# Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

II. Abschnitt. Die cylindrischen Projektionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

## II. Abschnitt.

# Die cylindrischen Projektionen.

### 1. Die Plattkarten.

Bei der Construktion von Detailkarten, welche sich über einen sehr kleinen Theil der Erdoberfläche z. B. eine kleine Provinz erstrecken, kann man folgende Projektionsmethode, die in vielen Fällen als hinreichend genau betrachtet wird, in Anwendung bringen:

Man denke sich den sehr kleinen Bogen des mittleren Parallelkreises des darzustellenden Landes identisch mit dem Bogen eines grössten Kugelkreises und lege an die Kugel eine Cylinderfläche, welche sie längs diesem Kugelkreise berührt. So weit sich das Land erstreckt, kann man annehmen, dass Cylinder und Kugelfläche zusammenfallen, und dass sämmtliche Meridiane nahezu parallel sind. Man entwickelt daher die Cylinderfläche von mittleren Meridiane des Landes ausgehend in eine Ebene und erhält ein Bild des darzustellenden Landes. Diesem Gedankengange entsprechend, wird das Kartennetz auf folgende Weise gezeichnet: Man ziehe die Senkrechten AB und CD (Fig. 25), welche durch den Mittelpunkt O des Landes gehen; die Horizontale AB stellt alsdann den mittleren Parallelkreis, die Vertikale CD den mittleren Meridian des Landes dar. Vom Punkte O aus trage man ferner auf AB so viele gleiche Theile O1, 12, 23, ... O1', 1'2', 2'3' ... auf, als das Land Längengrade oder Längenminuten besitzt.

Sind die Meridiane von Grad zu Grad zu ziehen, so wird die Grösse dieser Theile durch die Gleichung:

$l' = \frac{r'\pi}{180} = \frac{r\pi}{180} \operatorname{Cos}\varphi$ berechnet, in welcher $r =$ dem Radius der Erde, $\varphi =$ geog. Breite des mittleren Parallelkreises, $r' = r\operatorname{Cos}\varphi =$ dem Radius dieses Parallelkreises ist.

Man ziehe nun parallel mit CD die Geraden ab, cd, ef . . . . a'b', c'd', e'f' . . . ., welche die Meridiane der Karte sind, und trage auf die Vertikale CD vom Punkte O aus gleiche Theile nach oben und unten, welche gleich der Länge l eines Meridiangrades genommen werden

$$l = \frac{r\pi}{180}$$

Durch die so erhaltenen Theilpunkte 4 5 6 . . . 4' 5' 6' . . . ziehe man Parallele mit AB und erhält die Parallelkreise der Karte.

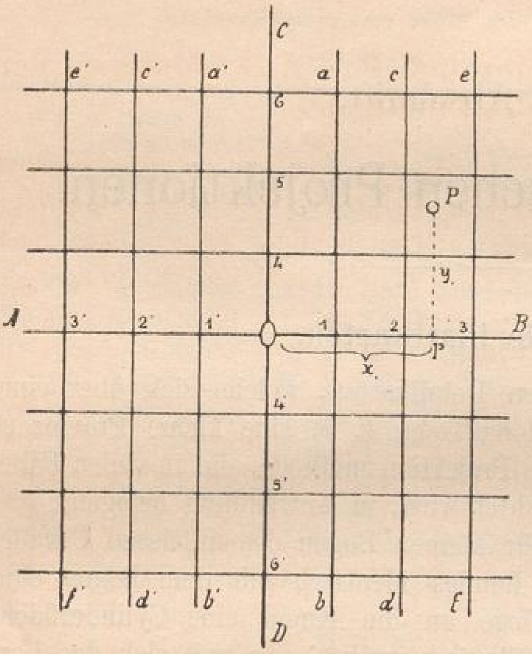


Fig. 25.

Diese Projektionsmethode eignet sich besonders für ein Land, durch welches der Aequator hindurchgeht. Da dieser ein grösster Kreis der Kugel ist, so berührt die Cylinderfläche die Kugelfläche in Wirklichkeit längs diesem Kreise und wird von den Meridianebenen in Geraden geschnitten, die unter sich parallel sind, also in der Entwicklung auf dem Aequator AB senkrecht stehen. Es findet in Folge dessen eine genauere Uebereinstimmung des Bildes mit dem Originale statt, als dies bei der Darstellung eines beliebigen Theiles der Erdoberfläche der Fall ist. Karten, welche nach dieser Methode construirt sind, nennt man Plattkarten.

Sind die sphärischen Coordinaten des Mittelpunktes der Karte $\lambda$ und $\varphi$ ($\lambda$ = der Länge, $\varphi$ = der Breite von O) diejenigen irgend eines Punktes P gleich $\lambda_1$ und $\varphi_1$, so ergeben sich die linearen Coordinaten des Punktes P auf der Karte nach den Gleichungen:

$$x_1 = \frac{r\pi}{180 . 60} (\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Cos} \varphi \qquad y_1 = \frac{r\pi}{180 . 60} (\varphi_1 - \varphi)$$

oder für $r = 1$

$$x_1 = 0{,}00029089 (\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Cos} \varphi \qquad y_1 = 0{,}00029089 (\varphi_1 - \varphi)$$

In diesen Gleichungen sind die Winkel $\lambda_1$ $\lambda$ $\varphi_1$ $\varphi$ in Minuten einzusetzen.

---

## 2. Die Mercatorprojektion und ihre Anwendung in der Schifffahrtskunde.

Will man eine Plattkarte construiren, bei welcher die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so muss sich für die Projektion a b c d eines jeden unendlich kleinen Kugelrechteckes A B C D, welches von zwei Parallelkreisen und Meridianen begrenzt wird, die Basis zur Höhe ebenso verhalten, wie die entsprechenden Dimensionen auf der Kugel. In Fig. 26 sei a b c d die Projektion eines unendlich kleinen Kugelrechteckes ABCD, so ist nach dem Gesagten

1) ab : ad = AB : AD

Bei der zu construirenden Karte werden alle Meridiane in gleichen Entfernungen von einander angenommen, indem man als mittleren Parallelkreis der Karte den Aequator wählt und auf diesen die wahren Bogenlängen von Grad zu Grad oder von 10 Grad zu 10 Grad aufträgt, und durch die Theilpunkte vertikale Linien zieht, welche die Meridiane repräsentiren.

