Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

V. Abschnitt. Von den äquivalenten Abbildungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

V. Abschnitt.

Von den äquivalenten Abbildungen.

Wenn sich bei einer Projektion der Kugeloberfläche die Projektionen irgend zweier Flächenelemente ebenso verhalten wie ihre Originale auf der Kugel, so sagt man die Projektion sei eine äquivalente Abbildung. Sind F_1 und F_2 zwei Flächenelemente der Kugel, f_1 und f_2 ihre Projektionen, so hat man die Proportion

$$f_1 : f_2 = F_1 : F_2 \text{ oder}$$
$$f_1 : F_1 = f_2 : F_2.$$

Ferner findet für eine beliebige Anzahl Flächenelemente die Proportionalreihe statt:

$$f_1 : F_1 = f_2 : F_2 = f_3 : F_3 = \ldots = f_n : F_n$$

Hieraus folgt $\Sigma(f) : \Sigma(F) = f_1 : F_1$

$$= f_2 : F_2$$
$$= \ldots\ldots$$

für $\Sigma(f) = \Sigma(F)$ ist auch $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2 \ldots\ldots f_n = F_n$.

Es ist aber die Summe aller F gleich dem Flächeninhalte der sphärischen Figur, die Summe aller f gleich dem Flächeninhalte ihrer Projektion. Wird daher eine sphärische Figur in ihrer wahren Grösse abgebildet, so sind bei einer äquivalenten Abbildung auch die einzelnen Flächenelemente der Projektion gleich den entsprechenden Elementen der sphärischen Figur.

Wir wollen nun für einige der bekanntesten Kartenprojektionen die Aequivalenz beweisen:

1. Lambert's normale isocylindrische Projektion.

Denkt man sich die Kugel mit einem senkrechten Kreiscylinder umhüllt, welcher sie längs des Aequator berührt, so wird dieser von den verlängerten Meridianebenen in parallelen Geraden geschnitten, welche gleich weit von einander entfernt sind. Ebenso werden die verlängerten Parallelkreisebenen die Cylinderfläche in Kreisen schneiden, welche mit dem Aequator congruent sind. Denkt man sich nun die Cylinderfläche längs einer Kante resp. eines Meridianes aufgeschnitten und in eine Ebene entwickelt, so entsteht ein Netz von senkrecht auf einander stehenden Geraden, bei welchen die Meridiane gleiche Entfernungen besitzen, während die Distanz der Parallelkreise um so mehr abnimmt, je näher die letzteren dem Pole liegen.

Um die Entfernung irgend eines Parallelkreises vom Aequator zu berechnen, hat man die Gleichung:

$$d = R \operatorname{Sin} \varphi$$

in welcher R den Radius der Erde und φ die Breite des Parallelkreises bezeichnet.

Um die Aequivalenz dieser Projektionsmethode nachzuweisen, bedenke man dass die Mantelfläche eines senkrechten Kreiscylinders welcher als Basis den Aequator und die Höhe y besitzt:

$$M = 2 R \pi . y$$

Dieselbe Formel hat man aber auch für die Oberfläche einer Kugelzone, deren Höhe y ist. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Parallelkreisen liegenden Kugelzonen sind daher gleich den entsprechenden Cylinderzonen, und es ist auch die Mantelfläche des ganzen Cylinders gleich der Kugeloberfläche.

Diese Projektion wurde zuerst von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert (1728—1777) in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben.

2. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone.

