Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Ableitung der Fundamentalformeln für die stereographische Horizontalprojektion

Meridian mit dem Hauptmeridiane der Karte bildet, so trage man diesen Winkel im Punkte p_n' an $L'p_n'$ an, $p_n'r'$ ist dann eine Tangente an den gesuchten Kreis, dessen Mittelpunkt h' erhalten wird, wenn man $p_n'h'$ senkrecht auf $p_n'r'$ zieht und sie mit der Geraden $g'h'$ zum Schnitt bringt. Will man die Meridiane von 10^0 zu 10^0 oder von 15^0 zu 15^0 zeichnen, so beschreibt man am einfachsten aus dem Punkte p_n' mit beliebigem Halbmesser (in Fig. 16 wurde er gleich $p_n'g'$ angenommen) einen Kreis, errichtet in p_n' eine Senkrechte auf $p_n'g'$ und theilt den Quadranten $g'0$ vom Punkte 0 aus in 9 resp. in 6 gleiche Theile, verbindet die Theilpunkte mit dem Punkte p_n', welche Linien die Senkrechte $g'h'$ in den gesuchten Mittelpunkten der Meridiane schneiden. In Fig. 16 bildet der gezeichnete Meridian mit dem Hauptmeridiane einen Winkel von 45^0. Sämmtliche Meridiane besitzen zum Hauptmeridiane je zwei und zwei eine symetrische Lage, wesshalb ihre Mittelpunkte gleichweit von g' entfernt sind. Derjenige Meridian, dessen Ebene auf dem Hauptmeridiane senkrecht steht, schneidet die Bildebene in der Geraden $E'F'$ durch deren Endpunkte das Bild dieses Meridianes hindurchgehen muss, der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in g'.

Ableitung der Fundamentalformeln für die stereographische Horizontalprojection.

Da bei der construktiven Ausführung eines Kartennetzes immer unvermeidliche Constructionsfehler gemacht werden, so ist es zweckmässig auch für diesen Fall die Fundamentalformeln abzuleiten, nach welchen sowohl die Parallelkreise als auch die Meridiane unmittelbar berechnet und alsdann gezeichnet werden können.

Fundamentalformeln für die Parallelkreise. Für diese bleiben die Formeln I, II, III (Seite 17) vollständig unverändert und ist in denselben $\delta = P_n''Q''$ (Fig 15) d. h. gleich der Poldistanz des Ortes Q zu setzen, welcher den Mittelpunkt der Karte einnimmt während ϱ die Poldistanz der Parallelkreise ist. Da $\varrho = 90^0 - \varphi$, wenn φ dieBreite der Parallelkreise bezeichnet, so können die Formeln auch noch folgendermassen geschrieben werden:

$$\text{(XVII)}\quad e' = R \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (\delta + 90^0 - \varphi) \qquad e = R \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (\delta + \varphi - 90^0)$$

$$\text{(XVIII)}\quad d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{2 \operatorname{Cos} \frac{\delta + 90^0 - \varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta + \varphi - 90^0}{2}} = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Sin} \varphi}$$

(XIX) $r = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi}{2 \operatorname{Cos} \frac{\delta + 90^0 - \varphi}{2} \operatorname{Cos} \frac{\delta + \varphi - 90^0}{2}} = \frac{R \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} \delta + \operatorname{Sin} \varphi}$

für den Aequator ist $\varphi = 0$ also

(XVIIa) $e' = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta + 90^0)$ und $e = R \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\delta - 90^0)$

(XVIIIa) $d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos} \delta} = R \operatorname{Tg} \delta$

(XIXa) $r = \frac{R}{\operatorname{Cos} \delta}$

Will man in eine Weltkarte den Polarkreis und den einen Wendekreis einzeichnen, so setze man in den Formeln (XVII) (XVIII) (XIX) $\varrho = 23^0 27' 20''$ und $\varrho = 66^0 32' 40''$, wodurch man die entsprechenden Werthe von e' e d r erhält.

