# Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

## IV. Abschnitt. Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

## IV. Abschnitt.

# Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode.

### Prüfung der berechneten Kartennetze von Europa und Deutschland.

Die Vorzüglichkeit eines Kartennetzes wird vor Allem durch die Uebereinstimmung seiner linearen Distanzen mit den entsprechenden Entfernungen auf der Oberfläche der Erdkugel oder des Erdellipsoides bedingt, während die Flächengleichheit entsprechender Theile von Bild und Original von geringerer Bedeutung ist. Wir wollen daher zur Prüfung des stereographischen und Bonne'schen Kartennetzes von Europa vier beliebige Punkte auf der Kugel wählen und ihre 6 sphärischen Distanzen, sowie diejenigen ihrer stereographischen und Bonne'schen Projektionen berechnen. Aus ihrer Vergleichung wird sich sofort ergeben, welcher Projektion im vorliegenden Falle der Vorzug zu geben ist. Als Eckpunkte des Viereckes wurden die Orte Lissabon, Constantinopel, Petersburg und Reikiavik auf Island (siehe Taf. I. Seite 60) gewählt. Von diesen liegen Constantinopel und Petersburg in der Nähe des Hauptmeridianes, Lissabon und Reikiavik an den Grenzen der Karte. Die sphärischen Coordinaten dieser Orte, welche dem „Annuaire publié par le bureau des longitudes à Paris" entnommen wurden, sind folgende:

für Lissabon: Länge $\lambda_1 = 11^0 28' 45''$ westlich v. Paris,
Breite $\varphi_1 = 38^0 42' 24''$ nördlich.

für Constantinopel Länge $\lambda_c = 26^0 38' 50''$ östlich v. Paris,
Breite $\varphi_c = 41^0 0' 16''$ nördlich.

für Petersburg: Länge $\lambda_p = 27^0 58' 13''$ östlich v. Paris,
Breite $\varphi_p = 59^0 56' 30''$ nördlich.

für Reikiavik: Länge $\lambda_r = 24^0 20' 20''$ westlich v. Paris,

Breite $\varphi_r = 64^0 8' 26''$ nördlich

Zunächst ergeben sich nach der schon früher angewandten Gleichung (siehe Fig. 24 S. 55)

$$\mathrm{Cos}\,\sigma = \mathrm{Sin}\,\varphi_1\,\mathrm{Sin}\,\varphi_2 + \mathrm{Cos}\,\varphi_1\,\mathrm{Cos}\,\varphi_2\,\mathrm{Cos}\,(\lambda_2 \pm \lambda_1)$$

die Seiten und Diagonalen des sphärischen Viereckes LCPR. [liegen beide Orte auf verschiedenen Seiten des $0^{\text{ten}}$ Meridianes, so gilt in $(\lambda_2 \pm \lambda_1)$ das + Zeichen, im anderen Falle das — Zeichen]

Für die Seite LC ist:

$$\mathrm{Cos\,LC} = \mathrm{Sin}\,38^0 42' 24''\,\mathrm{Sin}\,41^0 0' 16''$$
$$+ \mathrm{Cos}\,38^0 42' 24''\,\mathrm{Cos}\,41^0 0' 16''\,\mathrm{Cos}\,38^0 7' 35''$$

$$\mathrm{LC} = 29^0 7' 33'' = 104853'' = 436{,}887 \text{ geog. Meilen}$$

$$1^0 = 15 \text{ g. M.}$$

$$1'' = \frac{1}{240} = 0{,}0041666 \ldots \text{ g. M.}$$

Analog erhält man für die übrigen Distanzen die Werthe:

$$\mathrm{CP} = 18^0 57' 18'' = 68238'' = 284{,}325 \text{ g. M.}$$
$$\mathrm{PR} = 24^0\ 9' 29'' = 86969'' = 362{,}371 \text{ „ „}$$
$$\mathrm{RL} = 26^0 33' 00'' = 95580'' = 398{,}250 \text{ „ „}$$
$$\mathrm{LP} = 32^0 32'\ 8'' = 117128'' = 488{,}033 \text{ „ „}$$
$$\mathrm{CR} = 37^0\ 5' 46'' = 133546'' = 556{,}442 \text{ „ „}$$

## Berechnung der stereographischen Projektionen dieser Seiten. (siehe Fig. 34a)

Um die stereographischen Projektionen der Punkte LCPR zu bestimmen, verfahre man nach der in Aufgabe 1 (Seite 43) angegebenen Weise.

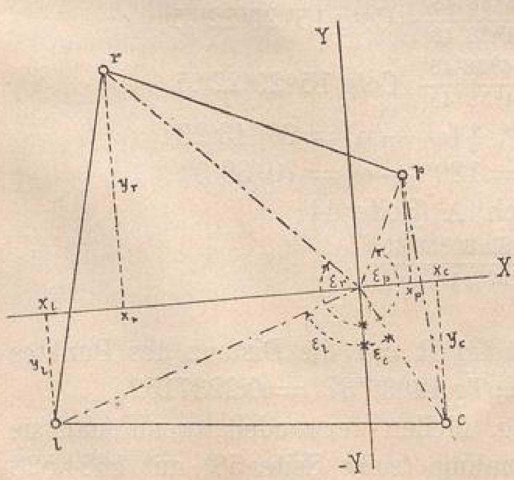

Fig. 34 a.