Eine gegebene Kugelzone, deren mittlerer Parallelkreis die Breite φ besitzt, kann auf eine Cylinderfläche projicirt werden, welche als Basis diesen Parallelkreis hat. Stellt man die Bedingung, dass die zu erhaltende Projektion äquivalent sein soll, so muss die Kugelzone welche sich von der Breite φ bis zur Breite φ_1 erstreckt gleich der Mantelfläche des Cylinders sein, dessen Entwicklung die Kugelzone darstellt. Die Höhe h des Cylinders ergibt sich alsdann aus der Bedingungsgleichung:

$$\text{Fläche der Kugelzone} = \text{der Fläche der Cylinderzone}$$

$$2 R \pi (R \operatorname{Sin} \varphi_1 - R \operatorname{Sin} \varphi) = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi \, h .$$

$$2 R^2 \pi (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi) = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi \, h .$$

$$h = \frac{R (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi)}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

$$h = \frac{2\,R \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

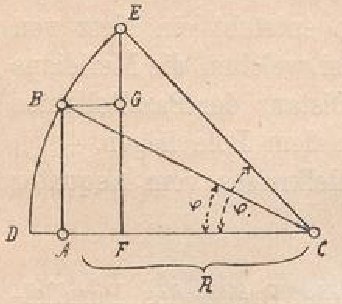

Fig. 38.

Auf dieselbe Weise kann auch die Höhe des unter dem mittleren Parallelkreise liegenden Theiles der Karte berechnet werden.

Diese Grösse wird auf folgende Weise construirt (siehe Fig. 38): Man mache $CA = R$, trage den Winkel φ im Punkte C an A C an, errichte im Punkte A eine Senkrechte A B, dann ist

$$BC = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

Beschreibt man ferner mit B C einen Kreis, trägt man den Winkel φ_1 nach D C E, und zieht man E F und B G, so ist:

$$EG = EF - FG = EF - AB$$
$$EG = CE \operatorname{Sin} \varphi_1 - BC \operatorname{Sin} \varphi = BC (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi)$$
$$EG = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varphi} (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi)$$

Es ist also E G = der gesuchten Höhe h.

3. Albers äquivalente Kegelprojektion.

Bei dieser sind die Längen der Grenzkreise einer Zone, deren Breiten φ' und φ'' sind, gleich den Kreisbogen des Sectors, welcher die Zone darstellen soll, ferner ist die Oberfläche der Zone gleich der Mantelfläche des abgestumpften Kegels, welcher an die Stelle der Zone tritt.

Es ist daher:

$$2\,R\,\pi\,(R \operatorname{Sin} \varphi'' - R \operatorname{Sin} \varphi') = (R\,\pi \operatorname{Cos} \varphi' + R\,\pi \operatorname{Cos} \varphi'')\,l$$

Hieraus folgt die Länge l der Kegelkante:

$$l = \frac{2\,R\,(\operatorname{Sin} \varphi'' - \operatorname{Sin} \varphi')}{\operatorname{Cos} \varphi' + \operatorname{Cos} \varphi''}$$

oder wenn man für $(\operatorname{Sin} \varphi'' - \operatorname{Sin} \varphi')$ und $(\operatorname{Cos} \varphi' + \operatorname{Cos} \varphi'')$ ihre bekannten goniometrischen Werthe setzt und reducirt:

$$1)\quad l = 2\,R \operatorname{Tg} \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

Dieser Werth lässt sich auf folgende Weise sehr einfach construiren (s. Fig. 39). Man beschreibe mit dem Radius $OD = R$ einen Kreis, trage an OD die Winkel φ' und φ'' an, und ziehe im Mittelpunkte C des Bogens $\varphi'' - \varphi'$ eine Tangente an denselben, welche die verlängerten Radien in A und B schneidet.

Da AOB ein gleichschenkliches Dreieck ist, so ist

$$AB = 2 . AC = 2 . OC . Tg\, AOC \text{ oder}$$

$$AB = 2\, R . Tg. \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = 1$$

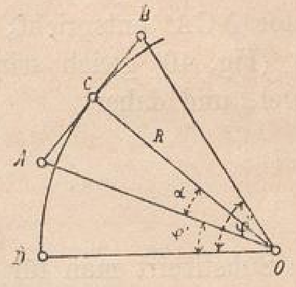

Fig. 39.

Die Tangente AB ist also der geometrische Werth von l.

Wir wollen nun die Radien r' und r'' der äusseren Parallelkreise der Karte berechnen.