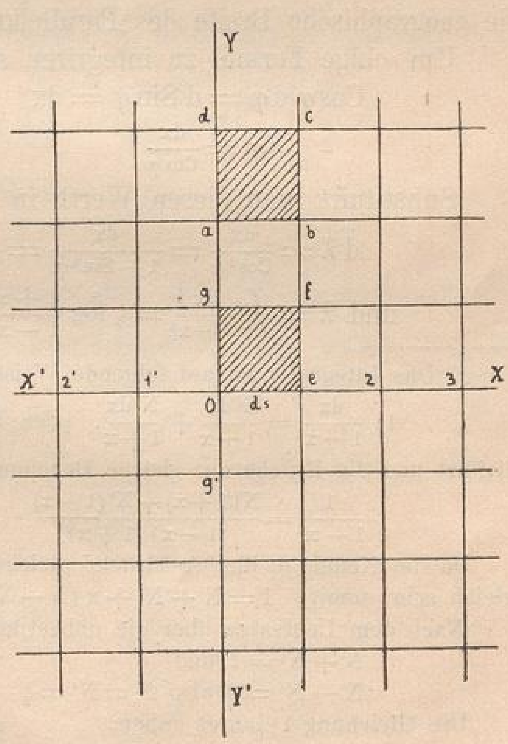

Fig. 26.

Die unendlich kleinen Seiten des Rechteckes a b c d seien ab = ds (Differential s) und ad = $d\lambda$, (Differential $\lambda$) dann ist auch (Fig. 26) Oe = ds und die Seiten des (siehe Seite 63 die Glch. für l') Kugelrechteckes sind: AB = Oe Cos $\varphi$ = ds Cos $\varphi$

(wenn $\varphi$ die Breite des Parallelkreises bezeichnet auf welchem AB liegt) und $AD = Oe = ds$. Die Proportion 1) lautet daher:

$$ds : d\lambda = ds \operatorname{Cos}\varphi : ds$$

Hieraus folgt: $d\lambda = \frac{ds}{\operatorname{Cos}\varphi}$

In dieser Gleichung ist ds der unendlich kleine Bogen des Aequators, welcher gleich demjenigen eines Meridianes d. h. gleich $d\varphi$ ist, und daher 2) $d\lambda = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$

Wird diese Gleichung zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ integrirt, so ergibt sich die Länge $\lambda = \operatorname{Arc}$ ($\alpha$ Minuten), (der Radius R der Erde wurde gleich 1 angenommen) welche in Fig. 26 vom Aequator resp. vom Punkte O aus nach Oa aufzutragen ist, vorausgesetzt, dass die geographische Breite des Parallelkreises ab gleich $\varphi$ ist.

Um obige Formel zu integriren setze man $\operatorname{Sin}\varphi = x$ und erhält

$$\operatorname{Cos}\varphi \, d\varphi = d \operatorname{Sin}\varphi = dx$$

$$d\varphi = \frac{dx}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2 so ist

$$d\lambda = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2\varphi} = \frac{dx}{1 - \operatorname{Sin}^2\varphi} = \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$\text{und } \lambda = \int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + x}{1 - x} + C \text{ *)}$$

*) Das Integral wird auf folgende Weise gelöst: Es sei

$$1) \quad \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{N\,dx}{1 - x} + \frac{N'\,dx}{1 + x},$$ oder indem man die Gleichung mit dx dividirt und die Brüche auf gleiche Benennung bringt:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{N(1 + x) + N'(1 - x)}{(1 - x)(1 + x)}$$

Da die Nenner beider Ausdrücke gleich sind, so müssen auch ihre Zähler gleich sein, somit: $1 = N + N' + x(N - N')$

Nach dem Lehrsatze über die unbestimmten Coefficienten ist aber:

$N + N' = 1$ und

$N - N' = 0$ also $N = N' = \frac{1}{2}$

Die Gleichung 1) lautet daher:

$$\frac{dx}{1 - x^2} = \frac{dx}{2(1 - x)} + \frac{dx}{2(1 + x)} \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x}$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = -\tfrac{1}{2} \overset{e}{\log}(1 - x) + \tfrac{1}{2} \overset{e}{\log}(1 + x) + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[ \overset{e}{\log}(1 + x) - \overset{e}{\log}(1 - x) \right] + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + x}{1 - x} + C$$

$$\lambda = \overset{e}{\log} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Setzt man in diese Gleichung für $x = \operatorname{Sin}\varphi$ seinen Werth, so ergibt sich:

$$\lambda = \overset{e}{\log} \sqrt{\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi}} + C \text{ oder}$$

$$\lambda = \overset{e}{\log} \sqrt{\frac{(1+\operatorname{Sin}\varphi)^2}{1-\operatorname{Sin}^2\varphi}} + C$$

$$\lambda = \overset{e}{\log} \frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} + C$$

Nun ist aber $\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$ *) und daher

$$\lambda = \overset{e}{\log} \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) + C$$

Dieses Integral ist aber zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ zu nehmen, somit

$$\lambda = \overset{e}{\log} \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \overset{e}{\log} \operatorname{Tg} 45^0$$

oder da $\overset{e}{\log} \operatorname{Tg} 45^0 = \overset{e}{\log} 1 = 0$ ist

$$\text{(XLII)} \quad \lambda = \overset{e}{\log} \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Um diesen Logarithmus durch den Brigg'schen auszudrücken muss er mit dem Modul $M = \overset{10}{\log} e = 0{,}434294482$ dividirt werden und es ist daher:

$$\text{(XLIIa)} \quad \lambda = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

In dieser Gleichung ist aber

$$\lambda = \operatorname{Arc} \alpha' = \alpha \operatorname{Arc} 1' = \alpha \operatorname{Sin} 1'$$

weil $\operatorname{Arc} 1' = \operatorname{Sin} 1'$ angenommen werden kann, und daher

$$\alpha \operatorname{Sin} 1' = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

---

*) $\operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\operatorname{Tg} 45^0 + \operatorname{Tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{Tg} 45^0 \operatorname{Tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1+\operatorname{Tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{Tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1+\frac{\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}}}{1-\frac{\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}}} =$

$= \frac{\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\left(\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\operatorname{Cos}^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Sin}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + 2\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$

$$\alpha = \frac{1}{M \operatorname{Sin} 1'} \log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{XLIIb)}\ \alpha = 7915{,}7046 \ldots \log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)^{*)}$$

$\log 7915{,}7046 = 3{,}8984896.$

Mittelst dieser Gleichung wurden von mir die Werthe von $\alpha$, deren auf einander folgende Differenzen mit $\varphi$ zunehmen, und welche daher wachsende Breiten genannt werden, von Grad zu Grad berechnet. Dieselben sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.**)

Werthe der wachsenden Breiten in Minuten.

