Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Ableitung der allgemeinen Formeln, auf welchen die Construktion stereographischer Netze beruht

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

r s auch gesagt werden kann, so muss der Punkt s der Mittelpunkt des Kreises a b sein.

Man nennt solche Projektionen, bei welchen die Bildebene durch den Mittelpunkte der Kugel geht und der Augenpunkt im Endpunkt des auf dieser Ebene senkrechten Kugelradius liegt: stereographische Projektionen.

Wie schon erwähnt, werden dieselben hauptsächlich zur Darstellung ganzer Kugelhemisphären angewandt und nennt man die Gesammtheit zweier Hemisphären, welche nach dieser Methode abgebildet werden: Weltkarte. Bei einer solchen Karte sind nur die in ihrer Mitte liegenden Theile in den richtigen Verhältnissen dargestellt, während die übrigen Parthien an Ausdehnung zunehmen, je weiter sie vom Centrum der Karte abstehen. Dieses Wachsthum kömmt von der Schiefe der Sehstrahlen her, welche um so bedeutender wird, je weiter sich die Strahlen von der optischen Axe entfernen. Es folgt hieraus, dass man bei Weltkarten nicht für die ganze Karte denselben Massstab anwenden darf. (Ueber die Bestimmung des Vergrösserungsverhältnisses für verschiedene Theile der Karte siehe das Capitel über die conformen Abbildungen.)

Die Erd- oder Himmelskugel kann man durch einen Meridian, den Aequator oder einen beliebigen grössten Kreis in zwei Hemisphären theilen und es können die Ebenen dieser Kreise als Bildebenen gewählt werden. Da der Augenpunkt im ersten Falle auf dem Aequator, im zweiten Falle im Pole der Kugel liegt und im dritten Falle eine beliebige Lage auf der Kugel besitzt, so gibt es drei Arten stereographischer Projektionen der Kugeloberfläche:

1) Die Aequatorialprojektion;
2) Die Polarprojektion;
3) Die Projektion auf den wahren Horizont eines beliebigen Bewohners der Erdkugel.

Ableitung der allgemeinen Formeln auf welchen die Construction stereographischer Netze beruht.

Es sei CD (Fig. 5) die Bildebene, O der Augenpunkt und OQ die Augenaxe, ferner AB ein beliebiger Kugelkreis, dessen Projektion ab gesucht ist, und P der Pol dieses Kreises. Legt man durch die Augenaxe OQ und den Pol P des Kreises eine Ebene, so steht diese senkrecht auf der Bildebene und es ist die Projektion des Kreises CQPD die gerade Linie CD. Ist P der eine Pol der Erd- oder Himmelskugel, so nennt man diesen Kreis, resp. seine Projektion CD den Hauptmeridian des Kartennetzes.

Um den Kreis AB auf der Kugelfläche zu bestimmen, sei die Entfernung $QP = \delta$ seines Poles vom Gegenpunkte Q des Auges und der Bogenhalbmesser $PA = \varrho$ des Kreises, ferner der Radius R der Kugel gegeben. Aus diesen Werthen lässt sich dann für den Projektionskreis ab, die Entfernung $Ms = d$ seines Mittelpunktes s vom Centrum der Karte, sowie der Radius $as = r$ des Kreises ermitteln.

In Fig. 5 ist $QB = \delta + \varrho$; $QA = \delta - \varrho$

ferner $\sphericalangle QOB = \frac{1}{2}(\delta + \varrho)$; $QOA = \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$

$$Mb = OM \, . \, Tg \, QOB; \; Ma = OM \, Tg \, QOA$$

$$e' = R \, . \, Tg \frac{1}{2}(\delta + \varrho); \; e = R \, Tg \frac{1}{2}(\delta - \varrho) \quad (I)$$

$$\text{Ist } \varrho > \delta, \text{ so ist } e = R \, Tg \frac{1}{2}(\varrho - \delta) \quad (I\,a)$$

in welchem Falle jedoch e vom Punkte M aus auf die andere Seite von CD aufzutragen ist. Ferner ergibt sich:

$$Ms = d = Ma + as = Ma + \frac{ab}{2} = \frac{2\,Ma + ab}{2}$$

$$\text{oder } d = \frac{Ma + (Ma + ab)}{2} = \frac{Ma + Mb}{2}$$

$$d = \frac{R}{2}\left[Tg \frac{1}{2}(\delta - \varrho) + Tg \frac{1}{2}(\delta + \varrho)\right]$$

oder da $Tg\,\alpha + Tg\,\beta = \frac{Sin\,(\alpha + \beta)}{Cos\,\alpha\,Cos\,\beta}$, so ergibt sich

$$d = \frac{R\,Sin\,\delta}{2\,Cos\frac{\delta + \varrho}{2}\,Cos\frac{\delta - \varrho}{2}} \quad (II) \text{ oder}$$

