Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Construktion von Otto Möllinger's transparenter Sternkarte mit beweglichem Horizont

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

ort, dessen geog. Breite AQ = φ gegeben ist. H′H′ ist der scheinbare, GG′ der wirkliche Horizont dieses Ortes, welch' letzterer die Himmelskugel in eine sichtbare und unsichtbare Hälfte theilt. Alle Gestirne, welche daher eine südl. Declination bis AG = $90^0 - \varphi$ besitzen, sind für diesen Ort im Laufe des Jahres sichtbar, und es bildet für einen Bewohner dessen geog. Breite 48^0 beträgt, derjenige Parallelkreis die Grenze der Karte, dessen südl. Declination = 42^0 ist. Die Radien der südlichen Parallelkreise ergeben sich, wenn man in Gleichung XIV ϱ der Reihe nach die Werthe 95^0 100^0 .... 130^0 gibt. Für den Kugelradius R = 1 erhält man folgende Werthe von r:

südliche Declination	$r = \mathrm{Tg}\,\frac{\varrho}{2}$
5^0	1,0913
10	1,1918
15	1,3032
20	1,4281
25	1,5697
30	1,7321
35	1,9210
40	2,1445

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, dass der Radius desjenigen Parallelkreises dessen südliche Declination 40^0 beträgt, doppelt so gross ist als der Radius der Kugel, wesshalb die Gestirne, welche die Kugelzone zwischen dem Aequator und — 40^0 südl. Declination einnehmen, eine viel grössere Fläche bedecken als die Gestirne zwischen 0^0 und 90^0 nördl. Declination.

Dieser Uebelstand wird vermieden, sobald man den Augenpunkt auf der Verlängerung der Weltaxe annimmt. Die Projektionen der Meridiane bleiben dabei unverändert, diejenigen der Parallelkreise sind concentrische Kreise, deren Radien von der Annahme des Augenpunktes abhängen. Prof. Otto Möllinger hat bei der Construktion seiner transparenten Sternkarte den Augenpunkt in solcher Entfernung vom Centrum der Kugel angenommen, dass die Bogen vom Aequator bis 42^0 nördlicher und südlicher Declination auf der Karte gleich gross erscheinen und in Folge dessen die Parallelkreise von $+ 42^0$ und $- 42^0$ Declination gleichweit vom Aequator entfernt sind. Die Karte ist für einen Bewohner des 48. Parallelkreises construirt, wesshalb der Bogen AQ = 48^0, der Bogen AG = 42^0 zu setzen ist (Fig. 11).

Es sei AB (Fig. 12) der Aequator der Himmelskugel, welcher gleichzeitig die Bildebene ist. $P_n P_s$ die Weltaxe auf deren Verlängerung der Augenpunkt O der Projektion liegt. CD und EF seien zwei Parallelkreise, welche die gleiche nördliche und südliche Declination von 42° besitzen. Vom Punkte 0 denke man sich nach diesen Kreisen Projektionsstrahlen gezogen, die die Bildebene in den Kreisen cd und ef treffen. Da die Entfernungen Ac und Ae dieser Kreise vom Aequator einander gleich sein sollen, so ist vor Allem zu beweisen, dass es auf der Geraden $P_n P_s$ einen Punkt 0 gibt, welcher als Augenpunkt dieser Anforderung entspricht. Es kann diess auf folgende Weise gezeigt werden: In Fig. 12 ist:

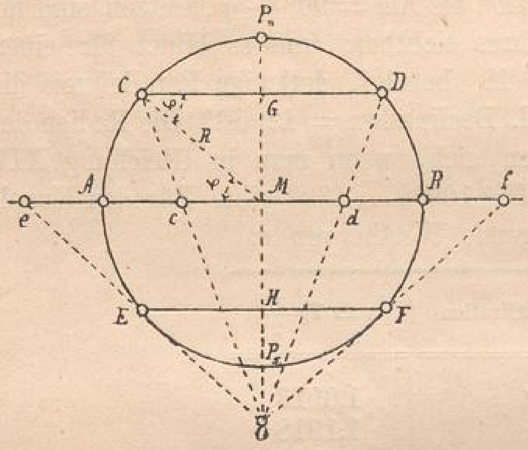


Fig. 12.