Da in der Entwicklung die Bogen, welche die äusseren Parallelkreise darstellen, demselben Centriwinkel entsprechen, so verhalten sie sich wie ihre Radien r' und r''. Diese Bogen sind aber gleich den Umfängen der Parallelkreise und daher

$$2\, R\, \pi \operatorname{Cos} \varphi' : 2\, R\, \pi \operatorname{Cos} \varphi'' = r' : r''$$

oder 2) $\operatorname{Cos} \varphi' : \operatorname{Cos} \varphi'' = r' : r''$

und 3) $r' \operatorname{Cos} \varphi'' = r'' \operatorname{Cos} \varphi'$

Da nun $r' - r'' = 1$ somit $r' = 1 + r''$, so ist

$$(1 + r'') \operatorname{Cos} \varphi'' = r'' \operatorname{Cos} \varphi'$$

Hieraus folgt: $r'' = \frac{1 \operatorname{Cos} \varphi''}{\operatorname{Cos} \varphi' - \operatorname{Cos} \varphi''}$

oder wenn man für l aus Gleichung 1) den Werth und für

$$\operatorname{Cos} \varphi' - \operatorname{Cos} \varphi'' = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (\varphi'' + \varphi') \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')$$

den Werth setzt und reducirt:

$$4)\quad r'' = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi''}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')}$$

In analoger Weise kann man in Gleichung 3) auch für $r'' = r' - 1$ seinen Werth setzen und erhält alsdann den Werth:

$$5)\quad r' = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi'}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi')}.$$

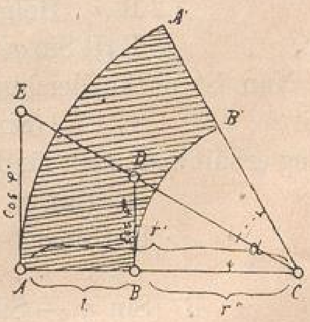

Fig. 40.

Die Werthe von r'' und r' können auf folgende Weise construirt werden: Man trage auf die Gerade AC (Fig. 40) den Werth $AB = 1$ auf, errichte in den Punkten A und B die Senkrechten AE $= \operatorname{Cos} \varphi'$ und $BD = \operatorname{Cos} \varphi''$ und ziehe die Gerade ED, welche die Gerade AB in C schneidet, es ist alsdann $AC = r'$ und $BC = r''$.

Die Construktion stützt sich auf Proportion 2. —

Um die Grösse des Centriwinkels α zu berechnen, welcher dem Sector ACA' entspricht, bedenke man, dass die Länge des Bogens AA' (Fig. 40) gleich sein soll der Länge des Parallelkreises auf der Kugel, und daher

$$\frac{r' \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi$$

$$\alpha = \frac{360 \,.\, R \operatorname{Cos} \varphi'}{r'}$$

Substituirt man für r' seinen Werth und setzt man die Grösse

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} (\varphi'' - \varphi') = m$$

so ergibt sich $\alpha = 360\, m$, ferner ist auch nach Glch. 5

$$r' = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi'}{m} \text{ und}$$

$$6) \quad r' m = R \operatorname{Cos} \varphi'$$

Um nun den Radius r eines beliebigen Parallelkreises zu berechnen, dessen Breite φ ist, denke man sich die Differenz der Radien, welche den Breiten φ' und φ entspricht, d. h. die Differenz $(r' - r)$ in n unendlich kleine Theile getheilt.