| Breite $\varphi$ | Wachsende Breite in Minuten $\alpha$ | Differenz***) | Breite $\varphi$ | Wachsende Breite in Minuten $\alpha$ | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| 90⁰ | $\infty$ | $\infty$ | 63⁰ | 4904,937 | 129,956 |
| 89 | 16299,557 | 2383,125 | 62 | 4774,981 | 125,756 |
| 88 | 13916,432 | 1394,325 | 61 | 4649,225 | 121,857 |
| 87 | 12522,107 | 989,587 | 60 | 4527,368 | 118,228 |
| 86 | 11532,520 | 767,898 | 59 | 4409,140 | 114,842 |
| 85 | 10764,622 | 627,732 | 58 | 4294,298 | 111,677 |
| 84 | 10136,890 | 531,070 | 57 | 4182,621 | 108,717 |
| 83 | 9605,820 | 460,360 | 56 | 4073,904 | 105,938 |
| 82 | 9145,460 | 406,396 | 55 | 3967,966 | 103,328 |
| 81 | 8739,064 | 363,766 | 54 | 3864,638 | 100,877 |
| 80 | 8375,298 | 329,591 | 53 | 3763,761 | 98,560 |
| 79 | 8045,707 | 301,141 | 52 | 3665,201 | 96,394 |
| 78 | 7744,566 | 277,361 | 51 | 3568,807 | 94,326 |
| 77 | 7467,205 | 257,137 | 50 | 3474,481 | 92,399 |
| 76 | 7210,068 | 239,729 | 49 | 3382,082 | 90,553 |
| 75 | 6970,339 | 224,596 | 48 | 3291,529 | 88,815 |
| 74 | 6745,743 | 211,319 | 47 | 3202,714 | 87,169 |
| 73 | 6534,424 | 199,584 | 46 | 3115,545 | 85,606 |
| 72 | 6334,840 | 189,139 | 45 | 3029,939 | 84,125 |
| 71 | 6145,701 | 179,783 | 44 | 2945,814 | 82,719 |
| 70 | 5965,918 | 171,361 | 43 | 2863,095 | 81,383 |
| 69 | 5794,557 | 163,739 | 42 | 2781,712 | 80,114 |
| 68 | 5630,818 | 156,813 | 41 | 2701,598 | 78,907 |
| 67 | 5474,005 | 150,492 | 40 | 2622,691 | 77,761 |
| 66 | 5323,513 | 144,703 | 39 | 2544,930 | 76,669 |
| 65 | 5178,810 | 139,388 | 38 | 2468,261 | 75,631 |
| 64 | 5039,422 | 134,485 | 37 | 2392,630 | 74,631 |

*) Aus dieser Glch. ergibt sich $\alpha$ als Anzahl von Minuten des Erdäquators.

**) Dieselben finden sich auch in den Werken von Mendoza und Guépratte, welche mir jedoch nicht zu Gebote standen, wahrscheinlich von Minute zu Minute angegeben.

***) Auch Länge der auf einander folgenden Breitegrade.

| Breite $\varphi$ | Wachsende Breite in Minuten $a$ | Differenz | Breite $\varphi$ | Wachsende Breite in Minuten $a$ | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| 36° | 2317,999 | 73,712 | 18 | 1098,217 | 62,913 |
| 35 | 2244,287 | 72,807 | 17 | 1035,304 | 62,578 |
| 34 | 2171,480 | 71,953 | 16 | 972,726 | 62,266 |
| 33 | 2099,527 | 71,143 | 15 | 910,460 | 61,974 |
| 32 | 2028,384 | 70,371 | 14 | 848,486 | 61,706 |
| 31 | 1958,013 | 69,638 | 13 | 786,780 | 61,457 |
| 30 | 1888,375 | 68,939 | 12 | 725,323 | 61,231 |
| 29 | 1819,436 | 68,274 | 11 | 664,092 | 61,022 |
| 28 | 1751,162 | 67,644 | 10 | 603,070 | 60,835 |
| 27 | 1683,518 | 67,045 | 9 | 542,235 | 60,668 |
| 26 | 1616,473 | 66,477 | 8 | 481,567 | 60,518 |
| 25 | 1549,996 | 65,939 | 7 | 421,049 | 60,389 |
| 24 | 1484,057 | 65,427 | 6 | 360,660 | 60,279 |
| 23 | 1418,630 | 64,945 | 5 | 300,381 | 60,186 |
| 22 | 1353,685 | 64,488 | 4 | 240,195 | 60,113 |
| 21 | 1289,197 | 64,058 | 3 | 180,082 | 60,058 |
| 20 | 1225,139 | 63,652 | 2 | 120,024 | 60,021 |
| 19 | 1161,487 | 63,270 | 1 | 60,003 | 60,003 |

Um mittelst dieser Tabelle eine Weltkarte zu construiren, ziehe man ein senkrechtes Axensystem OX, OY (Fig. 26 Seite 65), trage auf die Gerade XX′, die den Aequator darstellt, 360 gleiche Theile auf, von denen jeder 1° des Aequators repräsentirt und ziehe durch die Theilpunkte e 2 3 .... 1′2′3′ .... Parallele mit OY, welche die Meridiane der Karte sind. Theilt man alsdann einen Grad des Aequators in 60 gleiche Theile, so erhält man einen Massstab, auf welchem Minuten abgegriffen werden können. Die Parallelkreise werden nun construirt, wenn man auf die Gerade YY′ vom Punkte O aus nach oben und unten die Werthe der wachsenden Breiten aufträgt, welche aus obiger Tabelle zu entnehmen und auf der Geraden OX abzugreifen sind, und durch die erhaltenen Theilpunkte Parallele mit der Xaxe zieht.

Zeichnet man in das so construirte Kartennetz die einzelnen Kontinente, Länder, Flüsse, Berge und Seeen ein, so erhält man eine Karte, welche nach ihrem ersten Construkteur Merkator:*) eine Merkatorprojektion genannt wird.

*) Gerard Kremer genannt Mercator geb. den 5. März 1512 in Rupelmonde (Flandern) gest. den 2. Dezember 1594 in Duisburg (Rheinprovinz) war Kartenzeichner, Mathematiker, Geschichtsforscher etc.

Ein näherungsweises Verfahren zur Berechnung der Entfernungen der Parallelkreise einer Merkatorprojektion ergibt sich auf folgende Weise: Man denke sich das Netz der Karte von n zu n Minuten in der Weise construirt, dass die Rechtecke, welche dem Aequator zunächst liegen, Quadrate sind und für die übrigen Rechtecke sich die Basis zur Höhe verhält, wie die entsprechenden Dimensionen auf der Kugel. Bezeichnet man alsdann die Länge von n Bogenminuten des Aequators oder des Meridianes mit l, so ist die Länge von n Bogenminuten eines Parallelkreises, dessen Breite $\varphi$ ist, gleich $1 \operatorname{Cos} \varphi$. Diese Längen sind aber die Seiten eines Kugelrechteckes, dessen südliche Seite (wofern man die nördliche Halbkugel projicirt) die Breite $\varphi$ besitzt. Die entsprechenden Seiten der Merkatorprojektion des Kugelrechteckes seien $\lambda$ und b, dann ist nach unserer Annahme

$$b = l \text{ und daher}$$

$$\lambda : l = l : l \operatorname{Cos} \varphi$$

$$\lambda = \frac{l}{\operatorname{Cos} \varphi} = l \operatorname{Sec} \varphi$$