$$Mc : CG = MO : GO$$
$$Me : EH = MO : HO$$

Setzt man in diesen Proportionen $MO = D$, so ist $GO = D + MG$, $HO = D - MH$ und man erhält:

$$1)\ Mc = \frac{CG \,.\, D}{D + MG}$$

$$2)\ Me = \frac{EH \,.\, D}{D - MH}$$

Aus Fig. 12 ergibt sich ferner: $CG = EH = R \,.\, \text{Cos}\,\varphi$ und $MG = MH = R\,\text{Sin}\,\varphi$ somit:

$$(XV) \begin{cases} Mc = \dfrac{R\,\text{Cos}\,\varphi\, D}{D + R\,\text{Sin}\,\varphi} \\ Me = \dfrac{R\,\text{Cos}\,\varphi \,.\, D}{D - R\,\text{Sin}\,\varphi} \end{cases}$$

und $3)\ Ac = AM - Mc = R - \dfrac{R\,\text{Cos}\,\varphi\, D}{D + R\,\text{Sin}\,\varphi} = R\left(1 - \dfrac{D\,\text{Cos}\,\varphi}{D + R\,\text{Sin}\,\varphi}\right)$

$$4)\ Ae = Me - AM = \frac{R\,\text{Cos}\,\varphi\, D}{D - R\,\text{Sin}\,\varphi} - R = R\left(\frac{D\,\text{Cos}\,\varphi}{D - R\,\text{Sin}\,\varphi} - 1\right)$$

Nimmt man den Augenpunkt zuerst im Pole P_s der Kugel an, so ergibt sich für $\varphi = 42^0$ nach Gleichung XIV:

$$Mc = R\,Tg\,24^0 = 0{,}4452\ R$$
$$Me = R\,Tg\,66^0 = 2{,}2460\ R$$
ferner $Ac = R - 0{,}4452\ R = 0{,}5548\ R$

$$Ae = 2{,}2460\ R - R = 1{,}2460\ R$$
und daher $Ae > Ac$.

Nimmt man dagegen den Augenpunkt in einer Entfernung $D = 2R$ von der Bildebene an, so ergeben sich die Werthe von Ac und Ae nach den Gleichungen 3 und 4. Es ist

$$Ac = R\left(1 - \frac{2\,Cos\,\varphi}{2 + Sin\,\varphi}\right)$$
$$Ae = R\left(\frac{2\,Cos\,\varphi}{2 - Sin\,\varphi} - 1\right)$$

und für $\varphi = 42^0$, $Ac = 0{,}4432\ R$ und $Ae = 0{,}1168\ R$

somit $Ac > Ae$.

Es muss also zwischen P_s und der neuen Lage des Augenpunktes, für welche $MO = 2R$ ist, ein Punkt liegen, von welchem aus die Bogen AC und AE gleich gross erscheinen, d. h. für den $Ac = Ae$ ist. Um seine Distanz D vom Centrum der Kugel zu berechnen, setze man die Werthe für Ac und Ae (Glch. 3 und 4) einander gleich.

$$\text{Es ist}\quad 1 - \frac{D\,Cos\,\varphi}{D + R\,Sin\,\varphi} = \frac{D\,Cos\,\varphi}{D - R\,Sin\,\varphi} - 1 \quad \text{oder}$$
$$2 = \frac{D\,Cos\,\varphi}{D - R\,Sin\,\varphi} + \frac{D\,Cos\,\varphi}{D + R\,Sin\,\varphi}$$
$$\text{oder}\quad 2 = \frac{D}{R} \cdot \frac{Cos\,\varphi}{\left(\frac{D}{R} - Sin\,\varphi\right)} + \frac{D}{R}\,\frac{Cos\,\varphi}{\left(\frac{D}{R} + Sin\,\varphi\right)}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{D}{R} = x$, so ist

