Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

I. Projektion auf den Meridian (stereographische Aequatorialprojektion) Anwendung derselben auf die Construktion von Planiglobien und Sternkarten

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

Macht man im Entwurfe des Kartennetzes den Bogen $C'G = \varepsilon$, so ist die Richtung der Geraden MG bestimmt und man berechnet nun nach Gleichung (I) (II) (III) die Werthe von $Mh = e$, $Mm = d$ und $hm = r$. (m ist der Mittelpunkt des Projektionskreises).

Wir wollen nun die einzelnen Projektionsarten der stereographischen Projektionsmethode betrachten und die erhaltenen Gleichungen auf spezielle Fälle anwenden.

I. Projektion auf den Meridian.

(Stereographische Aequatorialprojektion.)

Anwendung derselben auf die Construktion von Planiglobien und Sternkarten.

(Siehe Fig. 8 und 9.)

Es sei $P_n H P_s G$ die Erd- oder Himmelskugel, $P_n' H' P_s' G'$ ihre horizontale, $P_n'' H'' P_s'' G''$ ihre vertikale Projektion*), so denke man sich die Kugel in eine solche Lage gebracht, dass ihre Axe auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht und die Ebene des nullten Meridianes $P_n H P_s G$, welcher bei Darstellungen der Erdkugel gewöhnlich durch die Insel Ferro gelegt wird, mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Nimmt man die Ebene des 0^{ten} Meridianes als Bildebene an, so liegt das Auge im Punkte 0 des Aequators. Die Augenaxe OQ steht im vorliegenden Falle senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene und in dieser projicirt sich das stereographische Bild der Halbkugel, welches in der Ebene $P_n H P_s G$ liegt, in der wahren Grösse.

Um das stereographische Bild irgend eines Parallelkreises BCDE zu erhalten, betrachte man die zweite vertikale Projektion der Kugel, in welcher die Bildebene als gerade Linie $P_n''' P_s'''$ erscheint. O''' ist die Projektion des Augenpunktes, von welchem aus die Strahlen $O''' C'''$ und $O''' E'''$ gezogen werden, die die Bildebene in den Punkten c''' und e''' treffen. ce ist ein Durchmesser des Projektionskreises und man hat die Punkte c''' und e''' nach c'' und e'' zu projiciren. Der Mittelpunkt $1''$ von $c'' e''$ ist das Centrum des gesuchten Kreises, welcher durch die Punkte $B'' D''$ gehen muss. Sollte e'' zu weit wegfallen, so ist es ein Leichtes durch die Punkte $B'' c'' D''$ einen Kreis

---

*) In der Folge werden die Punkte im Raume mit grossen Buchstaben (P, Q . . . .), ihre Projektionen mit $P' P'' P'''$, $Q' Q'' Q'''$, ... bezeichnet. Ferner sollen die stereographischen Bilder dieser Punkte im Raume gleichnamige kleine Buchstaben (p, q . . .) erhalten, und ihre Projektionen $p' p'' p'''$, $q' q'' q'''$, . . . heissen.

zu legen. Es ist noch zu bemerken, dass sich der Aequator, dessen Ebene auf der vertikalen Pr. Eb. senkrecht steht, als gerade Linie