Man berechne für jeden Ort der Reihe nach die Werthe von $\gamma$, $\vartheta$, $\omega$ und $\varepsilon$, sodann mittelst den Gleichungen A und B (Seite 44) die Werthe von $\Delta$ und d, wodurch die stereographische Projektion des Ortes in der Bildebene bestimmt ist. Legt man nun durch den Mittelpunkt O der Karte ein rechtwinkliges Coordinatensystem und lässt man die Ordinatenaxe OY mit dem Hauptmeridiane zusammenfallen, so ergeben sich die Coordinaten eines jeden Ortes nach den Gleichungen:

$$x = d . \operatorname{Sin} \varepsilon, \qquad y = d \operatorname{Cos} \varepsilon.$$

Endlich erhält man die Entfernung der stereographischen Projektionen zweier Orte durch die Gleichung:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Da das Rechnungsverfahren für einen jeden der 4 angenommenen Orte dasselbe ist, so genügt es die Rechnung für einen der Orte z. B. für Lissabon durchzuführen und für die übrigen nur die erhaltenen Resultate anzugeben.

Berechnung des Winkels $\gamma_1$. Da als Hauptmeridian der Karte der 40. östlich von Ferro angenommen wurde, und Ferro 20°30′ westlich von Paris liegt, so bildet der Meridian von Paris mit dem Hauptmeridiane einen Winkel

$$\gamma = 40^0 - 20^0 30' = 19^0 30'$$

und es ist für Lissabon

$$\gamma_1 = 19^0 30' + 11^0 28' 45'' = 30^0 58' 45''$$

Ferner der aus Fig. 7 Seite 43 ersichtliche Bogen

$$\vartheta_1 = 90^0 - \varphi_1 = 51^0 17' 36''$$

Bei der Berechnung des Netzes von Europa wurde die Poldistanz des Gegenpunktes $Q : \delta = 38^0$ angenommen und ist daher

$$\vartheta_1 - \delta = 13^0 17' 36'' \text{ und } \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \delta) = 6^0 38' 48''$$

$$\vartheta_1 + \delta = 89^0 17' 36'' \text{ und } \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 + \delta) = 44^0 38' 48''$$

somit nach den Glch. V (Seite 19)

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \eta_1) = \frac{\operatorname{Cos} 6^0 38' 48''}{\operatorname{Cos} 44^0 38' 48''} \operatorname{Cotg} 15^0 29' 22'',5$$

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \eta_1) = \frac{\operatorname{Sin} 6^0 38' 48''}{\operatorname{Sin} 44^0 38' 48''} \operatorname{Cotg} 15^0 29' 22'',5$$

$$\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \eta_1) = 78^0 46' 22'', \ \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \eta_1) = 30^0 43' 29''$$

$$\omega_1 = 109^0 29' 51'', \ \varepsilon_1 = 180^0 - \omega_1 = 70^0 30' 9''$$

Ferner ergibt sich nach Glch. A (Seite 44)

$$\operatorname{Sin} \Delta_1 = \frac{\operatorname{Sin} 51^0 17' 36'' . \operatorname{Sin} 30^0 58' 45''}{\operatorname{Sin} 109^0 29' 51''}$$

$$\Delta_1 = 25^0 13' 14''$$

Nach Glch. B (Seite 44) ist für $R = 1$ die Distanz des Punktes 1 vom Centrum der Karte: $d = \operatorname{Tg} 12^0 36' 37'' = 0,2237152$.

Diese Distanz wird in geog. Meilen verwandelt, wenn man sie nach der früher gemachten Annahme (siehe Seite 58) mit 1684,528 (log = 3,2264782) multiplicirt. Es ist dann d = 376,854 geog. Meilen.

Die Coordinaten des Punktes l in Bezug auf die durch den Mittelpunkt der Karte gehenden Axen sind:

$$x_l = -376{,}854 \operatorname{Sin} 70^0 30' 9'' = -355{,}2441$$

$$y_l = -376{,}854 \operatorname{Cos} 70^0 30' 9'' = -125{,}7811$$

Für Constantinopel ergeben sich in analoger Weise die Coordinaten

$$x_c = 79{,}9625, \qquad y_c = -158{,}4973$$

und daher $x_l - x_c = -435{,}2066 \qquad y_l - y_c = 32{,}7162$

Die Distanz $lc = \sqrt{(-435{,}2066)^2 + 32{,}7162^2} = 436{,}435$ geog. Meilen.

Die Entfernungen der übrigen Orte sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Berechnung der Bonne'schen Projektionen der Seiten LC, CP, PR, RL, LP, CR.

Da das Rechnungsverfahren auch hier für eine jede Seite dasselbe ist, so genügt es die Rechnung für die Seite LC durchzuführen.