Ist alsdann die Länge des Meridianbogens

$$\frac{r' - r}{n} = \omega$$

so sind die Radien der aufeinanderfolgenden Parallelkreise, welche die Breiten $\varphi' \; \varphi_1 \; \varphi_2 \; \varphi_3 \; \ldots\ldots \; \varphi_{n-1} \; \varphi$ besitzen

$$r',\; r' - \omega,\; r' - 2\,\omega,\; r' - 3\,\omega,\; \ldots\ldots\; r' - (n-1)\,\omega,\; r' - n\,\omega = r$$

und da die Projektion eine äquivalente sein soll, d. h. die aufeinanderfolgenden schmalen Kugelzonen gleich den entsprechenden Kegelzonen sein sollen, so besteht für je zwei entsprechende Flächenelemente die Gleichung: Oberfläche der Kugelzone = Länge des Parallelkreisumfanges $\times$ ω oder

$$2 R \pi \,.\, \text{Höhe der Zone} = 2 R \operatorname{Cos} \varphi' \pi \omega$$

oder $$R (R \operatorname{Sin} \varphi_1 - R \operatorname{Sin} \varphi') = R \operatorname{Cos} \varphi' \omega$$

Nun ist nach Gleichung 6) $R \operatorname{Cos} \varphi' = r' m$

somit $$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi') = r' m \omega$$

analog erhält man auch für die übrigen Flächenelemente die Gleichungen:

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_2 - \operatorname{Sin} \varphi_1) = (r' - \omega)\, m \omega$$

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi_3 - \operatorname{Sin} \varphi_2) = (r' - 2\,\omega)\, m \omega$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R^2 (\operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} \varphi_{n-1}) = (r' - (n-1)\,\omega)\, m \omega$$

Addirt man diese Gleichungen so ergibt sich auf der linken Seite

7) $S = R^2 (\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi')$; ferner auf der rechten Seite:

$$S = [r' + (r' - \omega) + (r' - 2\,\omega) + \ldots + (r' - (n-1)\,\omega)]\, m\,\omega$$

$$S = [n\,r' - (\omega + 2\,\omega + 3\,\omega + \ldots + (n-1)\,\omega)]\, m\,\omega$$

$$S = \left[n\,r' - \frac{\omega + (n-1)\,\omega}{2}\,(n-1)\right] m\,\omega$$

$$S = \left[n r' - \frac{n\,\omega\,(n-1)}{2}\right] m\,\omega$$

Nun ist $n\,\omega = r' - r$ somit

$$S = \left[n\,r' - \frac{(r'-r)\,(n-1)}{2}\right] m\,\omega$$

$$S = \left(r' - \frac{(r'-r)\,(1 - \frac{1}{n})}{2}\right) n\,m\,\omega$$

für $n = \infty$ ist aber $\frac{1}{n} = 0$ und

$$S = \left[r' - \frac{(r'-r)}{2}\right] (r'-r)\ m$$

8) $S = \frac{(r'^2 - r^2)\,m}{2}$

Aus Gleichung 7) und 8) folgt:

$$2\,R^2 (\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi') = (r'^2 - r^2)\,m$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich 9) $r^2 = r'^2 - \frac{2\,R^2}{m}(\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi')$

Setzt man an die Stelle von φ, φ'', so ist an die Stelle von r, r'' zu setzen und man erhält: $r''^2 = r'^2 - \frac{2\,R^2}{m}(\mathrm{Sin}\,\varphi'' - \mathrm{Sin}\,\varphi')$

hieraus folgt: $r'^2 = r''^2 + \frac{2\,R^2}{m}(\mathrm{Sin}\,\varphi'' - \mathrm{Sin}\,\varphi')$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 9, so ergibt sich

10) $r^2 = r''^2 + \frac{2\,R^2}{m}(\mathrm{Sin}\,\varphi'' - \mathrm{Sin}\,\varphi)$

Die Werthe von r können für beliebige Werthe von φ nach Gleichung 9) oder 10) berechnet werden.