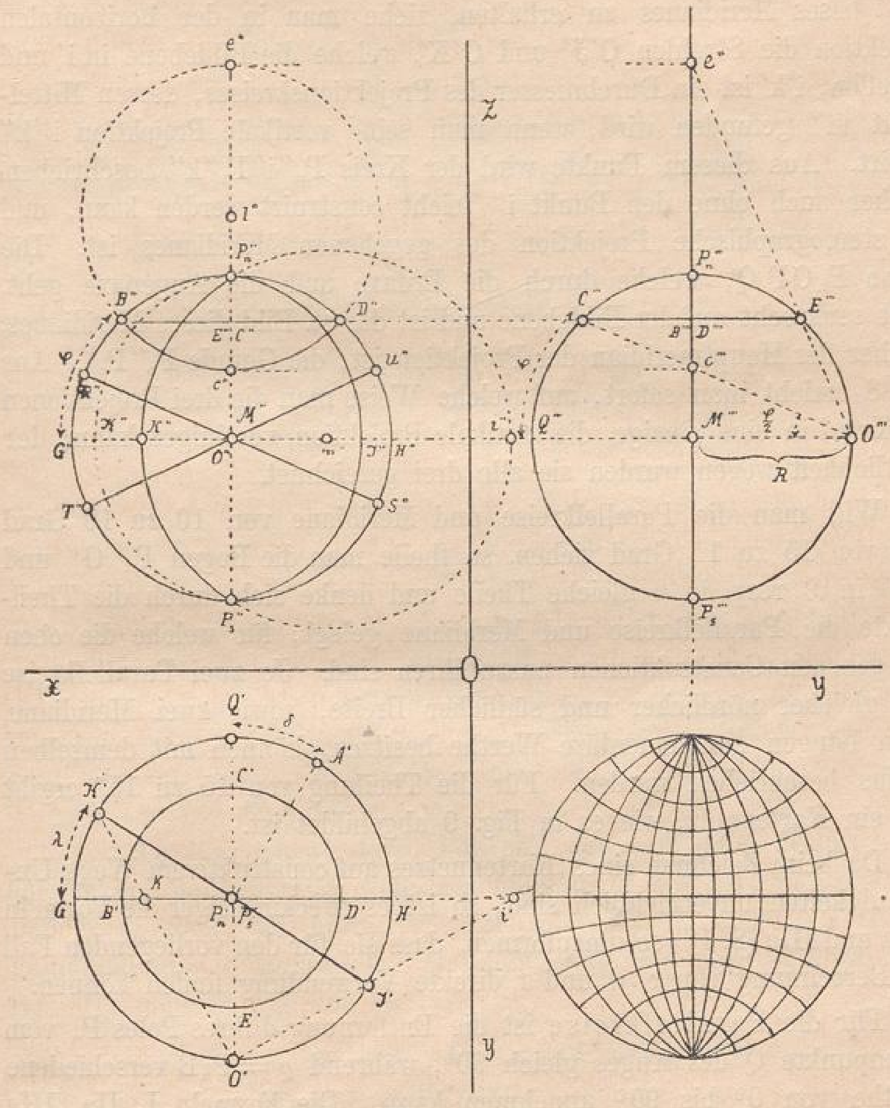

Fig. 8. Fig. 9.

G″H″ projicirt. Ferner besitzen je zwei und zwei Parallelkreise, welche gleichweit vom Aequator entfernt sind, zu ihm eine symetrische Lage, und müssen daher auch die stereographischen Bilder dieser Kreise zu der Geraden G″H″ eine symetrische Lage haben.

Die stereographische Projection irgend eines Meridianes wird auf folgende Weise erhalten: Es sei $P_n J P_s K$ (Fig. 8) ein Meridian, welcher mit dem 0^{ten} Meridian den Winkel λ einschliesst, $J'K'$ seine horizontale, $J''K''$ seine vertikale Projektion. Um das stereographische Bild dieses Meridianes zu erhalten, ziehe man in der horizontalen Projektion die Strahlen $O'J'$ und $O'K'$, welche die Bildebene in i' und k' treffen, $i'k'$ ist ein Durchmesser des Projektionskreises, dessen Mittelpunkt m'' gefunden wird, wenn man seine vertikale Projektion $i''k''$ halbirt. Aus diesem Punkte wird der Kreis $P_n''i''P_s''k''$ beschrieben, welcher auch ohne den Punkt i'' leicht construirt werden kann, und die stereographische Projektion des gegebenen Meridianes ist. Die Ebene $P_n O P_s Q$, welche durch die Erdaxe und die Augenaxe geht, steht senkrecht auf der Bildebene und ist das st. Bild dieses Meridianes, welcher der Hauptmeridian der Projektion ist, die Gerade $P_n''P_s''$. Aus Fig. 8 ersieht man sofort, auf welche Weise man die drei Projektionen der Kugel in eine einzige, die vertikale Projektion, vereinigen kann; der Deutlichkeit wegen wurden sie alle drei gezeichnet.

Will man die Parallelkreise und Meridiane von 10 zu 10 Grad oder von 15 zu 15 Grad ziehen, so theile man die Bogen $P_n''G''$ und $G'Q'$ in 9 resp. in 6 gleiche Theile und denke sich durch die Theilpunkte die Parallelkreise und Meridiane gelegt, für welche die oben angegebenen Construktionen auszuführen sind. Je zwei Parallelkreise von gleicher nördlicher und südlicher Breite, sowie zwei Meridiane, deren Längen supplementäre Werthe besitzen, können mit demselben Radius beschrieben werden. Für die Theilung von 15 zu 15^0 ergibt sich ein Kartennetz, wie es in Fig. 9 abgebildet ist.

