Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

VII. Abschnitt. Construktion des Netzes der Erd- und Himmelsgloben

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

VII Abschnitt.

Construktion des Netzes der Erd- und Himmelsgloben.

Um das Netz der Meridian- und Parallelkreise eines Globus zu zeichnen, denke man sich denselben durch Meridianebenen in eine gleiche Anzahl congruenter Zweiecke getheilt. Ist r der Radius des Globus und n die Anzahl der Zweiecke (Fig. 43), so ist die Breite eines solchen Zweieckes in der Entwicklung (Fig. 44)

$$CD = \frac{2\,r\,\pi}{n}$$

ferner ist die Höhe $p_n\,p_s$ des Zweieckes in der Entwicklung gleich dem halben Umfang der Kugel:

$$p_n\,p_s = r\,\pi$$

Soll der Abstand der Parallelkreise φ Grade betragen, so muss in der Entwicklung (Fig. 44) $Oa = ab = bc \ldots = $ der Länge des Meridian-

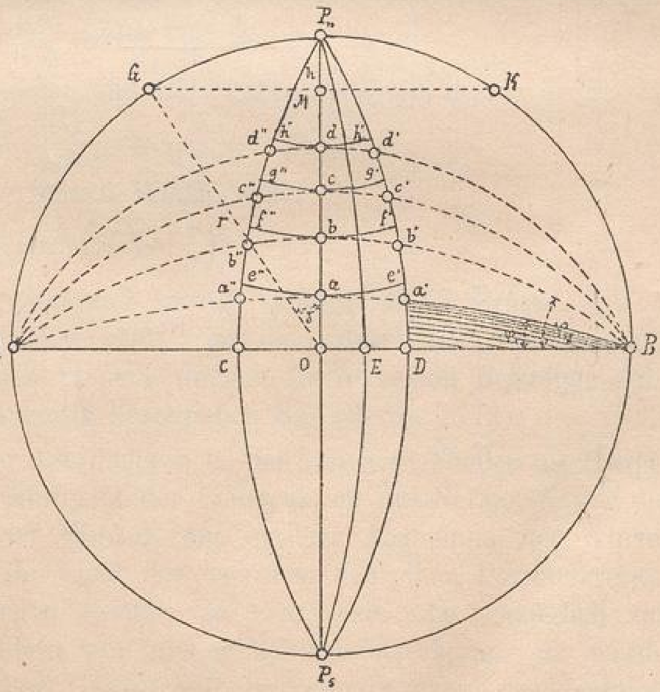

Fig. 43.

bogens gemacht werden, welcher φ Graden des grössten Kreises der Kugel entspricht. Ist l die Länge dieses Bogens, so ist:

$$l = \frac{r \pi \varphi}{180}$$

Um nun die Grenzpunkte der Meridianbogen $p_n C p_s$ und $p_n D p_s$ in der Entwicklung zu erhalten, denke man sich durch den Mittelpunkt der Kugel (Fig. 43) eine Senkrechte AB auf die Meridianebene $P_n P_s$ gezogen, welche die Kugeloberfläche in den Punkten A und B trifft. Durch die Pole A und B des grössten Kreises $P_n P_s$ und die Theilpunkte a b c, . . , lege man grösste Kreise, welche wie bekannt auf dem grössten Kreise $P_n P_s$ senkrecht stehen und das Zweieck in den Bogen a′a″, b′b″, c′c″ .... schneiden. Errichtet man nun in Fig. 44 in den Theilpunkten a b c .... auf dem mittleren Meridiane $p_n p_s$ des Zweieckes Senkrechte, so sind auf diese, von den Theilpunkten a b c .... aus, die halben Längen der Bogen a′a″, b′b″, c′c″ .... (Fig. 43) aufzutragen, wodurch die Begrenzungspunkte a′ b′ c′ ...., a″b″c″ .... der Meridiane erhalten werden.

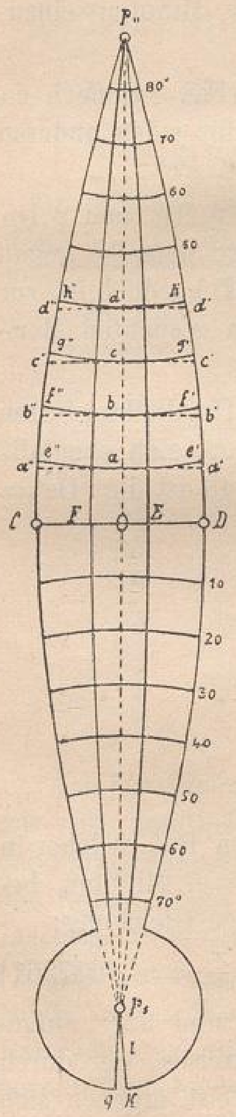

Fig. 44.