Für $R = 1$ ist die Länge l von n Bogenminuten eines grössten Kreises

$$l = \frac{\pi n}{180 . 60} = \frac{\pi n}{10800} \text{ und}$$

$$\lambda = \frac{\pi n}{10800 \operatorname{Cos} \varphi}$$

Soll $\lambda$ in Minuten ausgedrückt werden, so ist zu berücksichtigen dass $\lambda = \operatorname{Arc} \alpha' = \alpha \operatorname{Arc} 1' = \alpha \operatorname{Sin} 1'$ und

$$\alpha \operatorname{Sin} 1' = \frac{\pi n}{10800 \operatorname{Cos} \varphi}$$

$$\text{(XLIII)} \quad \alpha' = \frac{\pi n}{10800 \operatorname{Sin} 1' \operatorname{Cos} \varphi} = \frac{n}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

Nach dieser Glch. können die Entfernungen der Parallelkreise näherungsweise berechnet werden. Werden z. B. die Parallelkreise von Grad zu Grad gezogen, so ist $n = 60$ und es ergibt sich für die Entfernung der Parallelkreise deren Breiten $\varphi_1 = 60^0$ und $\varphi_2 = 61^0$ sind

$$\alpha' = \frac{60}{\operatorname{Cos} 60^0} = 120'$$

Die richtige Entfernung ist die Grösse des 61ten Meridiangrades in unserer Tabelle der wachsenden Breiten, welche gleich 121,857' ist. Es ergibt sich daher zwischen der wirklichen und der näherungsweisen Entfernung der beiden Parallelkreise eine Differenz von 1,857'.

Die Merkatorprojektion, nach welcher die ganze Erdoberfläche auf einem Blatte dargestellt werden kann, wird vielfach dann angewandt, wenn eine richtige Darstellung der Umrisse der Continente und Länder

Nebensache, dagegen ein Zusammenhang beider Kugelhemisphären erwünscht ist; so bei der Construktion von physikalischen und erdmagnetischen Karten, bei Karten, welche die Meeresströmungen oder Ebbe und Fluthbewegungen darstellen, ferner bei geologischen, pflanzen- und thiergeographischen Karten.

Vor Allem aber ist diese Projektion von grosser Wichtigkeit in der Schifffahrtskunde, indem auf einer nach dieser Methode construirten Karte sämmtliche Aufgaben, welche sich auf den Curs eines Schiffes beziehen, in höchst einfacher Weise, wie wir im Nachfolgenden sehen werden, graphisch gelöst werden können.

Es ist nämlich durchaus nicht nothwendig nach der Mercatorprojektion stets die ganze Erdoberfläche darzustellen, sondern es kann sich eine solche Karte über einen beliebigen Theil der Erdoberfläche erstrecken und daher in beliebig grossem Massstabe ausgeführt werden. Soll sich z. B. eine Karte von $0^0$ bis $80^0$ westlicher Länge von Paris und $36^0$ bis $70^0$ nördlicher Breite erstrecken, so enthält sie einen grossen Theil des atlantischen Oceans und kann auf der Ueberfahrt eines Schiffes von Europa nach Amerika Verwendung finden. Zur Construktion des Netzes dieser Karte trägt man auf eine unbestimmte Gerade AB (Fig. 27) achtzig beliebig gleiche Theile auf, wobei man

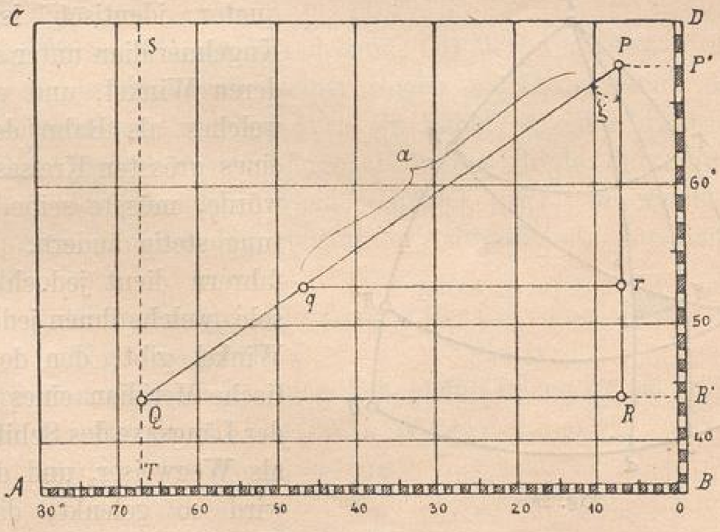


Fig. 27.

einen solchen Theil gleich der Länge eines Aequatorgrades betrachtet. In den Theilpunkten errichte man Senkrechte, welche die Meridiane der Karte darstellen, ferner trage man auf die Gerade BD die Unterschiede der wachsenden Breiten auf, die sich aus der Tabelle (Seite 68) für die Breiten von 36° bis 70° ergeben und ziehe durch die so erhaltenen Theilpunkte Parallele mit AB, welches die Parallelkreise der Karte sind.

Da die Geraden AB und BD bei der Lösung der sich auf den Curs eines Schiffes beziehenden Aufgaben als Massstäbe benutzt werden, so ist es zweckmässig dieselben von Minute zu Minute, oder wofern die Theilung zu klein wird, von 10 Minuten zu 10 Minuten einzutheilen.

---

## Graphische Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Von allen Curven, welche zwei Punkte A und B der Erdoberfläche (siehe Fig. 28) verbinden, ist der Bogen eines grössten Kreises, welcher durch diese Punkte geht, ihre kürzeste Entfernung, und wäre dieser somit der von einem Schiffe zu befolgende Weg. Ein grösster Kreis der Kugel schneidet aber, wofern er nicht mit dem Aequator identisch ist, jeden Kugelmeridian unter einem anderen Winkel, und ein Schiff, welches als Bahn den Bogen eines grössten Kreises befolgen würde, müsste seine Wegrichtung stetig ändern. Den Seefahrern dient jedoch die Bussole, welche ihnen jederzeit den Winkel gibt, den der magnetische Meridian eines Ortes mit der Längsaxe des Schiffes bildet, als Wegweiser, und das Schiff wird so gelenkt, dass seine Wegrichtung mit dem wahren

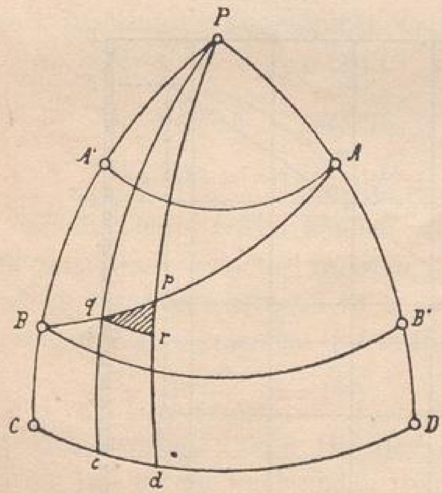

Fig. 28.

