UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

**Möllinger, Oskar**

**Zürich, 1882**

Die Grundlage der stereographischen Projektionslehre

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

Visual Library

## I. Abschnitt.

# Die stereographische Projektionslehre.

### Die Grundlage
der
### stereographischen Projektionslehre.

Um einen Körper perspectivisch darzustellen, muss man vor Allem die Bildebene und die Lage des Augenpunktes, von welchem aus nach den Grenzen des Gegenstandes Sehstrahlen gezogen werden, annehmen. Die Punkte wo diese Strahlen die Bildebene treffen, geben in ihrer Gesammtheit ein Bild des Gegenstandes, welches auch seine Projektion genannt wird. Wollte man auf diese Weise einen Theil der Erdoberfläche perspectivisch darstellen, so würde die Anzahl der auszuführenden Operationen so beträchtlich sein, dass ein schneller Fortschritt der Arbeit unmöglich wäre. Man beschränkt sich daher darauf das Netz der Parallelkreise und Meridiane, welches man sich auf der Erd- oder Himmelskugel gezogen denkt, abzubilden und alsdann die Grenzen der Continente und Länder, die Strassen, Berge, Flüsse und Seeen näherungsweise in dasselbe einzuzeichnen. Dabei kann man die Parallelkreise und Meridiane so nahe an einanderlegen, als die Anforderungen in Bezug auf die Genauigkeit der auszuführenden Karte es nothwendig machen.

Denkt man sich bei der Darstellung einer Kugelfläche die Bildebene und den Augenpunkt der Projektion angenommen, so bilden alle vom Auge nach den Punkten eines Kugelkreises gezogenen Strahlen in ihrer Gesammtheit einen schiefen Kreiskegel, dessen Durchschnitt mit der Bildebene nichts anderes als eine Curve zweiten Grades sein kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Gleichung dieser Curve wird für den Fall, in welchem die Schnittebene E (Fig. 4) auf der Ebene SAA′ die durch die längste und kürzeste Seitenkante des Kegels geht, senkrecht steht, auf folgende Weise erhalten:

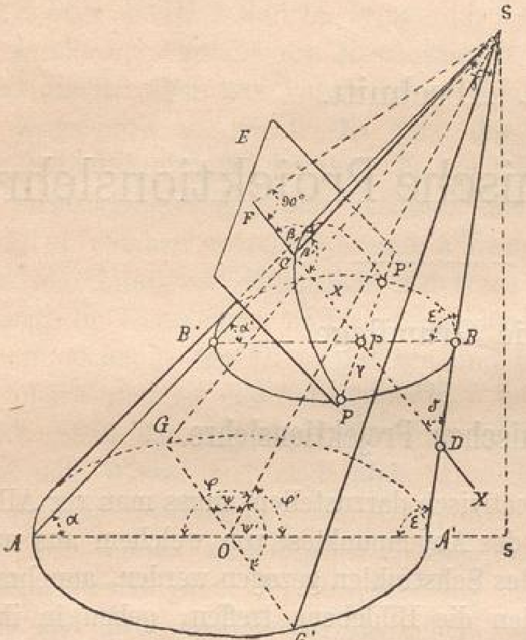


Fig. 4.

In Fig. 4 sei SAA′ ein schiefer Kegel, dessen Basis AA′ ein Kreis ist, SA seine längste, SA′ seine kürzeste Seitenkante, welche mit der Basisebene die Winkel $\alpha$ und $\varepsilon$ bilden, dann steht zunächst die Ebene SAA′, welche durch diese Kanten geht, senkrecht auf der Basisebene AA′, denn sie muss durch die Senkrechte Ss gehen, welche man von der Spitze S des Kegels auf die Basisebene zieht. Legt man nämlich durch die Senkrechte Ss und die Axe SO des Kegels eine Ebene, so schneidet sie die Kegelfläche in der längsten und kürzesten Seitenkante, wie sich dies auf folgende Weise beweisen lässt:

Man lege durch die Axe SO irgend eine andere Ebene SGG′, so ist $\varphi'$ der Winkel, welchen die Gerade SO mit ihrer Projektion bildet und $\psi'$ der Winkel, welchen sie mit der Durchschnittslinie OG′ der Ebenen SGG′ und AA′ einschliesst,

und $\varphi' < \psi'$ somit SA′ $<$ SG′

ferner $\varphi > \psi$ also SA $>$ SG

was sich auch für irgend eine andere Ebene, die durch SO gelegt wird, beweisen lässt. SA′ ist also die kürzeste, SA die längste Seitenkante des Kegels.

Wird nun dieser Kegel durch eine beliebige Ebene E geschnitten, welche auf der Dreiecksebene ASA′ senkrecht steht, so ist sein

Durchschnitt mit dieser Ebene die Curve PCP′, deren Gleichung abzuleiten ist. Der Einfachheit wegen wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen. Es sei $\beta$ der Winkel, welchen die Schnittebene mit der längsten Seitenkante SA bildet, $\gamma$ der Winkel den die längste und kürzeste Seitenkante mit einander einschliessen und $SF = d$ der senkrechte Abstand der Kegelspitze von der Schnittebene. Durch irgend einen Punkt P der Curve lege man eine Ebene BB′, welche mit der Basisebene parallel ist und die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da die Ebenen E und BB′ auf der Ebene ASA′ gleichzeitig senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie PP′ auf der Ebene ASA′ senkrecht und Pp ist sowohl auf der Geraden BB′ als auch auf der Geraden CD senkrecht. Legt man nun in der Ebene E durch den Punkt C ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Abzissenaxe mit CD zusammenfällt, während die Ordinatenaxe mit PP′ parallel ist, so ist $Cp = x$ die Abzisse, $Pp = y$ die Ordinate des Punktes P und man hat zwischen diesen Grössen eine Gleichung aufzustellen.

Da BB′ ein Kreis ist, so besteht die Gleichung:

$$1)\quad y^2 = B'p \,.\, Bp$$

Aus Dreieck B′Cp folgt: $B'p : Cp = \mathrm{Sin}\, B'Cp : \mathrm{Sin}\,\alpha'$
oder da $Cp = x$, $B'Cp = \beta$, und $\alpha' = \alpha$ ist

$$2)\quad B'p = \frac{x \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

ferner folgt aus $\triangle$ BpD:

$$Bp : Dp = \mathrm{Sin}\,\delta : \mathrm{Sin}\, DBp$$

oder da $Dp = CD - Cp = CD - x$, ferner $\beta = \gamma + \delta$ also $\delta = \beta - \gamma$ und $DBp = 180^0 - \varepsilon' = 180^0 - \varepsilon = \alpha + \gamma$ ist, so ergibt sich

$$3)\quad Bp = \frac{(CD - x)\,\mathrm{Sin}\,(\beta - \gamma)}{\mathrm{Sin}\,(\alpha + \gamma)}$$

Substituirt man die Werthe 2) und 3) in Gleichung 1) so erhält man

$$y^2 = \frac{x\,\mathrm{Sin}\,\beta\,(CD - x)\,\mathrm{Sin}\,(\beta - \gamma)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,(\alpha + \gamma)}$$

$$\text{oder } 4)\quad y^2 = \frac{CD\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,(\beta - \gamma)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,(\alpha + \gamma)} . x - \frac{\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}(\beta - \gamma)}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}(\alpha + \gamma)}\, x^2.$$