$$2 = \frac{x\,Cos\,\varphi}{x - Sin\,\varphi} + \frac{x\,Cos\,\varphi}{x + Sin\,\varphi}$$
$$2\,(x^2 - Sin^2\,\varphi) = x\,Cos\,\varphi\,(x + Sin\,\varphi + x - Sin\,\varphi)$$
$$2\,(x^2 - Sin^2\,\varphi) = 2\,x^2\,Cos\,\varphi$$
$$x^2\,(1 - Cos\,\varphi) = Sin^2\,\varphi$$
$$x = \frac{Sin\,\varphi}{\sqrt{1 - Cos\,\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - Cos^2\,\varphi}}{\sqrt{1 - Cos\,\varphi}}$$
$$x = \frac{D}{R} = \sqrt{1 + Cos\,\varphi} \quad \text{somit}$$
$$\text{(XVI)}\quad D = R\,\sqrt{1 + Cos\,\varphi} = R\,Cos\,\frac{\varphi}{2}\,\sqrt{2}$$

für $\varphi = 42^0$ ist $D = 1{,}3203\ R$

Setzt man $R = 1$ so ist $D = 1{,}3203$ und es ergeben sich die Radien sämmtlicher Parallelkreise nach den Gleichungen XV. Man erhält folgende Werthe:

Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion	Poldistanz der Parallelkreise	Radius der Projektion
5°	0,04967	75°	0,8075
10°	0,09945	80°	0,8705
15°	0,14945	85°	0,9345
20°	0,19980	90°	1,0000
25°	0,25055	95°	1,0665
30°	0,30190	100°	1,1340
35°	0,35395	105°	1,2015
40°	0,40675	110°	1,2685
45°	0,46045	115°	1,3330
50°	0,51500	120°	1,3940
55°	0,57106	125°	1,4485
60°	0,62800	130°	1,4935
65°	0,6865	132°	1,5063
70°	0,7458		

Um die Projektion der Ekliptik und des Horizontes zu erhalten, welche sich bei dieser Annahme des Augenpunktes als Ellipsen projiciren, hat man die grosse und die kleine Axe dieser Ellipsen, sowie die Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Centrum der Karte zu berechnen.

In Fig. 13 ist A″B″ der Aequator, E″D″ die Ekliptik, welche mit ihm einen Winkel von $23\frac{1}{2}{}^0$ bildet, ferner H″G″ der Horizont, für welchen die Poldistanz $P_n''G'' = 48^0$ ist. Ekliptik und Horizont, welche beide grösste Kreise der Kugel sind, schneiden sich in dem Kugeldurchmesser PQ, welcher in der Bildebene liegt und daher seine eigene Projektion ist. Beide Ellipsen gehen durch die Punkte P′Q′ des Aequators (Fig. 14), die Ekliptik geht ausserdem durch die Punkte e′d′, und der Horizont durch die Punkte h′g′, welche aus Fig. 13 in die Fig. 14 projicirt werden.

Da E″D″ ein Durchmesser der Ekliptik ist, so muss auch seine perspectivische Projektion e′d′ ein Durchmesser der Ellipse e′f′d′i′ sein, dessen Grösse wie folgt erhalten wird:

Es ist $e'd' = e''d'' = e''M'' + M''d'' = D\,Tg\gamma + D\,.\,Tg\delta$ (Fig. 13)

wenn die Entfernung $M''O'' = D$ gesetzt wird. Oder

$$1)\quad e'd' = D\,(Tg\gamma + Tg\delta) = \frac{D \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)}{\operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\delta}$$