Meridiane eines jeden Ortes denselben Winkel einschliesst. Man nennt diesen Winkel, welcher also während einer bestimmten oft längeren Zeit constant bleibt, den Azimutalwinkel. Die von einem Schiffe nach diesem Gesetze beschriebene Curve wird Loxodromie oder schieflaufende Linie genannt, und ist eine Curve von doppelter Krümmung. Da sie mit allen Meridianen denselben Winkel bildet, so stellt sie sich auf einer Karte, welche nach Mercatorsprojektion construirt ist (siehe Fig. 27) als gerade Linie dar.

Betrachten wir ein sphärisches Dreieck PAB (Fig. 28), welches durch den Bogen der Loxodromie und durch die Meridianbogen PA und PB zweier Orte begrenzt wird, so sind in diesem folgende Elemente zu unterscheiden:

1) Der Unterschied $P = l_1 - l_2$ der Längen der Orte A und B, oder der in der Länge durchlaufene Weg. (Der Ort A sei der Punkt der Abreise, der Ort B derjenige der Ankunft.)

2) Der Unterschied $\varphi_1 - \varphi_2$ der Breiten beider Orte, oder der in der Breite durchlaufene Weg.

3) Die Länge $a = AB$ der Loxodromie, welche in Meilen oder Minuten ausgedrückt wird.

4) Das constante Azimuth $\zeta$, oder der Winkel, welchen die Loxodromie mit sämmtlichen Meridianen bildet.

Sind von diesen vier Elementen zwei gegeben, so können die beiden anderen berechnet oder construirt werden, und es sind daher im Ganzen sechs Aufgaben zu lösen, welche sich auf den Curs eines Schiffes beziehen.

In Fig. 28 sei AB die Loxodromie, CD der Aequator, P der Pol und $pq = \alpha$ ein unendlich kleiner Bogen der Loxodromie; um alsdann zu untersuchen, welchen Weg ein Schiff, das die loxodromische Linie befolgt, sowohl in der Länge als in der Breite durchläuft, betrachte man das unendlich kleine Dreieck pqr, in welchem der Winkel $qpr = \zeta$ gleich dem constanten Azimuthe ist. Aus demselben ergibt sich:

$$1)\ pr = qp \,.\, \mathrm{Cos}\,\zeta = \alpha\,\mathrm{Cos}\,\zeta$$

$$2)\ qr = pr\ \mathrm{Tg}\,\zeta.$$

Addirt man sämmtliche unendlich kleine Bogen pr, so erhält man den in der Breite durchlaufenen Weg:

$$AB' = \varphi_1 - \varphi_2$$

und es ist

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Sigma\,(\alpha\,\mathrm{Cos}\,\zeta)$$

oder da $\mathrm{Cos}\,\zeta$ eine Constante ist

$$(\mathrm{XLIV})\quad \varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{Cos}\,\zeta\ \Sigma\,(\alpha) = \mathrm{Cos}\,\zeta\,.\,AB = a\,\mathrm{Cos}\,\zeta$$

Denkt man sich die Meridianbogen Pp und Pq bis zum Aequator verlängert, so ergibt sich auf diesem das Bogenelement cd, und die Summe aller dieser Bogenelemente ist der in der Länge durchlaufene Weg CD.

Ist $\varphi$ die geog. Breite des Parallelkreisbogens qr, so ist:

$$qr = cd \operatorname{Cos} \varphi.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2) so ergibt sich:

$$cd \operatorname{Cos} \varphi = pr \operatorname{Tg} \zeta$$

$$cd = \frac{pr}{\operatorname{Cos} \varphi} \operatorname{Tg} \zeta$$

Summirt man alle diese Werthe von cd, so erhält man den in der Länge durchlaufenen Weg:

$$P = l_1 - l_2 = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{pr}{\operatorname{Cos} \varphi} = \operatorname{Tg} \zeta \int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

wenn man den unendlich kleinen Bogen pr des Meridianes mit $d\varphi$ bezeichnet. Wie oben gefunden wurde ist aber

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{1}{M} \log \operatorname{Tg} \left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) + C \text{ (siehe Seite 66 u. 67)}$$

welchen Werth wir gleich $\lambda$ gesetzt haben und daher

$$\text{(XLV)} \quad P = l_1 - l_2 = \lambda \operatorname{Tg} \zeta.$$

Das Integral ist zwischen den Grenzen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ zu nehmen, für $\varphi = \varphi_1$, sei sein Werth $= \lambda_1$, für $\varphi = \varphi_2$ gleich $\lambda_2$, dann ist:

$$\text{(XLV a)} \quad P = (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{Tg} \zeta.$$

Da in Gleichung XLV der Coefficient von $\operatorname{Tg} \zeta$ identisch ist mit den bei der Merkatorprojektion erhaltenen Zahlenwerthen der wachsenden Breiten, so können die Werthe von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ aus der Tabelle (Seite 68) entnommen werden, und da dieselben in Minuten angegeben sind, so wird dadurch nach Glch. XLVa auch P in Minuten erhalten.

Hierauf beruht ferner die wichtige Anwendung einer Karte, welche nach Merkatorsprojektion construirt ist, zur graphischen Lösung der auf den Curs eines Schiffes sich beziehenden Aufgaben.

Aufgabe 1. In Fig. 27, Seite 76 sei P der Ort der Abreise, Q der Ort der Ankunft eines Schiffes, welches in der Richtung PQ, die mit dem Meridiane des Ortes P einen Winkel $\zeta$ bildet, einen bestimmten Weg a zurücklegt. Welches ist die Länge $l_1$ und die Breite $\varphi_1$ des Punktes Q, wenn die Länge l und die Breite $\varphi$ des Punktes P der Abreise gegeben sind?

Auflösung. Nachdem man auf der Karte den Punkt P der Abreise markirt hat, zieht man die Gerade PQ, welche mit dem Meridiane den Winkel $\zeta$ einschliesst. Da eine Seemeile der Länge einer Bogenminute des Aequators gleich ist, so greife man auf der Geraden AB (Fig. S. 71) so viele Minuten ab, als a Seemeilen enthält, und trage diese Strecke nach Pq. Durch den Punkt q ziehe man eine Parallele qr mit AB und erhält den in der Breite durchlaufenen Weg

$$Pr = a \operatorname{Cos} \zeta \text{ (siehe Glch. XLIV)},$$

welcher auf AB in Minuten abgegriffen werden kann.