Da beim Zeichnen eines Kartennetzes auf construktivem Wege Ungenauigkeiten unvermeidlich sind, so ist es zweckmässiger die Formeln I, IIa und IIIa (S. 17) so umzuformen, dass sie für den vorliegenden Fall zur Berechnung von e, d und r direkte Verwendung finden können.

Für die Parallelkreise ist die Entfernung δ ihres Poles P_n vom Gegenpunkte Q des Auges gleich 90^0, während $\varrho = P_n B$ verschiedene Werthe von 0^0 bis 90^0 annehmen kann. Die Formeln I, IIa, IIIa nehmen daher folgende Form an

$$e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (90^0 - \varrho) \quad \text{(VIII)}$$

$$d = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varrho} \quad \text{(IX)}$$

$$r = R \, . \operatorname{Tg} \varrho \quad \text{(X)}.$$

Statt der Poldistanz ϱ des Parallelkreises kann auch seine Breite φ

gegeben sein. Es ist aber $\varrho = 90^0 - \varphi$ und $\mathrm{Cos}\,\varrho = \mathrm{Sin}\,\varphi$, $\mathrm{Tg}\,\varrho = \mathrm{Cotg}\,\varphi$, die Formeln lauten daher:

$$e = R\,\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi}{2} \quad \text{(VIIIa)}$$

$$d = \frac{R}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \quad \text{(IXa)}$$

$$r = R\,.\,\mathrm{Cotg}\,\varphi \quad \text{(Xa).}$$

Man kann diese Werthe auch unmittelbar aus Fig. 8 erhalten, in welcher $\sphericalangle Q'''O'''C''' = \frac{\varphi}{2}$ und $\sphericalangle Q'''O'''E''' = \frac{180^0 - \varphi}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$ ist. Es ergiebt sich:

$$M'''c''' = M''c'' = e = R\,\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$M'''e''' = M''e'' = R\,\mathrm{Tg}\left(90^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = R\,\mathrm{Cotg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$d = \frac{M''c'' + M''e''}{2} = \frac{R}{2}\left(\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi}{2} + \mathrm{Cotg}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{\mathrm{Sin}^2\,\frac{\varphi}{2} + \mathrm{Cos}^2\,\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{R}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

ferner ist $2r = c''e'' = M''e'' - M''c'' = R\left(\mathrm{Cotg}\,\frac{\varphi}{2} - \mathrm{Tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)$

$$2r = \frac{R\left(\mathrm{Cos}^2\,\frac{\varphi}{2} - \mathrm{Sin}^2\,\frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\varphi}{2}} = \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{2}} = 2\,R\,\mathrm{Cotg}\,\varphi$$

$$r = R\,\mathrm{Cotg}\,\varphi.$$

Für die Meridiane deren Pole auf dem Aequator liegen, variirt die Distanz δ dieser Pole vom Gegenpunkte Q des Auges zwischen 0^0 und 90^0 (siehe die horiz. Projektion der Fig. 8), dagegen ist der Bogenhalbmesser sämmtlicher Meridiane $\varrho = 90^0$ und die Formeln Ia IIa, IIIa nehmen folgende Gestalt an:

$$e = R\,\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\,(90^0 - \delta)\ [\text{(XI)}] \quad \text{denn } \varrho \mathrel{\overline{\overline{>}}} \delta$$

$$d = R\,\mathrm{Tg}\,\delta \quad \text{(XII)}$$

$$r = \frac{R}{\mathrm{Cos}\,\delta} \quad \text{(XIII).}$$

Ist die Bildebene G′H′ (Fig. 8) der 0^{te} Meridian, und die geog. Länge $G'K' = \lambda$ des zu projicirenden Meridianes gegeben, so ist $\mathrm{Bg}\,A'Q' = \mathrm{Bg}\,.\,G'K'$ d. h. $\delta = \lambda$ und

$$e = R\,\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\,(90^0 - \lambda) \quad \text{(XIa)}$$

$$d = R\,Tg\,\lambda \quad (XIIa)$$

$$r = \frac{R}{Cos\,\lambda} \quad (XIIIa). —$$

Nach dieser Methode werden die meisten Weltkarten construirt, wobei man gewöhnlich den Meridian von Ferro, welcher die Erde in die Land- und Wasserhälfte resp. in die alte und neue Welt theilt, als 0ten Meridian und gleichzeitig als Bildebene annimmt.

