^\circ \cos 54^\circ \cos 10^\circ$$

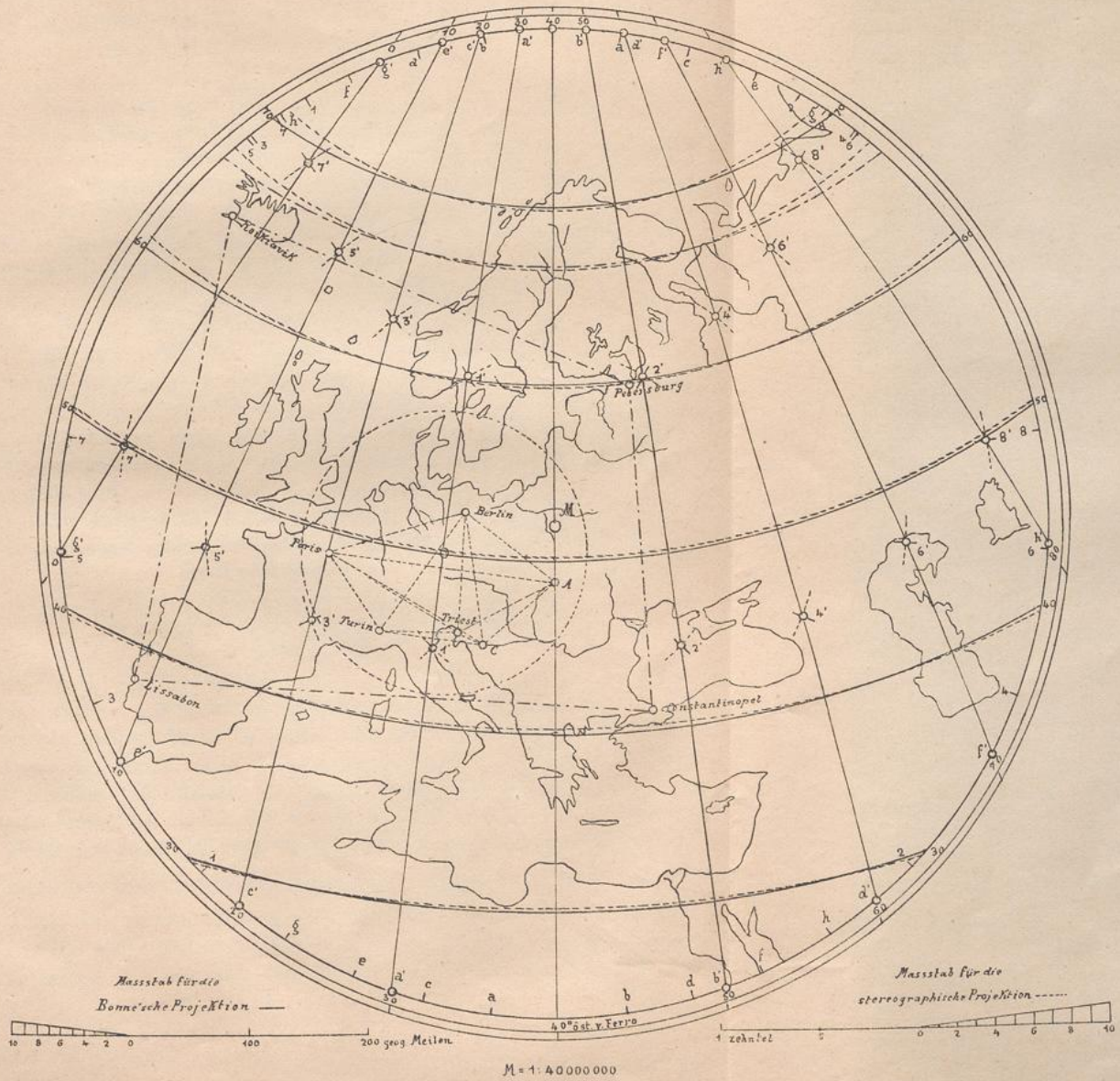
$$QR = 7^\circ 20'$$

Der Einfachheit wegen setze man $QR = \beta = 8^\circ$, dann ist für $R = 1$ der Radius des Grenzkreises der Karte $r = \operatorname{Tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{Tg} 4^\circ = 0,0699268$.

Um die Meridiane und Parallelkreise von zwei zu zwei Graden zu berechnen, setze man

- 1) für die Meridiane $\lambda = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$,

Das stereographische und Bonne'sche Kartennetz von Europa.



2) für die Parallelkreise $\varrho = 36^\circ, 38^\circ, 40^\circ, 42^\circ, 44^\circ$.

Als Beispiel für die Berechnung der Meridiane wollen wir $\lambda = 2^\circ$ annehmen.