Zieht man ferner durch den Punkt P die Parallele PP′ und zählt auf dem Massstabe DB vom Punkte P′ ebenso viele Minuten ab, als die Gerade Pr enthält, so ist diese Länge P′R′, welche nach PR getragen wird, die graphische Darstellung des in der Breite durchlaufenen Weges. Durch R wird nun RQ parallel mit AB gezogen und auf der Geraden Pq der Ort Q der Ankunft erhalten. RQ ist der in der Länge durchlaufene Weg, denn

$$RQ = PR \operatorname{Tg} \zeta = (\lambda - \lambda_1) \operatorname{Tg} \zeta \text{ (siehe Glch. XLVa)}.$$

Aufgabe 2. Es sei das Azimuth $\zeta$ und die Differenz $(\varphi - \varphi_1)$ der Breiten beider Orte gegeben, man soll den vom Schiffe durchlaufenen Weg a und die Differenz $l_1 - l$ der Längen erhalten, wodurch der Punkt Q auf der Karte bestimmt ist.

Auflösung. (Fig. S. 71). Da der Punkt P der Abfahrt gegeben ist, so ziehe man durch P eine Gerade Pq, welche mit dem Meridiane des Ortes P den Winkel $\zeta$ bildet; greife alsdann auf dem Massstabe AB die Länge $\varphi - \varphi_1$ in Minuten ab und trage sie nach Pr. Durch r ziehe man mit AB die Parallele rq, wodurch der Punkt q und damit der durchlaufene Weg Pq = a erhalten wird, welcher auf AB abzugreifen ist. Im Uebrigen wird nun wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren und dadurch der Punkt Q der Ankunft erhalten.

Aufgabe 3. Man kennt den Unterschied $\varphi - \varphi_1$ der Breiten beider Orte, ferner den durchlaufenen Weg a, man soll die Wegrichtung, d. h. den Winkel $\zeta$ und den Unterschied der Längen $(l_1 - l)$ beider Orte finden.

Auflösung. (Fig. S. 71). Man trage vom Punkte P aus mittelst des Massstabes AB die Minutenzahl $(\varphi - \varphi_1)$ nach Pr, ziehe rq parallel mit AB und greife auf AB soviele Minuten ab, als die Weglänge a Meilen enthält. Mit dieser Zirkelöffnung beschreibe man aus P einen Kreis, welcher den Parallelkreis rq in q schneidet. Dadurch wird die Wegrichtung PQ und der Winkel $\zeta$ erhalten und der Punkt Q der Ankunft wird bestimmt wie oben.

Aufgabe 4. Man kennt die Längen und Breiten beider Orte, also die Differenzen ($l_1 - l$) und ($\varphi - \varphi_1$) und soll den durchlaufenen Weg Pq = a, sowie den Winkel $\zeta$ erhalten.

Auflösung. (Fig. 27) Da die Punkte P und Q auf der Karte bestimmt sind, so ist auch das Dreieck PRQ bestimmt und kann

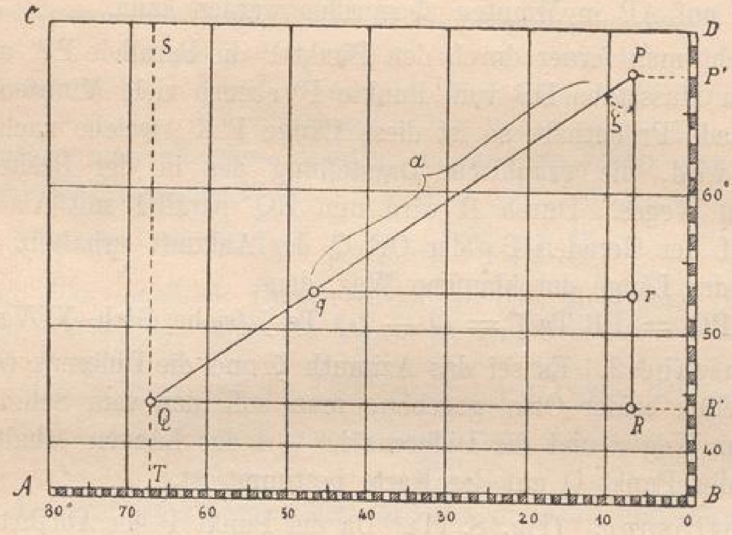


Fig. 27.

dasselbe gezeichnet werden. Zieht man daher durch die Punkte P und Q Parallele mit AB, so ergeben sich auf der Geraden BD die Theilpunkte P′ und R′ und man zählt auf dem Massstabe BD die Anzahl Minuten ab, welche zwischen P′ und Q′ liegen. Dieselbe Anzahl wird auf dem Massstabe AB abgegriffen und nach Pr getragen. Man zieht nun rq parallel mit AB und erhält die Weglänge Pq = a.

Aufgabe 5. Man kennt den Unterschied der Längen $l_1 - l$ und das Azimuth $\zeta$ und soll a sowie $\varphi - \varphi_1$ construiren.

Auflösung. (Fig. 27). Da der Ort P der Abreise gegeben ist, so ziehe man unter dem Winkel r Pq = $\zeta$ die Gerade PQ, welche den Meridian des Ortes Q d. i. die Gerade ST im Punkte Q schneidet. Durch Q zieht man eine Parallele zu AB und erhält R und gleichzeitig die Anzahl Minuten, welche in der Breite durchlaufen werden und durch die Gerade PR = P′R′ dargestellt sind. Diese Minutenzahl wird wie bei der vorigen Aufgabe auf dem Massstabe AB abgegriffen und nach Pr getragen. Zieht man noch rq parallel zu AB, so ergibt sich der vom Schiff durchlaufene Weg Pq = a.

6. Aufgabe. Der Unterschied der Längen $l_1 - l$ und die Weglänge a sei gegeben, man soll $\zeta$ und $(\varphi - \varphi_1)$ den Unterschied der Breiten construiren.

Auflösung. Diese Aufgabe kann nur näherungsweise gelöst werden. Nachdem man die Meridiane PR und ST der Orte gezogen hat, wird auf dem Massstabe BD die Länge PQ abgegriffen und mit dieser Zirkelöffnung aus P, welcher als Punkt der Abreise gegeben ist, ein Kreis beschrieben, der den Meridian ST in Q schneidet. Diese Länge ist jedoch nur die näherungsweise Länge von PQ. Man ziehe nun durch Q die Gerade QR parallel mit AB und greife auf dem Massstabe AB, soviele Minuten ab, als die Gerade $PR = P'R'$ enthält, diese Minutenzahl wird nach Pr getragen und rq parallel mit AB gezogen, es ergibt sich dadurch die Länge $Pq = a$ des durchlaufenen Weges, welche gleich der gegebenen Weglänge sein muss. Stimmt die durch Construktion erhaltene Weglänge mit der gegebenen überein, so ist die Construktion richtig, im anderen Falle muss sie noch einmal wiederholt werden, wobei man je nach dem erhaltenen Werthe von a die Distanz PQ grösser oder kleiner anzunehmen hat.