Für Lissabon ist

$$\gamma_l = 30^0 58' 45'' = 111525''$$

und die Breite

$\varphi_l = 38^0 42' 24''$. Wie bei Berechnung des Bonne'schen Netzes von Europa gefunden wurde, ist die Kante des Tangentialkegels, welche gleichzeitig Radius des mittleren Parallelkreises ist $MO = 671{,}466$ geog. Meilen, und da $1'' = \frac{1}{240}$ geog. Meilen und die geog. Breite des Kartenmittelpunktes $\varphi = 52^0$ ist, so ist der Radius des Parallelkreises auf welchem Lissabon liegt:

$$r_l = 671.466 + \frac{52.60.60 - \varphi_l}{240}$$

$$= 671{,}466 + \frac{47856}{240}$$

$$r_l = 671{,}466 + 199{,}40$$

$$= 870{,}866 \text{ geog. Meilen.}$$

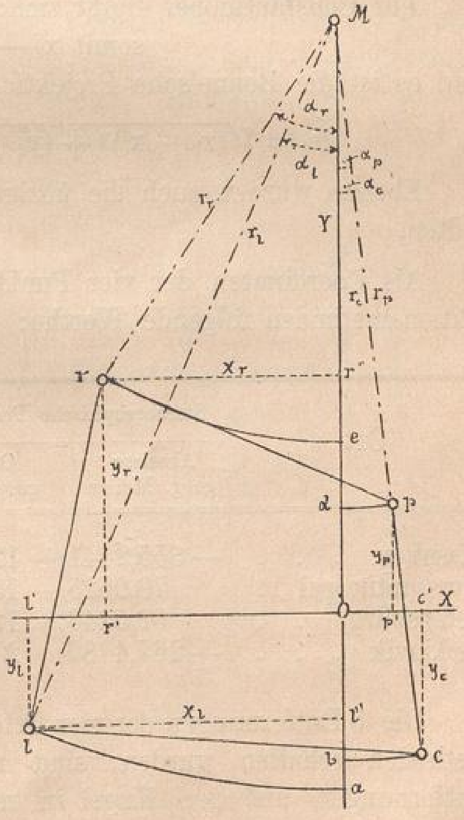


Fig. 34.

Nach Gleichung LIX (S. 91) ergibt sich nun der Werth des Centriwinkels $\alpha_1$ welcher dem Bogen al (Fig. 34) entspricht.

$$\alpha_1 = \frac{859,437 \cdot 111525}{870,866} \operatorname{Cos} 38^0 42' 24''$$

$$\alpha_1 = 85887'' = 23^0 51' 27''$$

Legt man durch den Mittelpunkt O der Karte ein senkrechtes Coordinatensystem und lässt man die Ordinatenaxe OY, wie Fig. 34 zeigt, mit dem Hauptmeridiane der Karte zusammenfallen, so ergeben sich die Coordinaten des Punktes l nach den Gleichungen:

$$x_l = -r_l \operatorname{Sin} \alpha_l = -870{,}866 \operatorname{Sin} 23^0 51' 27'' = -352{,}233$$

$$y_l = -r_l \operatorname{Cos} \alpha_l + MO = -870{,}866 \operatorname{Cos} 23^0 51' 27'' + 671{,}466$$

$$y_l = -124{,}988.$$

Auf analoge Weise werden auch die Coordinaten für die Bonne'schen Projektionen der übrigen Orte berechnet.

Für Constantinopel ergibt sich: $x_c = 80{,}779$, $y_c = -161{,}023$
somit $x_l - x_c = -433{,}012$, $y_l - y_c = 36{,}035$
und es ist die Bonne'sche Projektion der Seite LC:

$$lc = \sqrt{(x_l - x_c)^2 + (y_l - y_c)^2} = 434{,}509$$

Ebenso wurden auch die übrigen Distanzen cp, pr, rl, lp, cr erhalten.

Als Coordinaten der vier Punkte ergaben sich nach beiden Projektionsmethoden folgende Werthe:

| Ort | Stereographische Projektion | | Bonne'sche Projektion | |
|---|---|---|---|---|
| | Abszisse geog. Meilen | Ordinate geog. Meilen | Abszisse geog. Meilen | Ordinate geog. Meilen |
| Lissabon . . . | — 355,2441 | — 125,7811 | — 352,2330 | — 124,988 |
| Constantinopel . | 79,9625 | — 158,4973 | 80,7788 | — 161,023 |
| Petersburg . . | 62,5446 | 120,7769 | 63,4978 | 122,787 |
| Reikiavik . . . | — 267,4487 | 270,9911 | — 270,6742 | 263,781 |

Die 6 Entfernungen der vier Orte, wie sie nach beiden Projektionsmethoden erhalten wurden, sind im Vergleiche mit den wirklichen Entfernungen auf der Kugel in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

| Entfernung | Sphärische Distanz geog. Meilen | Stereographische Projektion geog. Meilen | Bonne'sche Projektion geog. Meilen | Fehler des stereographischen Projektion geog. Meilen*) | Fehler der Bonne'schen Projektion geog. Meilen*) | Differenz zwischen der stereographischen und Bonne'schen Projektion geog. Meilen**) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lissabon-Constantinopel . . . | 436,887 | 436,435 | 434,509 | —0,452 | —2,378 | —1,926 |
| Constantinopel-Petersburg . . | 284,325 | 279,817 | 284,335 | —4,508 | +0,010 | +4,518 |
| Petersburg-Reikiavik . . . . | 362,371 | 362,574 | 362,699 | +0,203 | +0,328 | +0,125 |
| Reikiavik-Lissabon . . . . . | 398,250 | 406,370 | 397,232 | +8,120 | —1,018 | —9,138 |
| Lissabon-Petersburg . . . . . | 488,033 | 485,117 | 483,968 | —2,916 | —4,065 | —1,149 |
| Constantinopel-Reikiavik . . . | 556,442 | 552,408 | 551,342 | —4,034 | —5,100 | —1,066 |