Dehnt man eine Karte bis zu dem einen Pole aus, so ist für diesen $\varphi = 90^0$ und nach Gleichung 10) der Radius des Kreises, welcher den Pol darstellt:

$$r^2 = r''^2 - \frac{2\,R^2}{m}(1 - \mathrm{Sin}\,\varphi'') \text{ oder}$$

$$r^2 = r''^2 - \frac{4\,R^2\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\varphi''}{2}}{m}$$

Erstreckt sich dagegen eine Karte bis zum Aequator, so ist für diesen $\varphi = 0^0$ und man erhält den Radius des Kreises, welcher den Aequator darstellt nach der Gleichung:

$$r^2 = r''^2 + \frac{2 R^2 \operatorname{Sin} \varphi''}{m}$$

Sind bei einer Karte die Parallelkreise, welche in ihrer wahren Länge entwickelt werden, nicht mehr als 10^0 von einander entfernt, und sind die Grenzkreise der Karte von diesen Parallelkreisen nicht mehr als 5^0 entfernt, so erhält man eine Karte deren lineare Dimensionen mit demselben Massstabe abgegriffen werden können. In der Mitte der Karte werden die Distanzen, welche sich von Süd nach Nord erstrecken etwas vergrössert, dagegen die Distanzen die von Ost nach West gemessen werden, etwas verkleinert. Jenseit der in der wahren Grösse entwickelten Parallelkreise verhält sich die Sache gerade umgekehrt: Verkleinerung der Süd- und Norddimensionen, Vergrösserung der Ost-Westdistanzen.

Diese Projektion wurde von H. C. Albers in Lüneburg in Zachs monatlicher Korrespondenz im Nov. 1805 veröffentlicht.

4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

Eine andere Projektion bei welcher die aufeinanderfolgenden unendlich schmalen Kugelzonen gleich den unendlich schmalen concentrischen Ringflächen eines Kreissectors sind, hat Joh. Heinrich Lambert in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772) gegeben. Lambert hat gefunden, dass wenn man den Radius eines Parallelkreises in der Entwicklung der Kegelfläche:

1) $r = 2 R \sqrt{m} \operatorname{Sin} \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ macht, obiger Bedingung Genüge geleistet wird.

Erhebt man die Gleichung in's Quadrat, so ergibt sich:

$$r^2 = 4 R^2 m \operatorname{Sin}^2 \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und da $2 \operatorname{Sin}^2 \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \left(\operatorname{Sin} 45^0 \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{Cos} 45^0 \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2}\right)^2$

$= 2 . \operatorname{Sin}^2 45^0 \left(\operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2}\right)^2$ oder da $\operatorname{Sin}^2 45^0 = \frac{1}{2}$ ist

$$2 \operatorname{Sin}^2 \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \left(1 - 2 \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= (1 - \operatorname{Sin} \varphi)$$

so ist 2) $r^2 = 2 R^2 m \ (1 - \operatorname{Sin} \varphi)$

Für einen Parallelkreis von der Breite φ_1 ist analog

$$r_1{}^2 = 2R^2m\,(1 - \mathrm{Sin}\,\varphi_1)$$

und $r^2 - r_1{}^2 = 2R^2m\,(\mathrm{Sin}\,\varphi_1 - \mathrm{Sin}\,\varphi)$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{\pi}{m}$ so ist

3) $\frac{r^2\pi}{m} - \frac{r_1{}^2\pi}{m} = 2\,R\pi\,(R\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1 - R\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$. Mittelst dieser Gleichung ist die Aequivalenz dieser Projektion leicht nachzuweisen.

Ihre linke Seite ist nämlich der Unterschied zweier Kreissectoren, welche den gemeinschaftlichen Centriwinkel $\alpha = \frac{360^0}{m}$ haben.

[Wie bekannt ist die Oberfläche eines Kreissectors:

$0_s = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ und da $0_s = \frac{r^2\pi}{m}$, so ist $\frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m}$]

Auf der rechten Seite der Gleichung 3 hat man dagegen die Oberfläche einer Kugelzone, deren äussere Parallelkreise die Breiten φ_1 und φ besitzen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, so ist die sehr schmale Kugelzone gleich der Oberfläche ihrer Projektion, wesshalb der Aequivalenz Genüge geleistet wird.