---

## Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion.

Beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion kann auch die Abplattung der Erde berücksichtigt werden. Es sei in Fig. 29 (folgende Seite) $P_s A P_n$ der Ellipsenbogen, durch dessen Umdrehung um die Axe OY ein Rotationsellipsoid entsteht, welches die Gestalt der Erde besitzt. (Der Unterschied der Ellipsenaxen, welcher bei der Erde sehr klein ist, wurde der Deutlichkeit wegen in Fig. 29 etwas gross angenommen.) $P_n$ sei der Nordpol der Erde, C ein beliebiger Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten $x_1$ $y_1$ sind, ferner sei CT eine Tangente an die Ellipse, welche gleichzeitig den Horizont des Ortes C darstellt. Zieht man im Punkte C eine Normale auf die Tangente, so ist der Winkel $CNM = \varphi$ die geog. Breite des Ortes C, denn er ist gleich dem Winkel EDY, welcher die Polhöhe des Ortes C ist. Aus dem Dreiecke ODT ergibt sich $\varphi + \beta = 90^0$

$$\varphi = 90^0 - \beta.$$

Wie bekannt ist die Gleichung der Ellipsentangente:

$$y - y_1 = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1) \text{ und in dieser Gleichung}$$

$$\operatorname{Tg}\alpha = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1} \text{ oder da}$$

$$\operatorname{Tg}\alpha = -\operatorname{Tg}\beta = -\operatorname{Cotg}\varphi \text{ so ist}$$

$$\operatorname{Cotg}\varphi = \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1} \text{ und } \operatorname{Tg}\varphi = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}$$

$$\text{somit } a^2\,y_1 = b^2\,x_1 \operatorname{Tg}\varphi$$

$$\text{und } a\,y_1 = \frac{b^2}{a}\,x_1 \operatorname{Tg}\varphi.$$

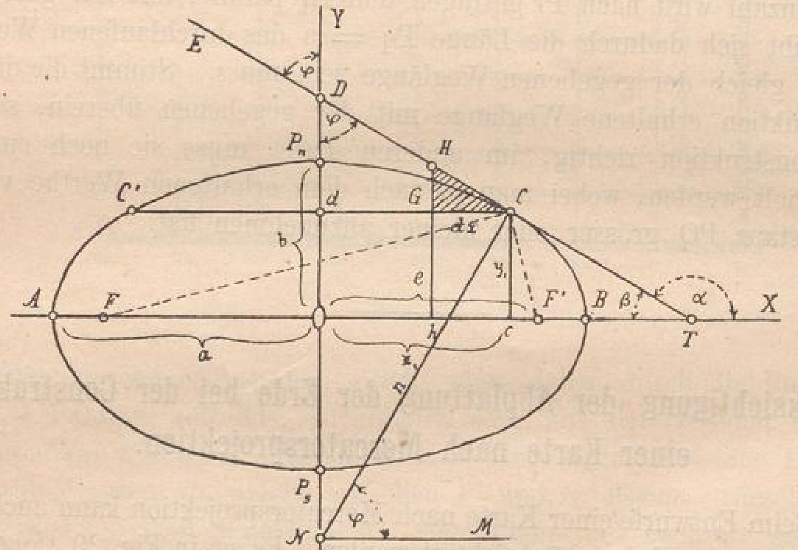


Fig. 29.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung der Ellipse, so ergibt sich:

$$\left(\frac{b^2\,x_1 \operatorname{Tg}\varphi}{a}\right)^2 + b^2\,x_1{}^2 = a^2\,b^2 \text{ oder}$$

$$b^4\,x_1{}^2 \operatorname{Tg}^2\varphi + a^2\,b^2\,x_1{}^2 = a^4\,b^2$$

$$x_1{}^2\,(b^2 \operatorname{Tg}^2\varphi + a^2) = a^4.$$

$$1)\quad x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{Tg}^2\varphi}}$$

In dieser Gleichung ist die Abszisse $x_1$ des Punktes C, welche gleich dem Radius Cd des Parallelkreises CC′ ist, durch die Breite $\varphi$ dieses Parallelkreises ausgedrückt. Man kann nun noch in diese

Gleichung das Verhältniss $\varepsilon$ der Excentricität OF' zur halben grossen Axe a einführen. Es ist:

$$\varepsilon = \frac{OF'}{OB} = \frac{e}{a}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$2)\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

Schreibt man im Radikand der Gleichung 1) $a^2$ als Faktor heraus, so ergibt sich:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} Tg^2 \varphi\right)}} = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2) Tg^2 \varphi}}$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2)\frac{Sin^2 \varphi}{Cos^2 \varphi}}} = \frac{a\, Cos\, \varphi}{\sqrt{Cos^2 \varphi + Sin^2 \varphi - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}$$

$$3)\ x_1 = \frac{a\, Cos\, \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}$$

Betrachtet man in dieser Gleichung $\varphi$ als variabel, so ist auch $x_1$ variabel und die Gleichung kann differenzirt werden:

$$dx = a \,.\, d\left(\frac{Cos\, \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}\right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}\left(d\, Cos\, \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi} - d\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}\, Cos\, \varphi\right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}\left(- Sin\, \varphi\, d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi} + \frac{\varepsilon^2 Sin\, \varphi\, Cos^2 \varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}\right)$$

$$dx = \frac{a\, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}\left(- Sin\, \varphi\, (1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi) + \varepsilon^2 Sin\, \varphi\, (1 - Sin^2 \varphi)\right)$$

$$dx = \frac{a\, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}\left(- Sin\, \varphi + \varepsilon^2 Sin^3 \varphi + \varepsilon^2 Sin\, \varphi - \varepsilon^2 Sin^3 \varphi\right)$$

$$4)\ dx = -\frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\, Sin\, \varphi\, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Soll nun die Oberfläche des Erdellipsoides nach der Mercatorprojektion auf einer Ebene abgebildet werden, so dass die Abbildung mit dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so müssen analog wie bei der Projektion der Kugel die Seiten zweier unendlich kleiner Rechtecke des Ellipsoides und seiner Abbildung in Proportion stehen. Ist daher $d\alpha$ der unendlich kleine Bogen des Aequators, ds derjenige eines Ellipsenmeridianes, so sind die unendlich kleinen Rechteckseiten, welche von zwei unendlich nahe aneinanderliegenden Meridianen und Parallelkreisen des Ellipsoides begrenzt werden: $d\alpha\, Cos\, \varphi$ und ds, wobei das Ellipsoidenrechteck um die Breite $\varphi$ vom Aequator entfernt ist. Ferner sind die entsprechenden Seiten der Abbildung des Rechteckes bei der Mercatorprojektion gleich $d\alpha$ und $d\lambda$, wobei $d\lambda$ das Differential der wachsenden Breiten und $d\alpha$ das Differential des Aequatorbogens bezeichnet, und es besteht die Proportion