Nach Gleichung XXX ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} \alpha &= \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Tg} \lambda = \operatorname{Cos} 40^\circ \operatorname{Tg} 2^\circ \\ \alpha &= 1^\circ 31' 56'' \end{aligned}$$

Nach Gleichung XXXIV ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \varepsilon &= \operatorname{Sin} 1^\circ 31' 56'' \operatorname{Cotg} 8^\circ \operatorname{Tg} 40^\circ \\ \varepsilon &= 9^\circ 11' 11'' \end{aligned}$$

Um zwei weitere Punkte des Meridianes zu bestimmen, setze man z. B. $\beta = 2^\circ 20'$ und erhält den Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises $r = \operatorname{Tg} 1^\circ 10' = 0,020365$, ferner nach Gleichung XXXIV den Winkel ε' . Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \varepsilon' &= \operatorname{Sin} 1^\circ 31' 56'' \operatorname{Cotg} 2^\circ 20' \operatorname{Tg} 40^\circ \\ \varepsilon' &= 33^\circ 24' 39'' \end{aligned}$$

Für $r = 0,0699268$ (Radius des Grenzkreises) ergeben sich die Sehnen der Winkel $\alpha \varepsilon \varepsilon'$ wie folgt:

$$s = 0,00186995, s' = 0,01119922, s'' = 0,0402008.$$

In analoger Weise berechnet man auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $\alpha \varepsilon \varepsilon' s s' s''$, welche in nachfolgender Tabelle zusammengestellt sind.

Als Beispiel für die Berechnung der Parallelkreise wollen wir denjenigen wählen, dessen Bogenhalbmesser $\varrho = 36^\circ$ ist. Für $R = 1$ ist

$$e = \operatorname{Tg} 2^\circ = 0,0349208$$

$$\operatorname{Tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(\frac{s}{2} - \delta) \operatorname{Sin} (\frac{s}{2} - \beta)}{\operatorname{Sin} \frac{s}{2} \operatorname{Sin} (\frac{s}{2} - \varrho)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} 2^\circ \operatorname{Sin} 34^\circ}{\operatorname{Sin} 42^\circ \operatorname{Sin} 6^\circ}}$$

$$\alpha = 55^\circ 41' 18''$$

Für $r = 0,0699268$ ist die Sehne von $\alpha : s = 0,0653212$.

In gleicher Weise berechnet man auch für die übrigen Parallelkreise die Werthe von e, α und s , welche nachfolgende Tabelle enthält.

Sollen alle Längen in geog. Meilen aufgetragen werden, so setze man den Radius des Grenzkreises der Karte ($r = 0,0699268$) gleich $8 \times 15 = 120$ geog. Meilen. Alle in nachfolgender Tabelle angegebenen Dimensionen sind alsdann mit $\frac{120}{0,0699268} = 1716,08$ ($\log = 3,2345375$) zu multipliciren. Es ist übrigens einfacher den Radius $r = 120$ geog. Meilen des Grenzkreises gleich einer passenden Länge zu setzen, wodurch sich für die Karte ein bestimmter Massstab er-

gibt und alsdann analog wie oben angegeben wurde, einen Massstab zu construiren, mit welchem nachfolgende Zahlenwerthe unmittelbar aufgetragen werden können.

Stereographisches Netz von Deutschland.

Meridiane.

λ	β	Radien der concent. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α	Sehne von α für $r = 0,0699268$	ε	Sehne von ε für $r = 0,0699268$
20	8 ⁰⁰ '	0,0699268	1 ³¹ ' 56"	0,00186995	9 ¹¹ ' 11"	0,0111992
2	2 20	0,0203650	1 31 56		33 24 39	0,0402008
4	8	0,0699268	3 3 58	0,00374160	18 37 25	0,0226290
4	3 20	0,0290970	3 3 58		50 24 26	0,0595548
6	8	0,0699268	4 36 12	0,00561664	28 37 53	0,0345804
6	4 20	0,0378335	4 36 12		62 42 49	0,0727748
8	8	0,0699268	6 8 41	0,00749542	39 43 25	0,0475154
8	5 20	0,0465757	6 8 41		74 10 43	0,0843398
10	8	0,0699268	7 41 33	0,00938094	53 3 10	0,0624600
10	7	0,0553251	7 41 33		66 10 20	0,0763460

Parallelkreise.

ϱ	e	α	Sehne von α für $r = 0,0699268$
36 ⁰	0,0349208	55 ⁰ 41'18"	0,0653212
38	0,0174551	70 47 56	0,0810134
40	0,0000000	85 13 10	0,0946810
42	—0,0174551	100 20 4	0,1073960
44	—0,0349208	116 23 0	0,1188498