Aus der Vergleichung der Fehler, welche sich für beide Projektionsmethoden ergeben, sieht man, dass sich nur für die Distanz „Reikiavik-Lissabon" ein wesentlicher Vortheil zu Gunsten der Bonneschen Methode ergibt, für die übrigen Distanzen sind die Differenzen bei beiden Methoden so ziemlich dieselben. Immerhin würde man im vorliegenden Falle die Bonne'sche Methode der stereographischen vorziehen.

Um die nach beiden Methoden erhaltenen Kartennetze von Deutschland zu prüfen, (nach unserer Annahme S. 60 besitzt der zu projicirende Kugelabschnitt einen Bogenhalbmesser von 8⁰) wurden vor Allem die Seiten der sphärischen Trapetze und ihrer Projektionen berechnet, welche in Figur 45 schematisch dargestellt sind. Es ist

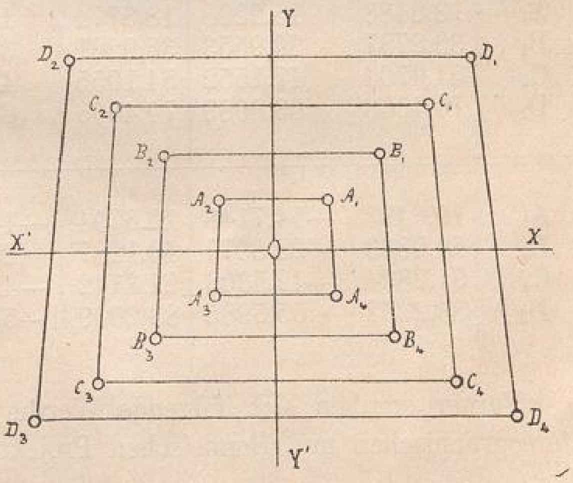

Fig. 45.

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Projektion grösser, das Zeichen — dass sie kleiner ist als die sphärische Distanz

**) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'sche Projektion grösser, das Zeichen — dass sie kleiner ist als die stereographische Projektion.

O der Mittelpunkt der Karte, dessen sphärische Coordinaten $\lambda = 30^0$ und $\varphi = 50^0$ sind, XOY ein durch diesen Punkt gehendes rechtwinkliges Axensystem, ferner $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ Sehnen von Parallelkreisen, deren Breiten $51^0$, $52^0$, $53^0$, $54^0$ beträgt, während $A_3A_4$, $B_3B_4$, $C_3C_4$, $D_3D_4$ Sehnen solcher Parallelkreise sind, welche die Breiten 49, 48, 47, $46^0$ besitzen. Endlich gehören die Sehnen $A_1A_4$, $B_1B_4$, $C_1C_4$, $D_1D_4$ Meridianbogen an, die mit dem Hauptmeridiane der Karte die Winkel $\gamma = 2^0$, $4^0$, $6^0$, $8^0$ einschliessen. In Folge dieser Annahme nehmen sowohl die Breiten als Längen der den Sehnen angehörenden Parallelkreise und Meridiane in arithmetischen Progressionen zu und es wird sich aus der Vergleichung der sphärischen Distanzen und ihrer Projektionen eine gewisse Gesetzmässigkeit in Bezug auf die Genauigkeit der Netze ergeben.

In nachfolgender Tabelle sind die Coordinaten der stereographischen und Bonne'schen Projektionen der Eckpunkte obiger Trapetze zusammengestellt:

| Punkt | stereographische Coordinaten | | Bonne'sche Coordinaten | | Differenz der Abszissen*) | Differenz der Ordinaten*) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Abszisse | Ordinate | Abszisse | Ordinate | | |
| $A_1$ | 18,8488 | 15,2298 | 18,8774 | 15,2529 | +0,0286 | +0,0231 |
| $B_1$ | 36,8787 | 30,9553 | 36,9221 | 30,9870 | +0,0434 | +0,0317 |
| $C_1$ | 54,0704 | 47,1552 | 54,1055 | 47,1682 | +0,0351 | +0,0130 |
| $D_1$ | 70,4063 | 63,8089 | 70,4006 | 63,7589 | —0,0057 | —0,0500 |
| $A_4$ | 19,6493 | —14,7148 | 19,6794 | —14,7370 | +0,0301 | +0,0222 |
| $B_4$ | 40,0833 | —28,8977 | 40,1287 | —28,9274 | +0,0454 | +0,0297 |
| $C_4$ | 61,2834 | —42,5306 | 61,3142 | —42,5425 | +0,0308 | +0,0119 |
| $D_4$ | 83,2352 | - 55,5985 | 83,2009 | —55,5565 | —0,0343 | —0,0420 |