$$ds : d\alpha \operatorname{Cos}\varphi = d\lambda : d\alpha$$

$$d\lambda = \frac{d\alpha}{d\alpha \operatorname{Cos}\varphi}\, ds$$

Die Bogen $d\alpha$ und $d\alpha . \operatorname{Cos}\varphi$ entsprechen aber denselben Centriwinkeln und verhalten sich daher wie die Radien der Kreise, zu welchen sie gehören, d. h. wie der Radius a des Aequators zum Radius $x_1$ des Parallelkreises, es ist daher:

$$5)\ d\lambda = \frac{a}{x_1}\, ds$$

Aus dem unendlich kleinen Dreiecke CHG (Fig. 29), in welchem die Tangente CH mit dem Bogenelemente ds zusammenfällt und Winkel $CHG = \varphi =$ der Breite des Parallelkreises CC′ ist, ergibt sich aber der Werth von CH oder

$$ds = \frac{dx}{\operatorname{Sin} CHG} = \frac{dx}{\operatorname{Sin}\varphi}$$ oder wenn man in diese Gleichung für dx den gefundenen Werth setzt, (siehe Glch. 4) ohne jedoch das — Zeichen zu berücksichtigen:

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man diesen Werth, sowie den Werth von $x_1$ (siehe Glch. 3) in Glch. 5 so ergibt sich:

$$d\lambda = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}}{a \operatorname{Cos}\varphi} \cdot \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\lambda = \frac{a(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi\, (1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, zerlege man sie in zwei Summanden. Multiplicirt man $\varepsilon^2$ mit $1 = \operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi$ so erhält man:

$$d\lambda = \frac{a\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}\left(\frac{1-\varepsilon^2(\operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = \frac{a\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}\left(1 - \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2\varphi}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = a\left[\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon . \frac{\varepsilon \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = a\left[\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon . \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so ergibt sich

$$\lambda = a\left[\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon \int \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right]$$

Wie oben gefunden wurde (siehe Seite 66 u. 67) ist aber

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{1}{M}\log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ferner kann $\int \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$ gesetzt werden, welches wie oben abgeleitet wurde $= \frac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1+x}{1-x} + C$ ist (siehe S. 66) und daher

$$\int \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi} = \frac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi}{1 - \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi} + C \text{ und}$$

$$\lambda = a \left[\frac{1}{M}\log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi}{1 - \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi}\right] + C$$

Das Integral ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu nehmen, für $\varphi = 0$ wird aber $\lambda = 0$, wesshalb die Constante wegfällt.

Entwickelt man das letzte Glied der Gleichung nach der logarithmischen Reihe:

$$\overset{e}{\log} \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

so ergibt sich, da $x = \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi$ ist:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi}{1 - \varepsilon \operatorname{Sin}\varphi} = -\varepsilon\left(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi + \frac{\varepsilon^3 \operatorname{Sin}^3\varphi}{3} + \frac{\varepsilon^5 \operatorname{Sin}^5\varphi}{5} + \dots\right)$$
$$= -\varepsilon^2 \operatorname{Sin}\varphi - \frac{1}{3}\varepsilon^4 \operatorname{Sin}^3\varphi - \frac{1}{5}\varepsilon^6 \operatorname{Sin}^5\varphi - \dots$$

und daher (XLVI) $\lambda = a \Big[\frac{1}{M}\log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \varepsilon^2 \operatorname{Sin}\varphi - \frac{1}{3}\varepsilon^4 \operatorname{Sin}^3\varphi$
$- \frac{1}{5}\varepsilon^6 \operatorname{Sin}^5\varphi - \dots\Big]$

Betrachtet man diese Länge, welche, da der Radius a des Aequators gewöhnlich in Toisen gegeben ist, ebenfalls in Toisen erhalten wird, als Bogen des Aequators, so entspricht diesem Bogen ein Centriwinkel von $\alpha$ Minuten, dessen Werth auf folgende Weise erhalten wird:

$\lambda : \operatorname{Arc}\alpha' = a : 1$ und $\operatorname{Arc}\alpha' = \frac{\lambda}{a}$ oder da $\operatorname{Arc}\alpha' = \alpha \operatorname{Arc} 1' = \alpha \operatorname{Sin} 1'$

$$\alpha \operatorname{Sin} 1' = \frac{\lambda}{a} \text{ und } \alpha = \frac{\lambda}{a \operatorname{Sin} 1'}$$

Dividirt man daher Glch. (XLVI) mit $a \operatorname{Sin} 1'$ so ergibt sich $\alpha$;

$$\alpha = \frac{1}{M \operatorname{Sin} 1'}\log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{Sin} 1'}\operatorname{Sin}\varphi - \frac{\varepsilon^4}{3 \operatorname{Sin} 1'}\operatorname{Sin}^3\varphi - \frac{\varepsilon^6}{5 \operatorname{Sin} 1'}\operatorname{Sin}^5\varphi - ..$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist unabhängig von $\varepsilon$ und bleibt unverändert, wenn man die Abplattung der Erde vernachlässigt, die anderen Glieder sind daher die relative Correktion dieser Grösse. Nach Bessel ist $\log \varepsilon = \bar{2},9122052$ und es ergibt sich als Endresultat zur Berechnung der wachsenden Breiten die Gleichung:

(XLVIa) $\alpha = 7915{,}704674 \log \operatorname{Tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - 22{,}9448 \operatorname{Sin}\varphi$
$- 0{,}051 \operatorname{Sin}^3\varphi - \dots$

($\alpha$ ist gleich einer bestimmten Minutenzahl des Erdäquators)

Dies ist die Formel von Delambre zur Berechnung der wachsenden Breiten, wenn das Erdellipsoid nach der Mercatorprojektion dargestellt werden soll, gewöhnlich wird jedoch auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht genommen, und sind die in obiger Tabelle (Seite 68) enthaltenen Werthe der wachsenden Breiten hinreichend genau.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Merkatorprojektion, welche wie wir gesehen haben für die Schifffahrt eine so grosse Bedeutung hat, zuerst von Gerard Kremer genannt Mercator in Anwendung gebracht wurde, indem er im Jahre 1569 eine grosse Seekarte nach dieser seiner Projection anfertigte, wodurch er sich in der Kartographie und Schifffahrtskunde einen unsterblichen Namen gesichert hat.

---