Soll die Länge irgend eines Parallelkreises von der Breite φ_1 gleich der Länge seiner Projektion sein, die mit dem Radius r_1 beschrieben wird, so ist:

$$2\,R\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 = \frac{2\,r_1\,\pi\alpha}{360^0} \text{ oder da } \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m} \text{ ist}$$

$$2\,R\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 = \frac{2r_1\,\pi}{m}$$

und 4) $2\,r_1\pi = m \times 2\,R\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1$ d. h. der Umfang der Projektion des Parallelkreises ist alsdann m mal so gross als der Parallelkreis selbst.

Ferner ergibt sich aus Gleichung 4)

5) $R\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 = \frac{r_1}{m}$

Zur Bestimmung der Grösse m macht man die Annahme, dass für den genannten Parallelkreis, als welchen man am natürlichsten den mittleren Parallelkreis der Karte annimmt, die Breitengrade in dem richtigen Verhältnisse zu den Längengraden stehen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, und bezeichnet man mit $(\varphi_1 - \varphi)$ den Arcus welcher ihrer Differenz entspricht, so ist der kleine Bogen des Meridianes $= R\,(\varphi_1 - \varphi)$ und seine Projektion $= r_1 - r$. Ist ferner λ gleich dem Arc. eines sehr kleinen Längenunterschiedes, so ist $R\lambda\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1$ der sehr kleine Parallelkreisbogen, und nach Gleichung 5) $\frac{r_1\lambda}{m}$ seine Projektion. Es findet somit die Proportion statt:

$$R(\varphi_1 - \varphi) : R\lambda \operatorname{Cos}\varphi_1 = (r_1 - r) : \frac{r_1 \lambda}{m}$$

und $$(r_1 - r) R\lambda \operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{r_1 \lambda}{m} R(\varphi_1 - \varphi)$$

6) $$\frac{r_1 - r}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_1}{m \operatorname{Cos}\varphi_1}$$

Setzt man nach Glch. 1) für r_1 und r ihre Werthe so ist:

$$r - r_1 = 2R\sqrt{m}\left[\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\right]$$

$$= 2R\sqrt{m} \,.\, 2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\right)$$

$$= 4R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{4}\right)\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}$$

und der linke Theil der Glch. 6 lautet:

$$\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{4}\right)\frac{4\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4\,.\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}\right)}$$

Sind nun φ und φ_1 sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\frac{\varphi + \varphi_1}{4} = \frac{2\varphi_1}{4} = \frac{\varphi_1}{2} \text{ und } \frac{4\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}\right)} = 1$$

somit 7) $$\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

ferner ist der rechte Theil der Glch. 6

$$\frac{r_1}{m\operatorname{Cos}\varphi_1} = \frac{r_1}{m\operatorname{Sin}(90^0 - \varphi_1)} = \frac{2R\sqrt{m}\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}{m\,.\,2\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

oder 8) $$\frac{r_1}{m\operatorname{Cos}\varphi_1} = \frac{R}{\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Setzt man in die Glch. 6 die erhaltenen Werthe, so ergibt sich:

$$\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Hieraus folgt 9) $$m = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Nach dieser Gleichung lässt sich der Werth von m, welcher immer grösser als 1 ist, berechnen, und da der Werth

$2\,\mathrm{R}\,\mathrm{Sin}\left(45^0 \quad \frac{\varphi}{2}\right)$ leicht construirt werden kann, er ist in Fig. 41 $=$ AP, so wird auch der Werth von $r = \sqrt{m}\,.\,\mathrm{AP}$ leicht durch Construction erhalten.