Ferner ergaben sich folgende Werthe für die Entfernungen der stereographischen und Bonne'schen Projektionen dieser Punkte:

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'schen Coordinaten grösser, das Zeichen —, dass sie kleiner sind als die stereographischen Coordinaten.

| Sehnen der Parallelkreise | Breite ihrer Endpunkte | sphärische Distanz der Endpunkte geog. Ml. | stereo-graphische Projektion geog. Ml. | Bonne'sche Projektion geog. Ml. | Fehler der stereog. Projektion *) geog. Ml. | Fehler der Bonne'schen Projekt. *) geog. Ml. | Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Proj. geog. Ml. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1 A_2$ | 51° | 37,7546 | 37,6976 | 37,7547 | —0,0570 | +0,0001 | +0,0571 |
| $B_1 B_2$ | 52° | 73,8421 | 73,7575 | 73,8442 | —0,0846 | +0,0021 | +0,0867 |
| $C_1 C_2$ | 53° | 108,2004 | 108,1408 | 108,2109 | —0,0596 | +0,0105 | +0,0701 |
| $D_1 D_2$ | 54° | 140,7678 | 140,8126 | 140,8011 | +0,0448 | +0,0333 | —0,0115 |
| $A_3 A_4$ | 49° | 39,3589 | 39,2987 | 39,3588 | —0,0602 | —0,0001 | +0,0601 |
| $B_3 B_4$ | 48° | 80,2596 | 80,1666 | 80,2575 | —0,0930 | —0,0021 | +0,0909 |
| $C_3 C_4$ | 47° | 122,6395 | 122,5668 | 122,6284 | —0,0727 | —0,0111 | +0,0616 |
| $D_3 D_4$ | 46° | 166,4367 | 166,4704 | 166,4017 | +0,0337 | —0,0350 | —0,0687 |

| Sehnen der Meridianbogen | Winkel, welche die Meridiane mit dem Hauptmeridiane bilden | sphärische Distanz der Endpunkte geog. Ml. | stereo-graphische Projektion geog. Ml. | Bonne'sche Projektion geog. Ml. | Fehler der stereograph. Projektion geog. Ml. | Fehler der Bonne'schen Projektion geog. Ml. | Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Proj. geog. Ml. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1 A_4$ | 2° | 30 | 29,9553 | 30,0006 | —0,0447 | +0,0006 | +0,0453 |
| $B_1 B_4$ | 4° | 60 | 59,9387 | 60,0001 | —0,0613 | +0,0001 | +0,0614 |
| $C_1 C_4$ | 6° | 90 | 89,9754 | 89,9999 | —0,0246 | —0,0001 | +0,0245 |
| $D_1 D_4$ | 8° | 120 | 120,0946 | 120,0001 | +0,0946 | +0,0001 | —0,0945 |

Wie man aus der Fehlerreihe der stereographischen Projektionen ersieht, sind sowohl für die Parallelkreise als Meridiane die Projektionen der drei dem Centrum der Karte zunächstliegenden Sehnen kleiner als die sphärischen Distanzen ihrer Endpunkte, dagegen sind für die Sehnen $D_1 D_2$, $D_3 D_4$, $D_1 D_4$ die stereographischen Projektionen grösser als die sphärischen Entfernungen ihrer Endpunkte. Während also die stereographischen Projektionen derjenigen sphärischen Distanzen, deren senkrechte Abstände vom Mittelpunkte des Kugelabschnittes zwischen 0° und 3° liegen, kleiner sind als diese, sind die Projektionen solcher Distanzen, die vier und mehr Grade vom Centrum der Karte entfernt sind, grösser als die wirklichen Ent-

---

*) Das Zeichen + bedeutet, dass die Projektion grösser, das Zeichen —, dass sie kleiner ist als die sphärische Distanz.

fernungen auf der Kugel. Bei der stereographischen Projektion eines Kugelabschnittes sind daher in Folge unserer früheren Annahme die Distanzen im Innern der Karte etwas kleiner, diejenigen an den Grenzen der Karte etwas grösser als die wahren Entfernungen auf der Kugel.

In Bezug auf die Bonne'sche Methode ergibt sich aus der Betrachtung der Fehlercolumne das Resultat, dass sowohl die Sehnen der Parallelkreise, als auch diejenigen der Meridiane mit den sphärischen Entfernungen ihrer Endpunkte sehr gut übereinstimmen, und könnte dies zu der Vermuthung Raum geben, dass bei der Bonne'schen Projektion wirklich keine bemerkenswerthen Abweichungen vorkommen, was indessen wie nachfolgende Zusammenstellung zeigen wird, für beliebig gewählte Distanzen nicht der Fall ist. Wie man ferner aus der Fehlerreihe der Bonne'schen Projektion ersieht, sind die Entfernungen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, welche nördlich vom Centrum der Karte liegen, grösser; die Entfernungen $A_3 A_4$, $B_3 B_4$, $C_3 C_4$, $D_3 D_4$, welche sich südlich davon befinden, kleiner, als die entsprechenden sphärischen Distanzen. Es folgt hieraus, dass die Meridianpunkte, welche sich nördlich vom mittleren Parallelkreise der Karte befinden, etwas zu weit vom Hauptmeridiane entfernt sind, während die südlich von diesem Parallelkreise gelegenen Meridianpunkte dem Hauptmeridiane zu nahe liegen.