$$d = \frac{R\,Sin\,\delta}{Cos\,\delta + Cos\,\varrho} \quad (II\,a)$$

Der Werth des Radius as des Projektionskreises ergibt sich wie folgt:

$$as = r = \frac{ab}{2} = \frac{Mb - Ma}{2}$$

$$r = \frac{R}{2}\left[Tg \frac{1}{2}(\delta + \varrho) - Tg \frac{1}{2}(\delta - r)\right]$$

oder da $Tg\,\alpha - Tg\,\beta = \frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{Cos\,\alpha\,Cos\,\beta}$

$$r = \frac{R\,Sin\,\varrho}{2\,Cos\frac{1}{2}(\delta + \varrho)\,Cos\frac{1}{2}(\delta - \varrho)} \quad (III) \quad \text{oder } r = \frac{R\,Sin\,\varrho}{Cos\,\delta + Cos\,\varrho} \quad (III\,a)$$

Die Gleichungen I, II, III sind die Fundamentalformeln, nach welchen für jeden Kugelkreis seine stereographische Projektion berechnet werden kann. Obgleich zwei dieser Gleichungen genügen, um die zur Construktion eines Kreises nöthigen Elemente zu berechnen, so ist es doch zweckmässig mittelst einer 3. Gleichung eine Controlle auszuüben, durch welche allfällige Rechnungsfehler leicht aufgefunden werden. Aus den Gleichungen IIa und IIIa folgt noch:

$$d : r = \operatorname{Sin} \delta : \operatorname{Sin} \varrho \quad (IV)$$

welche Proportion demselben Zwecke dienen kann.

Im vorliegenden Falle lag der Pol P des Kugelkreises auf dem Hauptmeridiane der Kugel, welcher sich als gerade Linie projicirt. Besitzt nun der Kugelkreis DD′ wie in Fig. 7 eine beliebige Lage, so müssen zu seiner Bestimmung folgende Werthe gegeben sein:

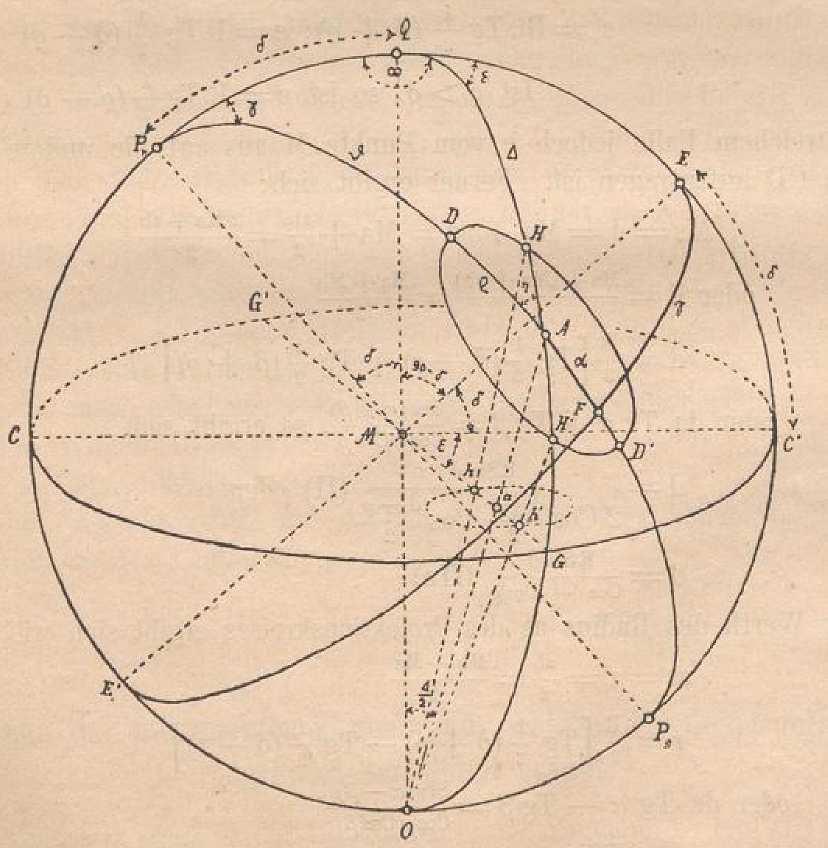

Fig. 7.

Die Distanz $P_n Q = \delta$ des Erd- oder Himmelspoles vom Gegenpunkte Q des Auges, der Winkel γ, welchen der Meridian $P_n A P_s$ der durch den Pol des gegebenen Kreises geht mit dem Hauptmeridiane $P_n Q P_s$ bildet, derselbe wird wie bekannt durch den Bogen EF des Aequators gemessen. Ferner muss noch der Abstand $AF = \alpha$ des Poles A des Kugelkreises vom Aequator und der Bogenhalbmesser $AD = \varrho$ des Kreises bekannt sein.