Für die südlichen Parallelkreise, welche grössere Radien als der Aequator besitzen, ist es zweckmässig ausser dem Punkte c (Fig. 17), welchen man durch Berechnung der Distanz Mc erhält, noch die Schnittpunkte g und h des Parallelkreises mit dem Grenzkreise der Karte zu bestimmen. Diess geschieht am einfachsten durch Berechnung der Coordinaten MF und $Fh = Fg$ der Punkte h und g oder durch Bestimmung des Winkelwerthes $LMh = \alpha$. Aus dem bei E rechtwinkligen Dreieck FEM folgt:

$FM = x = \frac{ME}{\operatorname{Cos} (90^0 - \delta)} = \frac{ME}{\operatorname{Sin} \delta}$, wenn δ die Poldistanz des Ortes Q bedeutet, oder da $ME = R \operatorname{Sin} \varphi$

(XX) $x = \frac{R \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} \delta}$ ($\varphi =$ der südl. Breite des Parallelkreises).

Zur Berechnung von y wendet man die Mittelpunktsgleichung des Kreises $AP_n BP_s$ an. Es ist

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Sin}^2 \delta}}$$

(XXI) $y = \frac{R}{\operatorname{Sin} \delta} \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \delta - \operatorname{Sin}^2 \varphi}$

Endlich ergibt sich der Winkel $LMh = \alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}^2 \delta - \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

(XXII) $\operatorname{Tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Sin} \varphi}\right)^2 - 1}$

Fundamentalformeln für die Meridiane. Zunächst ergeben sich die Entfernungen $M'' p_n''$, $M'' p_s''$ der Pole vom Mittelpunkte der Karte direkt aus Fig. 15 (Seite 41). Es ist $P_n'' Q'' = \delta =$ der Poldistanz des Ortes Q, und daher:

$$\text{(XXIII)} \begin{cases} M'' p_n'' = O'' M''.\ \mathrm{Tg}\,\frac{\delta}{2} = \mathrm{R}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\delta}{2} \\ M'' p_s'' = O'' M''.\ \mathrm{Tg}\left(90^0 - \frac{\delta}{2}\right) = \mathrm{R}\,\mathrm{Cotg}\,\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Die Distanz der Pole $pn'' ps'' = \mathrm{R}\left(\mathrm{Tg}\frac{\delta}{2} + \mathrm{Cotg}\frac{\delta}{2}\right)$

$$p_n''\, p_s'' = \frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{Sin}^2\frac{\delta}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{\delta}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\frac{\delta}{2}\ \mathrm{Cos}\frac{\delta}{2}}$$

$p_n''\, p_s'' = \frac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{Sin}\,\delta}$; also die Entfernung des Fusspunktes g′ der Senkrechten, (Fig. 16) auf welcher die Mittelpunkte der Meridiane liegen, vom Pole p_n:

$p_n' g' = \frac{p_n'' p_s''}{2} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Sin}\,\delta}$ und die Entfernung dieser Geraden vom Mittelpunkte der Karte:

$$M' g' = p_n' g' - p_n' M' = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Sin}\,\delta} - \mathrm{R}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\delta}{2}$$

$$M' g' = \mathrm{R}\left(\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\delta} - \frac{\mathrm{Sin}\frac{\delta}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{\delta}{2}}\right)$$

$$M' g' = \frac{\mathrm{R}\left(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\delta}{2}\right)}{2\,\mathrm{Sin}\frac{\delta}{2}\ \mathrm{Cos}\frac{\delta}{2}}$$

$$\text{(XXIV)}\ M' g' = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,\delta} = \mathrm{R}\,\mathrm{Cotg}\,\delta$$

Um die Entfernung g′h′ des Mittelpunktes irgend eines Meridianes, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ einschliesst, vom Fusspunkte g′ der Senkrechten g′h′, sowie den Radius $h' p_n' = r$ des Meridianes zu berechnen, betrachte man das rechtwinklige Dreieck $h' g' p_n$ in welchem $\sphericalangle\, g' p_n' h' = 90^0 - \lambda$ ist. Es ist

$$g' h' = p_n' g'.\ \mathrm{Tg}\,(90^0 - \lambda)$$

$$\text{(XXV)}\ g' h' = y = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{Cotg}\,\lambda}{\mathrm{Sin}\,\delta}$$