Um zu untersuchen, welches die Fehler der Projektionen beliebig gewählter Kugeldistanzen sind, wurden auf der Kugelfläche 6 Orte angenommen, und ihre gegenseitigen Entfernungen, sowie diejenigen ihrer Projektionen berechnet. Als solche Orte wurden Paris, Turin, Triest und Berlin gewählt, ferner zwei Punkte A und C, welche in Bezug auf den Hauptmeridian zu Paris und Turin symetrische Lagen besitzen (Taf. I. S. 60). Die Punkte A und C haben in Folge dessen mit den Orten Paris und Turin nach beiden Projektionsmethoden gleiche Ordinaten und ihre Abszissen unterscheiden sich von denjenigen der letztgenannten Orte nur in Bezug auf das Zeichen.

Im Folgenden sind die erhaltenen Zahlenwerthe zusammengestellt:

## Sphärische Coordinaten.

| Ort | Länge $\lambda$ | Winkel, welchen der Meridian des Ortes mit dem Hauptmeridiane bildet | Breite $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| Paris | 0° 0′ 0″ | —9° 30′ 0″ | 48° 50′ 49″ *) |
| Turin | 5° 21′ 25″ östl. | —4° 8′ 35″ | 45° 4′ 8″ |
| Triest | 11° 26′ 17″ „ | 1° 56′ 17″ | 45° 38′ 50″ |
| Berlin | 11° 3′ 30″ „ | 1° 33′ 30″ | 52° 30′ 17″ |
| A | 19° 0′ 0″ „ | 9° 30′ 0″ | 48° 50′ 49″ |
| C | 13° 38′ 35″ „ | 4° 8′ 35″ | 45° 4′ 8″ |

## Coordinaten der Projektionen der Orte.

| Ort | stereograph. Coordinaten | | Bonne'sche Coordinaten | | Differenz der Abszissen**) | Differenz der Ordi-naten**) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Abszisse | Ordinate | Abszisse | Ordinate | | |
| Paris | — 93,47328 | — 11,36807 | — 93,52353 | — 11,3497 | + 0,05025 | — 0,01837 |
| Turin | — 43,88849 | — 72,71969 | — 43,86745 | — 72,7555 | — 0,02104 | + 0,03581 |
| Triest | 20,31766 | — 64,96175 | 20,32029 | — 65,0290 | + 0,00263 | + 0,06725 |
| Berlin | 14,21128 | 37,66682 | 14,22707 | 37,7189 | + 0,01579 | + 0,05208 |
| A | 93,47328 | — 11,36807 | 93,52353 | — 11,3497 | + 0,05025 | — 0,01837 |
| C | 43,88849 | — 72,71969 | 43,86865 | — 72,7555 | — 0,01984 | + 0,03581 |

## Entfernungen der Orte nach der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode verglichen mit den wirklichen Distanzen auf der Kugel.

| Entfernung | Wirkliche oder sphärische Distanz geogr. Mln. | stereogr. Projektion geogr. Mln. | Bonne'sche Projektion geogr. Mln. | Fehler der stereogr. Projektion geogr. Mln. | Fehler der Bonne'schen Projektion geogr. Mln. | Differenz zwischen der stereogr. und Bonne'schen Projektion |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Paris-Turin | 78,8267 | 78,8839 | 78,9701 | + 0,0572 | + 0,1434 | + 0,0862 |
| Turin-Triest | 64,6667 | 64,6732 | 64,6511 | + 0,0065 | — 0,0156 | — 0,0221 |
| Triest-Berl. | 102,9292 | 102,8101 | 102,9284 | — 0,1191 | — 0,0008 | + 0,1183 |

*) Breite des Pantheon.

**) Das Zeichen + bedeutet, dass die Bonne'sche Coordinate grösser, das Zeichen —, dass sie kleiner ist als die stereog. Coordinate.

| Entfernung | Wirkliche oder sphärische Distanz geogr. Mln. | stereogr. Projektion geogr. Mln. | Bonne'sche Projektion geogr. Mln. | Fehler der stereogr. Projektion geogr. Mln. | Fehler der Bonne'schen Projektion geogr. Mln. | Differenz zwischen der stereogr. und Bonne'schen Projektion |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Berlin-Paris | 118,4000 | 118,3232 | 118,3973 | —0,0768 | —0,0027 | +0,0741 |
| Paris-Triest | 125,8104 | 125,7802 | 125,8645 | —0,0302 | +0,0541 | +0,0843 |
| Turin Berlin | 124,8696 | 124,7428 | 124,8181 | —0,1268 | —0,0517 | +0,0753 |
| AP | 187,0438 | 186,9466 | 187,0471 | —0,0972 | +0,0033 | +0,1005 |
| ATu. | 150,4692 | 150,4403 | 150,4901 | —0,0289 | +0,0209 | +0,0498 |
| ATr. | 90,6667 | 90,6864 | 90,7754 | +0,0197 | +0,1087 | +0,0890 |
| AB | 93,2354 | 93,2035 | 93,2505 | —0,0319 | +0,0151 | +0,0470 |
| CP | 150,4692 | 150,4403 | 150,4901 | —0,0289 | +0,0209 | +0,0498 |
| CTu. | 87,7442 | 87,7770 | 87,7373 | +0,0328 | —0,0069 | —0,0397 |
| CTr. | 24,7983 | 24,8147 | 24,7836 | +0,0164 | —0,0147 | —0,0311 |
| CA | 78,8267 | 78,8839 | 78,9701 | +0,0572 | +0,1434 | +0,0862 |
| CB | 114,4046 | 114,3063 | 114,3819 | —0,0983 | —0,0227 | +0,0756 |