Den Werth von CD kann man noch durch den senkrechten Abstand $SF = d$ der Kegelspitze von der Schnittebene ausdrücken. Aus dem Dreieck SCD folgt:

$$CD : SC = \mathrm{Sin}\,\gamma : \mathrm{Sin}\,\delta \text{ oder da } \delta = \beta - \gamma \text{ ist}$$

$$CD = \frac{SC\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{\mathrm{Sin}\,(\beta - \gamma)}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ferner folgt aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck:

$$SC = \frac{d}{\sin\beta} \text{ und daher}$$

$$CD = \frac{d \sin\gamma}{\sin\beta \sin(\beta - \gamma)}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 4) so lautet die Gleichung der Schnittkurve:

$$\text{(I) } y^2 = \frac{d \sin\gamma}{\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)} x - \frac{\sin\beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)} x^2.$$

Diese Gleichung besitzt aber die Form:

$$y^2 = mx - nx^2,$$

welche für positives n die Scheitelgleichung der Ellipse, für negatives n die Scheitelgleichung der Hyperbel und für n = o diejenige der Parabel ist. Da nun die Werthe von $\alpha$, $\beta$, $(\alpha + \gamma)$ nie grösser als $180^0$ sein können, so hängt das Zeichen von n einzig von der Grösse $\sin(\beta - \gamma)$ ab. Ist $\sin(\beta - \gamma)$ positiv, d. h. $\beta - \gamma$ positiv, und $\beta > \gamma$, so ist die Curve

eine Ellipse,

ist $\sin(\beta - \gamma)$ negativ, d. h. $\beta - \gamma$ negativ und $\beta < \gamma$, so ist sie eine

Hyperbel,

und für $\sin(\beta - \gamma) = o$, d. h. für $\beta - \gamma = o$ und $\beta = \gamma$ eine Parabel.

Um im ersten und zweiten Falle die Werthe der grossen und kleinen Axe der Curve zu berechnen, vergleiche man die erhaltene Gleichung (I) mit der Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet:

$$\text{(Ia) } y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

diejenige der Hyperbel dagegen:

$$y^2 = \pm \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

In beiden Fällen bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$5) \ \frac{2b^2}{a} = \frac{d \sin\gamma}{\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)} \ (6)$$

(vergleiche Glch. I und Ia)

aus welchen die Werthe von a und b zu ermitteln sind. Es ist

$$7) \ b^2 = \frac{ad \sin\gamma}{2 \sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)} \text{ und } b^2 = \frac{a^2 \sin\beta \sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)}.$$

Comparirt man diese Werthe, wobei man die gleichen Grössen auf beiden Seiten weglässt, so ergibt sich:

$$a \sin\beta \sin(\beta - \gamma) = \frac{d \sin\gamma}{2}$$

$$\text{(II) } a = \frac{d \sin\gamma}{2 \sin\beta \sin(\beta - \gamma)}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 7) so ist

$$b^2 = \frac{d^2 \operatorname{Sin}^2 \gamma}{4 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma) \operatorname{Sin} (\beta - \gamma)}$$

$$\text{und (III)} \quad b = \frac{d \operatorname{Sin} \gamma}{2 \sqrt{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma) \operatorname{Sin} (\beta - \gamma)}}$$

welcher Werth für $\beta < \gamma$ d. h. für die Hyperbel imaginär ist.
Für den Fall dass die Ellipse in einen Kreis übergeht, ist

$$a = b \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\beta - \gamma)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma) \operatorname{Sin} (\beta - \gamma)}}$$

Nimmt man den reciproken Werth dieser Gleichung und quadrirt dieselbe, so hat man:

$$\operatorname{Sin}^2 \beta \operatorname{Sin}^2 (\beta - \gamma) = \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma) \operatorname{Sni} (\beta - \gamma)$$

$$\text{oder (IV)} \quad \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\beta - \gamma) = \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma).$$

Nun besteht bekanntlich die goniometrische Beziehung:

$$\operatorname{Cos} (x - y) - \operatorname{Cos} (x + y) = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y \text{ und daher}$$

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = \frac{1}{2} [\operatorname{Cos} (x - y) - \operatorname{Cos} (x + y)]$$

$$\text{somit } \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\operatorname{Cos} \gamma - \operatorname{Cos} (2 \beta - \gamma)] \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} (\alpha + \gamma) = \frac{1}{2} [\operatorname{Cos} \gamma - \operatorname{Cos} (2 \alpha + \gamma)]$$