Legt man durch die Augenaxe OQ und den Pol A des Kugelkreises eine Ebene, so steht diese auf der Bildebene senkrecht und schneidet die Kugel in dem grössten Kreise QAO, welcher sich als gerade Linie MG projicirt. Zieht man die Projektionsstrahlen OH und OH′, so schneiden sie die Gerade MG in den Punkten h und h′ und da HH′ ein Durchmesser des Kugelkreises ist, so muss auch hh′ ein Durchmesser seiner Projektion sein. Vor Allem hat man nun den Winkel $C'MG = \varepsilon$ zu berechnen, welchen die Gerade MG, auf der der Mittelpunkt des Kreises hh′ liegt, mit dem Hauptmeridiane MC′ einschliesst. Es ist aber

$$\varepsilon = \sphericalangle GQC' = 180^0 - \omega.$$

Der Winkel ω ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $AP_n Q$, von welchem zwei Seiten $P_n Q = \delta$ und $P_n A = 90^0 - \alpha = \vartheta$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben sind. Nach den Neperschen Analogien ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\omega + \eta) &= \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\vartheta - \delta)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(\omega - \eta) &= \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\vartheta - \delta)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\vartheta + \delta)} \operatorname{Cotg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega + \eta) + \frac{1}{2}(\omega - \eta) \quad \text{(VI)}$$

Nachdem mit Glch VI ω berechnet ist, ergibt sich $\varepsilon = 180^0 - \omega$. Man kann statt dessen auch zuerst die Seite $AQ = \varDelta$ mittelst des Cosinussatzes und alsdann den Winkel ω mit dem Sinussatze berechnen.

$$\operatorname{Cos} \varDelta = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \vartheta + \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Cos} \gamma \text{ oder}$$

$$\operatorname{Cos} \varDelta = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma \quad \text{(Va)}$$

ferner ist $\operatorname{Sin} \omega = \frac{\operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin} \varDelta} = \frac{\operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \varDelta}$ (VIa)

und $\varepsilon = 180^0 - \omega$ (VII)

Macht man im Entwurfe des Kartennetzes den Bogen $C'G = \varepsilon$, so ist die Richtung der Geraden MG bestimmt und man berechnet nun nach Gleichung (I) (II) (III) die Werthe von $Mh = e$, $Mm = d$ und $hm = r$. (m ist der Mittelpunkt des Projektionskreises).

Wir wollen nun die einzelnen Projektionsarten der stereographischen Projektionsmethode betrachten und die erhaltenen Gleichungen auf spezielle Fälle anwenden.

I. Projektion auf den Meridian.

(Stereographische Aequatorialprojektion.)

Anwendung derselben auf die Construktion von Planiglobien und Sternkarten.

(Siehe Fig. 8 und 9.)

Es sei $P_n H P_s G$ die Erd- oder Himmelskugel, $P_n' H' P_s' G'$ ihre horizontale, $P_n'' H'' P_s'' G''$ ihre vertikale Projektion*), so denke man sich die Kugel in eine solche Lage gebracht, dass ihre Axe auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht und die Ebene des nullten Meridianes $P_n H P_s G$, welcher bei Darstellungen der Erdkugel gewöhnlich durch die Insel Ferro gelegt wird, mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Nimmt man die Ebene des 0^{ten} Meridianes als Bildebene an, so liegt das Auge im Punkte 0 des Aequators. Die Augenaxe OQ steht im vorliegenden Falle senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene und in dieser projicirt sich das stereographische Bild der Halbkugel, welches in der Ebene $P_n H P_s G$ liegt, in der wahren Grösse.

Um das stereographische Bild irgend eines Parallelkreises BCDE zu erhalten, betrachte man die zweite vertikale Projektion der Kugel, in welcher die Bildebene als gerade Linie $P_n''' P_s'''$ erscheint. O''' ist die Projektion des Augenpunktes, von welchem aus die Strahlen $O'''C'''$ und $O'''E'''$ gezogen werden, die die Bildebene in den Punkten c''' und e''' treffen. ce ist ein Durchmesser des Projektionskreises und man hat die Punkte c''' und e''' nach c'' und e'' zu projiciren. Der Mittelpunkt $1''$ von $c''e''$ ist das Centrum des gesuchten Kreises, welcher durch die Punkte $B''D''$ gehen muss. Sollte e'' zu weit wegfallen, so ist es ein Leichtes durch die Punkte $B''c''D''$ einen Kreis

*) In der Folge werden die Punkte im Raume mit grossen Buchstaben (P, Q ....), ihre Projektionen mit $P'P''P'''$, $Q'Q''Q'''$, ... bezeichnet. Ferner sollen die stereographischen Bilder dieser Punkte im Raume gleichnamige kleine Buchstaben (p, q ...) erhalten, und ihre Projektionen $p'p''p'''$, $q'q''q'''$, ... heissen.