Die Summe der Fehlerquadrate, welche immer ein Minimum sein soll, beträgt bei der stereographischen Projektion: 0,06719091, bei der Bonne'schen Projektion: 0,06068531 Quadratmeilen. Zieht man aus diesen Zahlen die Quadratwurzel, so erhält man die Seiten der Fehlerquadrate, welche gleich 0,259212 und 0,246344 Einheiten sind. Obgleich sich durch diese Zahlen ein kleiner Vortheil zu Gunsten der Bonne'schen Projektionsmethode ergibt, so ist doch der Unterschied beider Zahlen so gering, dass beide Projektionsmethoden als auf gleicher Stufe stehend betrachtet werden können. Vergleicht man die sich ergebenden Fehlerreihen, so sieht man, dass in 3 Fällen (für die Distanzen ATu, CP, CTr) die Fehler bei beiden Methoden nahezu gleich sind, ausserdem sind in 5 Fällen die Fehler der stereographischen, in 7 Fällen diejenigen der Bonne'schen Projektion kleiner als die entsprechenden der anderen Projektionsmethode. Der grösste Fehler bei der stereographischen Methode ist gleich 0,1268 Meilen, während derjenige bei der Bonne'schen Methode 0,1434 Meilen beträgt, es ist also auch in dieser Beziehung zwischen beiden Projektionsmethoden kein bemerkenswerther Unterschied. Nimmt man an der grösste noch vorkommende Fehler betrage bei beiden Methoden 0,15 Meilen, so würde derselbe im Maasstabe 1 : 600000, in welchem die Karte von Deutschland einen Durchmesser von 2,963 oder nahezu 3 Meter erhält, gleich 1,8 Millimeter werden, eine Grösse welche zwar klein ist aber beim Abgreifen einer Distanz immerhin noch berücksichtigt werden kann.

Betrachtet man endlich noch die sich ergebenden Differenzen zwischen den stereographischen und Bonne'schen Projektionen, so erhält man sowohl in Bezug auf die Coordinaten der einzelnen Punkte als auch in Bezug auf ihre gegenseitigen Entfernungen als grössten Unterschied, welcher sich für die Distanz „Triest-Berlin" ergibt, 0,1183 g. Meilen, ein Werth, welcher weder den grössten Fehler der bei der stereographischen Projektion begangen wird noch denjenigen, welcher sich nach der Bonne'schen Methode ergibt, erreicht.

Für das Kartennetz der Schweiz wurde ebenfalls eine Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Methode angestellt. Als Mittelpunkt der Karte wurde derjenige angenommen, dessen sphärische Coordinaten $\lambda = 5^0 53'$ (östlich von Paris) und $\varphi = 46^0 48'$ betragen. Durch Rechnung ergibt sich der Bogenhalbmesser des Grenzkreises der Karte $= 1^0 58'$ oder $= 29{,}5$ geog. Meilen. Die stereographische Projection des Grenzkreises besitzt einen Radius $r = 0{,}01716409$ Einheiten, welche 29,5 geog. Meilen repräsentiren, und sind daher die berechneten Werthe des stereographischen Netzes mit $\frac{29{,}5}{0{,}01716409} = 1718{,}704$ ($\log = 3{,}2352012$) zu multipliciren. Die Poldistanz des Gegenpunktes des Auges beträgt $\delta = 43^0 12'$. Zur Prüfung des Netzes wurden auch hier 4 Orte: Genf, Zürich, Basel, Airolo angenommen, und ihre sphärischen, stereographischen und Bonne'schen Entfernungen berechnet. Es ergaben sich folgende Werthe:

| Ort | Länge östlich von Paris *) | nördliche Breite *) | Poldistanz | Winkel, welchen der Meridian des Ortes mit dem Hauptmeridiane bildet |
|---|---|---|---|---|
| Genf | $\lambda_g = 3^0 49' 00''$ | $\varphi_g = 46^0 11' 59''$ | $\vartheta_g = 43^0 48' 1''$ | $\gamma_g = 2^0 04'$ |
| Zürich | $\lambda_z = 6^0 12' 45''$ | $\varphi_z = 47^0 22' 40''$ | $\vartheta_z = 42^0 37' 20''$ | $\gamma_z = 0^0 19' 45''$ |
| Basel | $\lambda_b = 5^0 15' 00'$ | $\varphi_b = 47^0 33'$ | $\vartheta_b = 42^0 27'$ | $\gamma_b = 0^0 38'$ |
| Airolo | $\lambda_a = 6^0 15' 00''$ | $\varphi_a = 46^0 32'$ | $\vartheta_a = 43^0 28'$ | $\gamma_a = 0^0 22'$ |

*) Die Werthe wurden Wolf's Taschenbuch der Mathematik entnommen.