Man hat nun vor Allem die Längen der Bogen aa′, bb′, cc′ .... zu berechnen, welche sich aus Fig. 43 ergeben. In dieser ist BDa′ ein bei D rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem die Kathete $DB = 90^0 - OD$ und der Winkel $DBa' =$ Bogen $Oa = \varphi_1$ bekannt sind. Entspricht die Breite CD des Zweieckes λ Längengraden, so ist $OD = \frac{\lambda}{2}$ und $DB = 90^0 - \frac{\lambda}{2}$, ferner ist $Ba' = 90^0 - aa'$ und es ergibt sich aus $\triangle BDa'$:

$$\mathrm{Tg}\,.\,DB = \mathrm{Tg}\,.\,Ba' \times \mathrm{Cos}\,\varphi_1 \text{ oder}$$

$$\mathrm{Tg}\left(90^0 - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathrm{Tg}\,(90^0 - aa')\ \mathrm{Cos}\,\varphi_1$$

$$\mathrm{Cotg}\,\frac{\lambda}{2} = \mathrm{Cotg}\,aa'\ \mathrm{Cos}\,\varphi_1 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{\mathrm{Tg}\,aa'}\ \mathrm{Cos}\,\varphi_1$$

$$1)\ \mathrm{Tg}\ aa' = \mathrm{Tg}\ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{Cos}\ \varphi_1$$

Aus dieser Gleichung wird der Winkel $aa' = \alpha$ berechnet und die Länge des Bogens aa' nach der Gleichung erhalten:

$$2)\ aa' = \frac{r\pi\alpha'}{180 \cdot 60} = 0{,}000290888\ r\alpha'\ (\log \frac{\pi}{10800} = \bar{4}{,}4637261)$$

in welcher r der Radius der Kugel, und α in Minuten einzusetzen ist.

Die Länge von aa' wird in der Entwicklung (Fig. 44) nach aa und aa'' aufgetragen. Analog ergibt sich auch für jeden anderen Theilpunkt b, c.... die Länge der Senkrechten $b'b''$, $c'c''$....

Soll auf dem Globus zwischen den Meridianen $p_n O p_s$ und $p_n D p$ noch ein Meridian $p_n E p_s$ gezeichnet werden, so wird derselbe genau auf dieselbe Weise erhalten wie der Meridian $p_n D p_s$, doch ist zur Berechnung von aa' in Gleichung 1) für λ der dem gesuchten Meridiane entsprechende Werth einzusetzen.

Es sind nun noch in das Zweieck (Fig. 44) die Parallelkreisbogen einzuzeichnen, deren Endpunkte $e'f'g'$...., $e''f''g''$.... sich ebenfalls am einfachsten durch Rechnung ergeben. In Fig. 43 ist $\mathrm{Bg}\,.\,De' =$ der Breite φ_1 des Parallelkreises $e'e''$ und

$$\mathrm{Bg}\ a'e' = \mathrm{Bg}\,.\,De' - \mathrm{Bg}\,.\,Da', \text{ somit}$$

$$3)\ \sphericalangle\, a'e' = \varphi_1 - \sphericalangle\, Da'$$

Aus dem Dreiecke BDa' folgt aber:

$$\mathrm{Tg}\ Da' = \mathrm{Sin}\ BD\ \mathrm{Tg}\ \varphi_1$$

$$\mathrm{Tg}\ Da' = \mathrm{Sin}\left(90^0 - \frac{\lambda}{2}\right)\mathrm{Tg}\ \varphi_1$$

$$4)\ \mathrm{Tg}\ Da' = \mathrm{Cos}\ \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{Tg}\ \varphi_1$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Werth von Da', welcher in Gleichung 3) eingesetzt wird. Nachdem $\sphericalangle\, a'e' = \beta$ Minuten berechnet ist, erhält man die Bogenlänge $a'e'$ nach der Gleichung:

$$5)\ a'e' = \frac{r\pi\,.\,\beta'}{180\,.\,60} = 0{,}000290888\ r\beta'\left(\log \frac{\pi}{10800} = \bar{4}{,}4637261\right)$$

Diese Bogenlänge wird in Fig. 44 nach $a'e'$ und $a''e''$ aufgetragen, wodurch die Punkte e' und e'' des Parallelkreises, der durch den Punkt a geht, bestimmt sind. Auf analoge Weise ergeben sich auch für die übrigen Parallelkreise drei zu ihrer Construktion nothwendige Punkte.

Für einen Globus, bei welchem die Breite der Zweiecke dem Winkel $\lambda = 30^0$ entspricht, und bei welchem die Parallelkreise und

Meridiane in Entfernungen von 10⁰ zu 10⁰ gezogen werden sollen, ergeben sich für r = 1 nach den Gleichungen 1) 2) 3) 4) 5) folgende Werthe:

Netz eines Globus dessen Radius r = 1 ist.