5. Projektion von Bonne. Dieselbe wurde schon Seite 89 ausführlich beschrieben, und kann man sich daher darauf beschränken ihre Aequivalenz nachzuweisen. Ein sehr schmaler Streifen der Kugeloberfläche, welcher zwischen den Parallelkreisen von den Breiten φ_1 und φ_2 liegt, ist gleich der Länge des Parallelkreises von der Breite $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ multiplicirt mit dem Abstande $\mathrm{R}\,(\varphi_1 - \varphi_2)$ der beiden Parallelkreise. [$\varphi_1 - \varphi_2$ sei gleich dem Arc., welcher der Breitendifferenz entspricht.] Da nun beide Längen auf der Karte in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden und aufeinander senkrecht stehen, so wird ein solcher Streifen auf der Karte ebenfalls in seiner wahren Grösse abgebildet. Dasselbe gilt auch von jedem anderen analogen Flächenstreifen der Kugel, und da man jede sphärische Figur in der Richtung der Parallelkreise in unendlich schmale Streifen zerlegen kann, deren Projektionen gleich ihren Originalen sind, so wird ein jeder Theil der Kugelfläche auf der Karte in der wahren Grösse abgebildet, wodurch die Aequivalenz der Bonne'schen Projektion bewiesen ist.

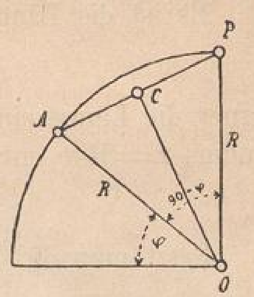

Fig. 41.

6. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner. Dieselbe ist eine conventionelle Kegelprojektion, bei welcher die Spitze des Kegels im Pole angenommen wird. Alle Parallelkreise werden als concentrische Kreise gezeichnet, welche als gemeinschaftlichen Mittelpunkt die Spitze des Kegels besitzen. Der Radius eines Parallelkreises von der Breite φ wird gleich der Länge des Meridianbogens genommen, welcher zwischen dem Pol und dem Parallelkreise liegt. Es ist daher:

$$r = \mathrm{R}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathrm{R}\,\psi$$

wenn φ den Arc. der Breite, und ψ sein Complement bezeichnet.

Da die Parallelkreise in ihrer wahren Länge abgetragen werden, so ist wieder jeder unendlich schmale Flächenstreifen der Kugel nach der Richtung der Parallelkreise gleich seiner Projektion, wesshalb diese Kegelprojektion ebenfalls äquivalent ist.

Der Quadrant eines Parallelkreises dessen Breite φ ist, erscheint als ein Bogen dessen Centriwinkel α auf folgende Weise erhalten wird:

Es ist die Länge des Parallelkreisquadranten

$$l = 90^0 . \frac{R \operatorname{Cos} \varphi \, \pi}{180^0}$$

ferner die Länge eines Bogens, welcher dem Centriwinkel α und dem Radius $r = R \, \psi$ entspricht:

$$l = \frac{r \, \pi \, \alpha}{180} = \frac{R \, \psi \, \pi \, \alpha}{180^0}$$

Setzt man die Werthe von l einander gleich, so ist

$$90 \operatorname{Cos} \varphi = \psi \, \alpha$$

$$\alpha = 90^0 \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\psi} = 90^0 \frac{\operatorname{Sin} \psi}{\psi}$$

In welche Gleichung ψ in Bogenmass einzusetzen ist. $\operatorname{Arc.} 1^0 = 0{,}0174533$

In nachfolgender Tabelle sind die Werthe von α für verschiedene Werthe von ψ zusammengestellt.

ψ	α	ψ	α
0^0	90^0 $0'$	100	$50^0 45'$
10	89 33	110	44 3
20	88 11	120	37 12
30	85 57	130	30 23
40	82 53	140	23 40
50	79 1	150	17 10
60	74 26	160	11 1
70	69 12	170	5 16
80	63 27	180	0 0
90	57 18		

Diese Projektion wurde von dem deutschen Geometer Johann Werner (1468—1528) aus Nürenberg im Jahre 1514 veröffentlicht. Werner hat nebst dieser Projektionsart noch zwei andere analoge Projektionsmethoden angegeben, welche jedoch nicht äquivalent sind. Die Werner'schen Projektionen haben sämmtlich die Eigenschaft, dass die für die Projektion der ganzen Kugel erhaltenen Netze eine Herzform besitzen.