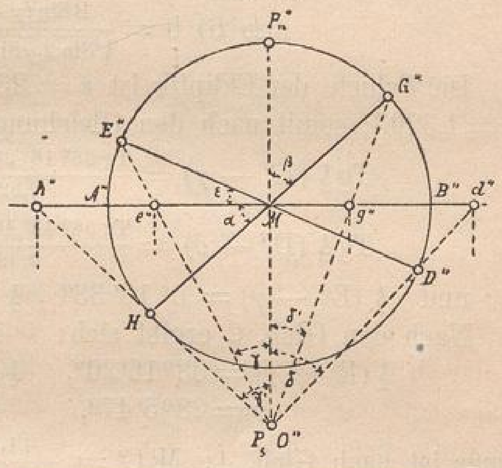
Sobald die Winkel γ und δ bekannt sind, kann auch $e'd'$ mit dieser Glch. berechnet werden. Betrachtet man die Dreiecke $O''M''E''$ und $O''M''D''$, so ist

$$2)\ \begin{cases} E'' + \gamma = 90^0 - \varepsilon \\ D'' + \delta = 90^0 + \varepsilon \end{cases}$$

ferner bestehen die Gleichungen:

$$3)\ \begin{cases} Tg\tfrac{1}{2}(E'' - \gamma) = \dfrac{Tg\tfrac{1}{2}(E'' + \gamma) \cdot (D - R)}{D + R} = \dfrac{Tg\tfrac{1}{2}(90^0 - \varepsilon)(D - R)}{D + R} \\ Tg\tfrac{1}{2}(D'' - \delta) = \dfrac{Tg\tfrac{1}{2}(D'' + \delta)(D - R)}{D + R} = \dfrac{Tg\tfrac{1}{2}(90^0 + \varepsilon)(D - R)}{D + R} \end{cases}$$

Fig. 13.



Mittelst den Gleichungen 2) und 3) berechnet man die Werthe von γ und δ, und setzt dieselben in Gleichung 1) ein, wodurch die eine Axe $e'd'$ der Ellipse erhalten wird. Die Entfernung $M'C'$ ihres Mittelpunktes C' vom Centrum der Karte wird auf folgende Weise berechnet. Es ist:

$$M'C' = M'd' - d'C'$$

$$= M''d'' - \frac{e''d''}{2}$$

$$= D\,Tg\,\delta - \frac{D\,Sin\,(\gamma + \delta)}{2\,Cos\,\gamma\,Cos\,\delta}$$

$$4)\ M'C' = x_1 = \frac{D\,Sin\,(\delta - \gamma)}{2\,Cos\,\gamma\,Cos\,\delta}$$

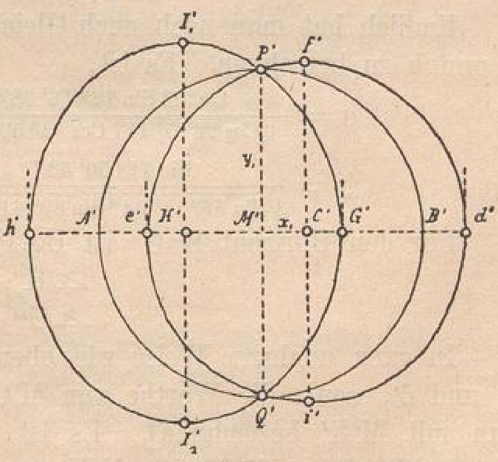


Fig. 14.

Dieser Werth ist die Abzisse x_1 des Punktes P' durch welchen die Ellipse gehen muss, in Bezug auf $C'd'$ als Abscissenaxe und $C'f'$ als Ordinatenaxe. Die Ordinate von P' ist $M'P' = y_1 = R$ und es ergibt sich die zweite Axe der Ellipse, wenn man in ihre Mittelpunktsgleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ für a, y und x die erhaltenen Werthe setzt, und alsdann b ermittelt. Es ist: $5)\ a = \frac{e'd'}{2} = \frac{D\,Sin\,(\gamma + \delta)}{2\,Cos\,\gamma\,Cos\,\delta}$

$$x = x_1 = \frac{D \operatorname{Sin}(\delta - \gamma)}{2 \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\delta}$$