Ferner ergibt sich $h' p_n' = r = \frac{p_n' g'}{\mathrm{Cos}\,(90^0 - \lambda)}$

$$\text{(XXVI)}\ r = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Sin}\,\lambda}$$

Die Distanz g′h′ ist vom Punkte g′ aus nach oben und unten aufzutragen und können mit demselben Halbmesser gleichzeitig zwei Meridiane beschrieben werden. Aus Fig. 16 lässt sich ferner der Winkel

β berechnen, welchen die zur Bestimmung des Mittelpunktes h′ dienende Gerade h′M′ mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist

$$\mathrm{Cotg}\,\beta = \frac{M'g'}{g'h'} = \frac{R.\,\mathrm{Cotg}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\delta}{R\,\mathrm{Cotg}\,\lambda}$$

$$\text{(XXVII)}\quad \mathrm{Cotg}\,\beta = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Tg}\,\lambda$$

Man kann den Werth von r auch mittelst der Fundamentalformel IIIa (Seite 17) erhalten, wenn man in diese die entsprechenden Werthe von δ und ϱ einsetzt. In Fig. 18 ist $P_n C P_s$ ein beliebiger Meridian, welcher mit dem Hauptmeridiane den Winkel λ bildet. AB der Aequator und R der Pol des Meridianes, für welchen QR $= \triangle$ die Entfernung vom Gegenpunkte Q des Auges ist. Diess ist aber der für δ in Gleichung IIIa zu substituirende Werth. Es ergibt sich aus dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck AQR, dessen Katheten $AQ = \varphi = 90^0 - \delta$ und $AR = AC + CR = \lambda + 90^0$ gegeben sind.

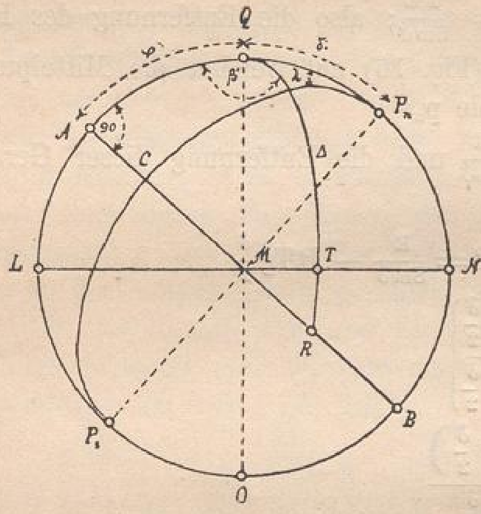


Fig. 18.

(AR kann auch $= \lambda - 90^0$ sein.) Es ist

$$\mathrm{Cos}\,\triangle = \mathrm{Cos}\,(90^0 - \delta)\,\mathrm{Cos}\,(90^0 + \lambda)$$

$$\mathrm{Cos}\,\triangle = -\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\lambda$$ Im vorliegenden Falle ist $\triangle$ ein stumpfer Winkel, also allgemein:

$$\text{(XXVIII)}\quad \mathrm{Cos}\,\triangle = \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\lambda$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung IIIa und beachtet man gleichzeitig, dass für jeden Meridian der Bogenhalbmesser $\varrho = 90^0$ ist, so ergibt sich: $r = \frac{R\,\mathrm{Sin}\,90^0}{\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\lambda + \mathrm{Cos}\,90^0} = \frac{R}{\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\lambda}$ (wie oben.)