Die Bedingungsgleichung IV lautet nun:

$$\operatorname{Cos} \gamma - \operatorname{Cos} (2 \beta - \gamma) = \operatorname{Cos} \gamma - \operatorname{Cos} (2 \alpha + \gamma) \text{ oder}$$

$$\text{(IVa)} \quad \operatorname{Cos} (2 \beta - \gamma) = \operatorname{Cos} (2 \alpha + \gamma).$$

Diese Gleichung ist aber richtig für:

$$\text{(V)} \quad 2 \beta - \gamma = \pm (2 \alpha + \gamma) + n \,.\, 360^0$$

Nimmt man das positive Zeichen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2 \beta - \gamma &= 2 \alpha + \gamma + n \,.\, 360^0 \text{ oder} \\ 2 \beta &= 2 \alpha + 2 \gamma + n \,.\, 360^0 \\ \beta &= \alpha + \gamma + n \,.\, 180^0 ; \beta \text{ ist aber immer} < 180^0 \end{aligned}$$

also $n = o$ und es ist

$\beta = \alpha + \gamma$ die eine Bedingung für welche die Ebene die Kegelfläche in einem Kreise schneidet. Da nun, wie aus Fig. 4 ersichtlich $\beta' = 180^0 - \beta$ und $\varepsilon = 180^0 - (\alpha + \gamma)$ so ist auch $\beta' = \varepsilon$. Es ist aber $\delta = 180^0 - (\beta' + \gamma)$ und $\alpha = 180^0 - (\varepsilon + \gamma)$ somit für diesen Fall auch $\delta = \alpha$.

Die Schnittebene E bildet alsdann mit der längsten und kürzesten Kegelkante dieselben Winkel, welche diese Kanten mit der Basisebene einschliessen, und man sagt die Kegelfläche werde von der Ebene E antiparallel geschnitten.

Nimmt man in Glch. V das negative Zeichen, so ergibt sich:

$$2\beta - \gamma = -2\alpha - \gamma + n.360^0 \text{ oder}$$

$$\beta = -\alpha + n.180^0.$$ Da $\beta$ immer kleiner als $180^0$ sein muss, so ist $n = 1$ zu setzen und

$$\beta = 180^0 - \alpha \text{ oder da } \beta = 180^0 - \beta' \text{ ist}$$

$$180^0 - \beta' = 180^0 - \alpha$$

$\beta' = \alpha$, d. h. die Schnittebene ist mit der Basisebene parallel. Es gibt also nur zwei Fälle in welchen ein schiefer Kreiskegel von einer auf ASA′ senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

Der Satz, dass der Durchschnitt einer Ebene, welche einen schiefen Kegel mit Kreisbasis antiparallel schneidet, immer ein Kreis sein muss, findet sich schon im ersten Buche (Lehrsatz 5) der Conica des Apollonius von Perga und wird derselbe daselbst auf folgende Art bewiesen: Es ist Pp senkrecht auf BB′ und CD, (Fig. 4 Seite 8)) und BB′ ein Kreis, also:

$$Pp^2 = Bp.B'p$$

Nun ist nach Voraussetzung $\delta = \alpha = \alpha'$ also $\triangle DBp \sim \triangle B'Cp$

$$\text{und daher } Bp : Cp = Dp : B'p \text{ somit}$$

$$Bp.B'p = Cp.Dp \text{ und}$$

$$Pp^2 = Cp.Dp$$

Denkt man sich nun die Ebene BB′ parallel mit sich selbst verschoben, so wird sich für jeden Curvenpunkt dieselbe Gleichung ergeben, und es ist in Folge dessen diese Curve ein Kreis, dessen Durchmesser die Gerade CD ist.