$$y = y_1 = R, \qquad \text{somit}$$

$$\frac{D^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta)}{4 \operatorname{Cos}^2\gamma \operatorname{Cos}^2\delta} R^2 + b^2 \frac{D^2 \operatorname{Sin}^2(\delta - \gamma)}{4 \operatorname{Cos}^2\gamma \operatorname{Cos}^2\delta} = \frac{D^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta)}{4 \operatorname{Cos}^2\gamma \operatorname{Cos}^2\delta} b^2 \text{ und}$$

$$b^2 \left(\operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta) - \operatorname{Sin}^2(\delta - \gamma)\right) = R^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta)$$

oder $b^2 \left[\operatorname{Sin}(\gamma + \delta) + \operatorname{Sin}(\delta - \gamma)\right] \cdot \left[\operatorname{Sin}(\gamma + \delta) - \operatorname{Sin}(\delta - \gamma)\right]$

$$= R^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta)$$

Durch gehörige Entwicklung und Reduktion ergibt sich:

$$b^2 \operatorname{Sin} 2\gamma \operatorname{Sin} 2\delta = R^2 \operatorname{Sin}^2(\gamma + \delta)$$

$$\text{also 6) } b = \frac{R \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)}{\sqrt{\operatorname{Sin} 2\gamma \operatorname{Sin} 2\delta}}$$

Die Schiefe der Ekliptik ist $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 20''$, ferner ist für $R = 1$ $D = 1{,}3203$; somit nach den Gleichungen 3:

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (E'' - \gamma) = \frac{\operatorname{Tg} 33^0\, 16'\, 20'' \,.\, 0{,}3203}{2{,}3203}$$

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (D'' - \delta) = \frac{\operatorname{Tg} 56^0\, 43'\, 40'' \,.\, 0{,}3203}{2{,}3203}$$

und $\frac{1}{2}(E'' - \gamma) = 5^0\, 10'\, 33''$, $\frac{1}{2}(D'' - \delta) = 11^0\, 52'\, 49''$

Nach den Glch. 2 ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}(E'' + \gamma) = 33^0 16' 20'', \qquad \tfrac{1}{2}(D'' + \delta) = 56^0 43' 40''$$

$$\gamma = 28^0 5' 47'', \qquad \delta = 44^0 50' 51''$$

ferner ist nach Glch. 4: $M'C' = \dfrac{1{,}3203 \,.\, \operatorname{Sin} 16^0\, 45'\, 04''}{2 \operatorname{Cos} 28^0\, 5'\, 47'' \operatorname{Cos} 44^0\, 50'\, 51''}$

$$M'C' = 0{,}30421.$$

Endlich hat man noch nach Gleichung 5) und 6) die Werthe von a und b zu berechnen. Es ist:

$$a = \frac{1{,}3203 \operatorname{Sin} 72^0\, 56'\, 38''}{2 \operatorname{Cos} 28^0\, 5'\, 47'' \operatorname{Cos} 44^0\, 50'\, 51''} = 1{,}00908$$

$$b = \frac{\operatorname{Sin} 72^0\, 56'\, 38''}{\sqrt{\operatorname{Sin} 56^0\, 11'\, 34'' \operatorname{Sin} 89^0\, 41'\, 42''}} = 1{,}04880$$

Für den Horizont $H''G''$ ist $\text{Bg}.P_n''G'' = \beta = 48^0$

$$\measuredangle H'' + \gamma' = 180^0 - \beta = 132^0$$

$$\measuredangle G'' + \delta' = \beta = 48^0.$$

In ganz analoger Weise wie oben ergeben sich die Werthe von γ' und δ', sowie die Werthe von $M'C'$, a' und b' [$M'C'$ wollen wir nun mit $M'K'$ bezeichnen]. Es ist (siehe Fig. 13 und 14) $\gamma' = 48^0 46' 26''$, $\delta' = 20^0\, 28'\, 59''$, $M'K' = -0{,}50679$, $a' = 1$, $b' = 1{,}1600$.