In nachfolgender Tabelle sind sowohl für die Parallelkreise als Meridiane die Werthe von e d r angegeben, wenn die Werthe von φ und λ von 5^0 zu 5^0 wachsen. Der Radius der Kugel wurde = 1 gesetzt.

φ oder λ	Paralellkreise			Meridiane		
	$e = Tg\,\frac{\varphi}{2}$	$d = \frac{1}{Sin\,\varphi}$	$r = Cotg\,\varphi$	$e = Tg\,\frac{1}{2}(90^0 - \lambda)$	$d = Tg\,\lambda$	$r = \frac{1}{Cos\,\lambda}$
5^0	0,04366	11,47371	11,43005	0,91634	0,08749	1,00382
10^0	0,08749	5,75877	5,67128	0,83910	0,17633	1,01543
15^0	0,13165	3,86370	3,73205	0,76733	0,26795	1,03528
20^0	0,17633	2,92380	2,74748	0,70021	0,36397	1,06418
$23^0.28'$	0,20770	2,51120	2,30351			
25^0	0,22169	2,36620	2,14451	0,63707	0,46631	1,10338
30^0	0,26795	2,00000	1,73205	0,57735	0,57735	1,15470
35^0	0,31530	1,74345	1,42815	0,52057	0,70021	1,22077
40^0	0,36397	1,55572	1,19175	0,46631	0,83910	1,30541
45^0	0,41421	1,41421	1,00000	0,41421	1,00000	1,41421
50^0	0,46631	1,30541	0,83911	0,36397	1,19175	1,55572
55^0	0,52057	1,22077	0,70021	0,31530	1,42815	1,74345
60^0	0,57735	1,15470	0,57735	0,26795	1,73205	2,00000
65^0	0,63707	1,10338	0,46631	0,22169	2,14451	2,36620
$66^0.32'$	0,65604	1,09016	0,43412			
70^0	0,70021	1,06418	0,36397	0,17633	2,84748	2,92380
75^0	0,76733	1,03528	0,26795	0,13165	3,73205	3,86370
80^0	0,83910	1,01543	0,17633	0,08749	5,67127	5,75876
85^0	0,91633	1,00382	0,08749	0,04366	11,43005	11,47371

Wir wollen nach dieser Methode noch einen beliebigen Kugelkreis, z. B. die Ekliptik projiciren. Um die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne darzustellen, wie sie von einem Bewohner des Erdäquators gesehen werden, ist es am zweckmässigsten diese Projektion anzuwenden. Für die Frühlingsgestirne ist der 180te, für die Sommergestirne der 270te, für die Herbstgestirne der 360te und für die Wintergestirne der 90te Declinationskreis der Kugel Hauptmeridian der

Projektion. Wollte man in diese 4 Karten, welche ein vollständiges Bild der ganzen Himmelskugel geben, einen beliebigen Kugelkreis einzeichnen, so hätte man nach den Gleichungen, V VI und VII (Seite 19) die Winkelwerthe von ω und ε, und nach den Gleichungen I, IIa, IIIa (Seite 17) die Werthe von e d r zu berechnen.

Ist $P_n Q = \delta$ (siehe Fig. 7, Seite 18) die Entfernung des Poles vom Gegenpunkt Q des Auges

$EF = \gamma$ die Rectascension des Poles der Ekliptik

$P_n A = \vartheta$ die Distanz des Poles der Ekliptik vom Himmelspol

$AD = \varrho$ der Bogenhalbmesser der Ekliptik

so sind in die Gleichungen Va und VIa für δ γ ϑ ϱ folgende Zahlenwerthe zu substituiren:

1) für die Frühlingsgestirne: $\delta = 90^0, \gamma = 90^0, \vartheta = 23^0 27' 20'', \varrho = 90^0$

2) „ „ Sommergestirne: $\delta = 90^0, \gamma = 0^0, \vartheta = 23^0 27' 20'', \varrho = 90^0$

3) „ „ Herbstgestirne : $\delta = 90^0, \gamma = 270^0, \vartheta = 23^0 27' 20'', \varrho = 90^0$

4) „ „ Wintergestirne : $\delta = 90^0, \gamma = 180^0, \vartheta = 23^0 27' 20'', \varrho = 90^0$

Für No. 1 ergibt sich

$$\text{Cos}\,\varDelta = 0 \text{ also } \varDelta = 90^0$$
$$\text{Sin}\,\omega = \text{Sin}\,23^0 27' 20'' \text{ also}$$
$$\omega = 23^0 27' 20''$$
$$\varepsilon = 180^0 - \omega = 156^0 32' 40''$$