Schon zur Zeit des Ptolemäus hat man erkannt, dass wenn man bei Darstellungen der Kugeloberfläche die Bildebene durch das Centrum der Kugel gehen lässt und den Augenpunkt im Endpunkte desjenigen Kugelradius annimmt, welcher auf dieser Ebene senkrecht steht, alle Kreise des Globus sich wieder als Kreise projiciren, welche sich unter denselben Winkeln wie die Kugelkreise schneiden.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass bei dieser Annahme die Kegelfläche, welche die vom Augenpunkt nach dem Kugelkreis gezogenen Projektionsstrahlen bilden, durch die Bildebene antiparallel geschnitten wird.

Es sei in Fig. 5 CD die Bildebene, so errichte man im Mittelpunkte M der Kugel eine Senkrechte MO auf die Ebene CD, welche die Kugeloberfläche in O trifft, O wird dann als Augenpunkt der Projektion angenommen. Ferner sei AB ein beliebiger Kugelkreis und OAB der schiefe Kreiskegel, welcher von der Bildebene CD in der Curve **a b** geschnitten wird. Um zu beweisen, dass diese ein Kreis ist, ziehe man OG und MF senkrecht auf die Ebene AB des Kugelkreises und lege durch OG und die Augenaxe OQ eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise QPD schneidet. In dieser Ebene muss auch die Senkrechte MF liegen, welche durch den Mittelpunkt F des Kugelkreises geht und die Kugel im Pole P dieses Kreises trifft, und endlich befindet sich auch die Axe OF des Kegels in dieser Ebene. Wie oben bewiesen wurde, schneidet aber die durch die Normale OG und die Kegelaxe OF gelegte Ebene den Kegel in der längsten und kürzesten Seitenkante. Es ist also OA die längste, OB die kürzeste Erzeugende der Kegelfläche, und da die Bildebene CD senkrecht steht auf der Ebene OAB des Axendreieckes, so hat man nun die Gleichheit der Winkel OAB und Oba, sowie der Winkel OBA und Oab nachzuweisen.

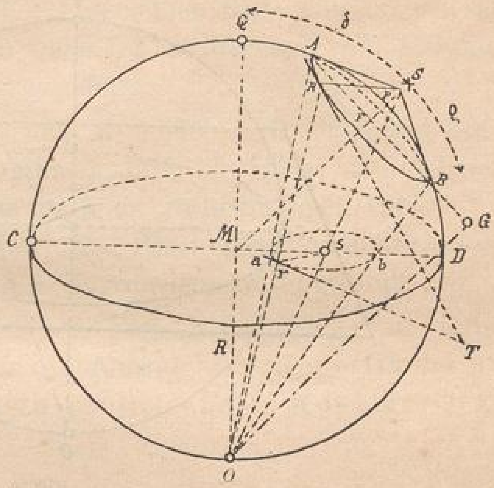

Fig. 5

Es ist der Winkel OAB Peripheriewinkel über Bogen ODB, somit

$$\sphericalangle\, OAB = \frac{1}{2}(OD + DB) = \frac{1}{2}(90^0 + BD)$$

ferner nach einem bekannten Satze:

$$\sphericalangle\, Oba = \frac{1}{2}(OC + BD) = \frac{1}{2}(90^0 + BD)$$

also $\sphericalangle\, OAB = \sphericalangle\, Oba$ und da die Dreiecke OAB und Oab zwei Winkel gleich haben, so ist auch $\sphericalangle\, OBA = \sphericalangle\, Oab$.

Der Kegel wird also antiparallel geschnitten, und die Durchschnittskurve ab ist ein Kreis.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der zweite Theil des Satzes, nach welchem sich die Projektionen zweier Kugelkreise unter denselben Winkeln schneiden, wie die Kreise selbst, wird auf folgende Weise bewiesen.