Breite CD des grossen Zweieckes $= \frac{\pi}{6} = 0{,}5235988$

Breite EF des inneren Zweieckes $= \frac{\pi}{18} = 0{,}1745329$

Höhe $p_n\, p_s$ des Zweieckes $= \pi = 3{,}14159265$

Abstand der Parallelkreise $= \frac{\pi}{18} = 0{,}1745329$

Breite der Parallelkreise $\varphi =$	Bogenlänge von $aa' = \alpha$	Bogenlänge von $a'e' = \beta$	Bogenlänge von $a\,a' = \alpha$	Bogenlänge von $a'e' = \beta$
	für die Begrenzungsmeridiane des Zweieckes		für die inneren Meridiane des Zweieckes	
0⁰	0,261799	0,000000	0,087266	0,0000000
10	0,257998	0,005832	0,085948	0,0006496
20	0,246664	0.010996	0,082030	0,0012217
30	0,228018	0,014879	0,075621	0,0016484
40	0,202449	0,015887	0,066919	0,0018762
50	0,170562	0,017119	0,056175	0,0018762
60	0,133183	0,015141	0,043716	0,0016532
70	0,091387	0,011291	0,029913	0,0012266
80	0,046494	0,006026	0,015194	0,0006545

Ist der Radius des Globus gleich r, so sind diese Zahlenwerthe mit r zu multipliciren. Nachdem mittelst obiger Tabelle das Netz der Parallelkreise und Meridiane gezeichnet ist, lassen sich die Details der Erdoberfläche oder bei einem Himmelsglobus die Fixsterne mit Leichtigkeit eintragen. Sollen einzelne Punkte z. B. diejenigen der Ekliptik mit Genauigkeit bestimmt werden, so geschieht dies auf folgende Weise: Man betrachte einen jeden Punkt als Durchschnitt eines Parallelkreises und eines Meridianes, die nach obigen Gleichungen einzeln berechnet und in das Netz eingetragen werden, dadurch wird auch der betreffende Punkt möglichst genau bestimmt. Da die Enden der Zweiecke sehr schmal sind, und beim Aufziehen auf die von Gyps oder Pappe hergestellte Kugel nicht gut zusammenpassen, so zieht man es häufig vor die Zweiecke in einer Entfernung von 15⁰ bis

20^0 von den Polen abzuschneiden, und an den Polen der Kugel Polscheiben anzubringen. Die Dimensionen dieser Polscheiben erhält man auf folgende Weise: Man denkt sich den Kugelabschnitt $G P_n K$ (Fig. 43) durch einen senkrechten Kreiskegel ersetzt, dessen Seitenkante gleich der Bogenlänge $G P_n$ des Abschnittes ist. (In Fig. 43 wurde der Abschnitt der Deutlichkeit wegen zu gross angenommen).

Ist alsdann $G O = r$ der Radius der Kugel und $\sphericalangle G O P_n = \delta$, so ist die Seitenkante des Kegels:

$$6)\quad G P_n = l = \frac{r \pi \delta'}{10800} = 0{,}000290888\, r\, \delta'$$

Um den Radius x des Basiskreises des Kegels zu berechnen, hat man die Bedingungsgleichung: Oberfläche des Kugelabschnittes gleich der Mantelfläche des Kegels, oder:

$$2 r \pi \,.\, P_n M = 2 x \pi \,.\, \frac{l}{2},$$

in welcher Gleichung $P_n M = h$, gleich der Höhe des Abschnittes und $l =$ der Seitenkante des Kegels ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$x = \frac{2 r h}{l} \text{ und da}$$

$$h = P_n O - O M = r - r \operatorname{Cos} \delta = r (1 - \operatorname{Cos} \delta)$$

$$h = 2 r \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2}, \text{ so ist}$$

$$7)\quad x = \frac{4 r^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2}}{l}$$

Da der Radius der Polscheibe (Fig. 44) gleich l und daher der Umfang des Kreises dem sie angehört $= 2 l \pi$, der Radius des Basiskreises des Kegels aber x und sein Umfang $= 2 x \pi$ ist, so ist aus dem Kreise (Fig. 44) ein Sector auszuschneiden, welcher über dem Bogen $g k = 2 \pi (l - x)$ steht.

Der Centriwinkel dieses Ausschnittes ist:

$$\gamma = \frac{180 \,.\, g k}{l \pi} = \frac{180}{l \pi}\, 2 \pi (l - x).$$

$$8)\quad \gamma = \frac{360 (l - x)}{l}$$

Ist der Radius des Globus $r = 1$ und $\delta = 15^0$, so ergibt sich nach Gleichung 6) $l = 0{,}261799$ ferner nach Gleichung 7) und 8) $x = 0{,}260308$ und $\gamma = 2^0\, 03' 01''$