Der Winkel ε ist an die Gerade $M'' P_s''$ (Fig. 8) in der Richtung des Uhrzeigers anzutragen und liegt auf seinem Schenkel MG (Fig 7) der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ferner ergeben sich nach den Gleichungen I, IIa und IIIa die Werthe von e d r.

$$e = \text{Tg}\,\frac{1}{2}\,(\varDelta - \varrho) = \text{Tg}\,0^0 = 0$$
$$d = \frac{\text{Sin}\,\varDelta}{\text{Cos}\,\varDelta + \text{Cos}\,\varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$
$$r = \frac{\text{Sin}\,\varrho}{\text{Cos}\,\varDelta + \text{Cos}\,\varrho} = \frac{1}{0} = \infty$$

Da d und r unendlich gross ist, so projicirt sich die Ekliptik in diesem Falle als gerade Linie $R'' S''$ (Fig. 8), welche mit dem Aequator $G'' H''$ einen Winkel von $23^0 27'$ einschliesst, und kann man auch ohne Hülfe der Formeln zu diesem Resultate gelangen, denn die Ebene der Ekliptik geht durch die Augenaxe und steht daher senkrecht auf der Bildebene, wesshalb sie sich als gerade Linie projicirt. Diese Linie muss mit dem Aequator einen Winkel von $23^0 27'$ bilden, denn die stereographischen Projektionen zweier Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel, wie die Kreise selbst.

Auch für die Herbstgestirne projicirt sich die Ekliptik als gerade Linie T″U″ (Fig 8), welche in Bezug auf den Aequator G″H″ zu der Geraden R″S″ eine symetrische Lage besitzt.

Für No. 2 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\mathrm{Cos}\,\varDelta = \mathrm{Sin}\,\vartheta = \mathrm{Sin}\,23^0\,27'20''$$
$$\varDelta = 66^0\,32'\,40''$$
$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{0}{\mathrm{Sin}\,66^0\,32'\,40''} = 0$$
$$\omega = 0^0$$
$$\varepsilon = 180^0$$

ferner nach Gleichung I, IIa, IIIa:

$$e = \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,(66^0\,32'\,40'' - 90^0)$$
$$e = -\,\mathrm{Tg}\,11^0\,43'\,40''$$
$$e = -\,0{,}20760$$
$$d = \mathrm{Tg}\,\varDelta = \mathrm{Tg}\,66^0\,32'\,40''$$
$$d = 2{,}30473$$
$$r = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varDelta} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,66^0\,32'\,40''}$$
$$r = 2{,}51233$$

Für No. 4 ergibt sich nach Gleichung Va und VIa:

$$\mathrm{Cos}\,\varDelta = -\,\mathrm{Sin}\,\vartheta = -\,\mathrm{Sin}\,23^0\,27'\,20''$$
$$\varDelta = 66^0 32'40''$$
$$\varDelta = 180^0 - 66^0 32'\,40''$$
$$\varDelta = 113^0 27'20''$$
$$\mathrm{Sin}\,\omega = 0\,,\ \omega = 180^0$$
$$\varepsilon = 0^0$$

Nach den Gleichungen I, IIa, IIIa erhält man:

$$e = \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\,(113^0 27'20'' - 90^0)$$
$$e = \mathrm{Tg}\,11^0\,43'\,40''$$
$$e = 0{,}20760$$
$$d = \mathrm{Tg}\,\varDelta = \mathrm{Tg}\,113^0\,27'\,20''$$
$$d = -\,2{,}30473$$
$$r = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varDelta} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,113^0\,27'\,20''}$$
$$r = -\,2{,}51233$$

Zusammenstellung der erhaltenen Werthe.

Ansicht	ε	e	d	r
I. Frühlingsgestirne	156°32′40″	0,00000	∞	∞
II. Sommergestirne	180°	— 0,20760	2,30473	2,51233
III. Herbstgestirne	203°27′20″	0,00000	∞	∞
IV. Wintergestirne	360°	0,20760	— 2,30473	—2,51233

II. Projektion auf den Aequator.

(Stereographische Polarprojektion.)

Befindet sich das Auge in dem einen Pol der Kugel, so fällt die Bildebene mit der Aequatorebene zusammen und der Aequator A′B′C′D′ (Fig. 10) ist der Grenzkreis der Karte. Die Erd- oder Himmelsaxe ist