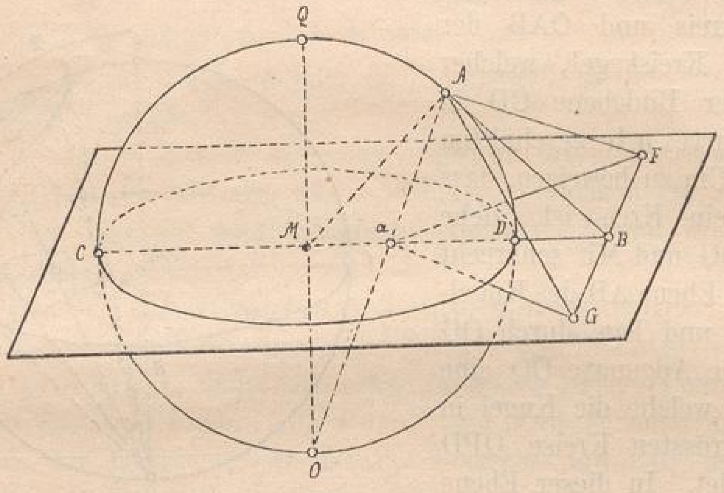


Fig. 6.

Es seien AG und AF (Fig. 6) Tangenten an zwei Kugelkreise, welche sich im Punkte A schneiden und den sphärischen Winkel FAG einschliessen, und FG die Durchschnittslinie, in welcher die Ebene, die durch die Tangenten gelegt wurde, die Bildebene schneidet; dann sind aF und aG Tangenten an die sich im Punkte a schneidenden Projektionskreise und es ist zu beweisen, dass $\sphericalangle$ FaG = $\sphericalangle$ FAG.

Man lege durch die Augenaxe OQ und den Punkt A eine Ebene, welche die Kugel in dem grössten Kreise DAQ schneidet, und ziehe im Punkte A eine Tangente AB an diesen Kreis, die die Durchschnittslinie FG im Punkte B trifft. Da nun die Ebenen AFG und CD auf der Ebene ODAQ gleichzeitig senkrecht stehen, so ist auch ihr Durchschnitt die Gerade FG senkrecht auf der Ebene ODAQ also FG senkrecht auf BA und Ba und die Dreiecke ABF, ABG, aBF, aBG sind bei B rechtwinklig. Ferner ist

$$\sphericalangle \text{OAB} = \tfrac{1}{2}(\text{OD} + \text{DA}) = \tfrac{1}{2}(90^0 + \text{DA})$$

$$\text{und } \sphericalangle \text{AaB} = \tfrac{1}{2}(\text{CO} + \text{DA}) = \tfrac{1}{2}(90^0 + \text{DA}) \text{ somit}$$

$$\sphericalangle \text{OAB} = \sphericalangle \text{AaB und } \triangle \text{BAa gleichschenklig}$$

$$\text{also AB} = \text{aB}$$

Die Dreiecke ABG und aBG sowie die Dreiecke ABF und aBF sind nun congruent und es ist 1) $\sphericalangle GaB = \sphericalangle GAB$

$$2)\ \sphericalangle FaB = \sphericalangle FAB \text{ also}$$

$$GaB + FaB = GAB + FAB \text{ oder}$$

$$GaF = GAF.$$

Liegen die Geraden AF und AG auf derselben Seite von AB, so sind die Gleichungen 1) und 2) von einander abzuziehen, im Uebrigen bleibt der Beweis des Satzes unverändert.

Da sich die Parallelkreise und Meridiane auf der Kugel unter rechten Winkeln schneiden, so müssen auch die Bilder dieser Kreise unter sich rechte Winkel bilden und die rechtwinkligen sphärischen Vierecke, welche von den Meridianen und Parallelkreisen eingeschlossen werden, wieder durch rechtwinklige Curvenvierecke dargestellt sein.