## Berechnete Coordinaten der stereographischen und Bonne'schen Projektionen der vier Orte in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Karte gehendes Axensystem.

| Ort | stereographische Projektion | | Bonne'sche Projektion | | Differenzen | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Abszisse | Ordinate | Abszisse | Ordinate | der Abszissen | der Ordinaten |
| Genf | —21,45375 | — 8,72249 | —21,45407 | — 8,7222 | +0,00032 | —0,00029 |
| Zürich | 3,34322 | 8,67313 | 3,34346 | 8,6737 | +0,00024 | +0,00057 |
| Basel | — 6,41157 | 11,27496 | — 6,41191 | 11,2759 | +0,00034 | +0,00094 |
| Airolo | 3,78334 | — 3,99097 | 3,78362 | — 3,9911 | +0,00028 | +0,00013 |

## Entfernungen der vier Orte nach der stereographischen und Bonne'schen Projektionsmethode verglichen mit den wirklichen Distanzen auf der Kugel.

| Entfernung | in Bogenmass | wirkliche oder sphärische Distanz geog. Meilen | stereog. Projektion | Bonne'sche Projektion | Fehler der stereog. Projektion geog. Meilen | Fehler der Bonne'schen Projektion geog. Meilen | Differenz zwischen der stereog. und Bonne'schen Projektion |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Genf-Basel | 1°40′ 5,″715*) | 25,02380 | 25,02330 | 25,02380 | —0,00050 | —0,00000 | +0,00050 |
| Basel-Zürich | 0 40 23, 17 | 10,09654 | 10,09582 | 10,09646 | —0,00072 | —0,00008 | +0,00064 |
| Zürich-Airolo | 0 50 41, 481 | 12,67284 | 12,67260 | 12,67244 | —0,00024 | —0,00040 | —0,00016 |
| Airolo-Genf | 1 42 42, 658 | 25,67770 | 25,67677 | 25,67733 | —0,00093 | —0,00037 | +0,00054 |
| Genf-Zürich | 2 1 9, 901 | 30,29125 | 30,29022 | 30,29083 | —0,00103 | —0,00042 | +0,00061 |
| Airolo-Basel | 1 13 26, 064 | 18,35860 | 18,35714 | 18,35838 | —0,00146 | +0,00022 | +0,00124 |

Wie man aus der Zusammenstellung der Coordinaten der 4 Punkte sieht, beträgt die grösste Coordinatendifferenz 0,00094 geog. Meilen**) oder 6,963 m, welche Distanz im Massstabe 1 : 100000 (grosse Dufourkarte) 0,07 mm beträgt und beim Abgreifen auf einem Massstabe nicht mehr berücksichtigt werden kann, es ist daher schon aus diesem Grunde gleichgültig nach welcher der beiden Projektionsmethoden ein Kartennetz, in das die Schweiz eingezeichnet werden soll, construirt wird. Betrachtet man die Zusammenstellung der sphärischen, stereographischen und Bonne'schen Entfernungen der 4 Orte, so ergibt sich allerdings auch im vorliegenden Falle ein Vor-

*) Die sphärischen Distanzen der 4 Orte wurden mittelst den Neper'schen Analogien und dem Sinussatze so genau berechnet, als es mit 7stelligen Logarithmen bei grösster Schärfe der Rechnung möglich ist.

**) 1 geog. Meile = 7407,407 m (log = 3,8696662).

theil zu Gunsten der Bonne'schen Methode, Doch ist auch der grösste Fehler der stereographischen Projection nur 0,00146 geog. Meilen = 10,815 m, was im Massstab 1:100000 ein zehntel Millimeter beträgt, eine Grösse, welche beim Abgreifen auf einem Massstabe ebenfalls vernachlässigt werden kann.

Aus dem Vorhergehenden folgt daher, dass für Karten, welche kleinere Kugelabschnitte, wie Deutschland, Frankreich die Schweiz etc., darstellen sollen, die stereographische Projectionsmethode an der Stelle der Bonne'schen Methode zur Anwendung kommen kann, indem die aus einer solchen Karte entnommenen Distanzen nicht mit wesentlich grösseren Fehlern behaftet sind, als dies bei der Bonne'schen Methode der Fall ist. Da sich, wie wir gesehen haben, nach der stereographischen Projektionsmethode sowohl Parallelkreise als Meridiane wieder als Kreise projiciren, die aufeinander senkrecht stehen, während bei der Bonne'schen Methode nur die Parallelkreise als Kreise gezogen werden, die Meridiane aber Curven sind, deren genaue Construction umständlich ist, so wird man es nach meinem Dafürhalten in Zukunft vorziehen bei der Projection kleinerer Kugelabschnitte die stereographische Methode in Anwendung zu bringen

---