Eine andere Eigenschaft dieser Projektionsmethode ist ferner folgende: Denkt man sich an die Kugel eine Kegelfläche gelegt, welche sie längs dem zu projicirenden Kugelkreis AB (Fig. 5) berührt, so ist die Projektion s der Spitze S des Kegels der Mittelpunkt der Projektion ab des Kugelkreises, wie sich auf folgende Art leicht beweisen lässt:

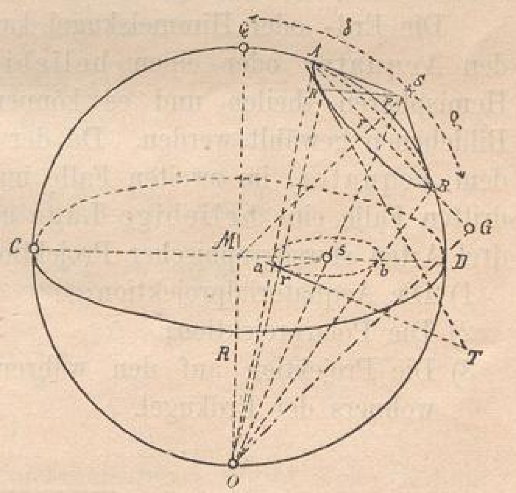


Fig. 5.

Es sei R ein beliebiger Punkt des Kugelkreises, r seine Projektion, ferner RT eine Tangente an den Kugelkreis im Punkte R und rT ihre Projektion, dann sind RT und die Kegelkante RS Tangenten an die Kugelfläche welche auf einander senkrecht stehen, und da sich nach dem Vorhergehenden die Projektionen zweier Kugeltangenten unter demselben Winkel schneiden wie die Tangenten selbst, so schliessen die Geraden rT und rs ebenfalls einen rechten Winkel ein. Die Gerade rs geht also durch den Mittelpunkt des Kreises **a b**, und da diess von jeder anderen Linie r s auch gesagt werden kann, so muss der Punkt s der Mittelpunkt des Kreises a b sein.

Man nennt solche Projektionen, bei welchen die Bildebene durch den Mittelpunkte der Kugel geht und der Augenpunkt im Endpunkt des auf dieser Ebene senkrechten Kugelradius liegt: stereographische Projektionen.

Wie schon erwähnt, werden dieselben hauptsächlich zur Darstellung ganzer Kugelhemisphären angewandt und nennt man die Gesammtheit zweier Hemisphären, welche nach dieser Methode abgebildet werden: Weltkarte. Bei einer solchen Karte sind nur die in ihrer Mitte liegenden Theile in den richtigen Verhältnissen dargestellt, während die übrigen Parthien an Ausdehnung zunehmen, je weiter sie vom Centrum der Karte abstehen. Dieses Wachsthum kömmt von der Schiefe der Sehstrahlen her, welche um so bedeutender wird, je weiter sich die Strahlen von der optischen Axe entfernen. Es folgt hieraus, dass man bei Weltkarten nicht für die ganze Karte denselben Massstab anwenden darf. (Ueber die Bestimmung des Vergrösserungsverhältnisses für verschiedene Theile der Karte siehe das Capitel über die conformen Abbildungen.)

Die Erd- oder Himmelskugel kann man durch einen Meridian, den Aequator oder einen beliebigen grössten Kreis in zwei Hemisphären theilen und es können die Ebenen dieser Kreise als Bildebenen gewählt werden. Da der Augenpunkt im ersten Falle auf dem Aequator, im zweiten Falle im Pole der Kugel liegt und im dritten Falle eine beliebige Lage auf der Kugel besitzt, so gibt es drei Arten stereographischer Projektionen der Kugeloberfläche:

1) Die Aequatorialprojektion;
2) Die Polarprojektion;
3) Die Projektion auf den wahren Horizont eines beliebigen Bewohners der Erdkugel.

---

## Ableitung der allgemeinen Formeln auf welchen die Construction stereographischer Netze beruht.

Es sei CD (Fig. 5) die Bildebene, O der Augenpunkt und OQ die Augenaxe, ferner AB ein beliebiger Kugelkreis, dessen Projektion ab gesucht ist, und P der Pol dieses Kreises. Legt man durch die Augen-