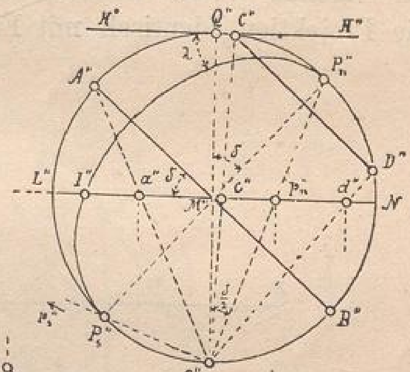
Aus demselben Dreieck AQR (Fig. 18) kann man auch die Gleichung XXVII erhalten, durch welche sich der Winkel β ergibt, dessen Maass das Supplement des Bogens LT des Grenzkreises der Karte ist; die horizontale Projektion L′T′ dieses Supplementes (Fig. 16) bestimmt die Richtung der Geraden M′h′. Aus Fig. 18 folgt:

$$\text{Tg AR} = \text{Sin}\varphi \,.\, \text{Tg}\beta'$$
$$\text{Tg}\,(90^0 + \lambda) = \text{Cos}\,\delta\;\text{Tg}\beta'$$
$$\text{Tg}\beta' = -\frac{\text{Cotg}\,\lambda}{\text{Cos}\,\delta}$$
$$\frac{1}{\text{Cotg}\,\beta'} = -\frac{1}{\text{Tg}\,\lambda\;\text{Cos}\,\delta}$$
$$\text{Cotg}\,\beta' = -\,\text{Tg}\lambda\,\text{Cos}\delta \text{ oder da } \beta = 180^0 - \beta'$$
$$\text{Cotg}\beta = -\;\text{Cotg}\beta' = \text{Tg}\lambda\,\text{Cos}\delta \quad \text{(wie oben).} —$$

Endlich ergibt sich nach Gleichung IIa (Seite 17) die Entfernung d des Centrums des Meridianes vom Mittelpunkte der Karte. Es ist

(XXIX) $d = \frac{\text{R Sin}\,\varDelta}{\text{Cos}\,\varDelta} = \text{R Tg}\,\varDelta$

Fig. 15.



Nach Gleichung XXVIII berechnet man die Winkelgrösse $\triangle$ und substituirt ihren Werth in Gleichung (XXIX) wodurch d erhalten wird. —

Wir haben noch den Fall zu erwähnen, in welchem der Mittelpunkt des Meridianes ausserhalb des Blattes fällt und der letztere durch drei Punkte zu bestimmen ist. Da die Ebene eines Meridianes durch die Erdaxe geht, so schneidet sie die Bildebene in einer Geraden J′K′, (Fig. 16) welche durch das Centrum der Karte geht und den Grenzkreis der Karte in den Punkten J′ und K′ trifft. Mittelst den Punkten J′p_n′K′ kann der Meridian gezeichnet werden und man hat daher nur den Winkel L′M′J′$=\alpha$ zu berechnen, welchen die Gerade J′K′ mit dem Hauptmeridiane bildet. Aus dem bei L″ rechtwinkligen sphärischen Dreieck P_n″L″J″ (Fig. 15), in welchem P_n″L″ $= 90^0 + \delta$ und $\measuredangle$ L″P_n″J″ $= \lambda$ ist, folgt

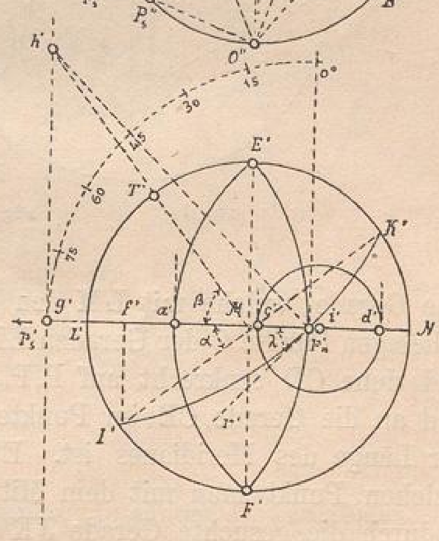


Fig. 16.

$$\text{Tg L''J''} = \text{Sin}\,P_n\text{''L''} \,.\, \text{Tg}\lambda \text{ oder da Bg L''J''} = \text{L'J'} = \alpha \text{ ist}$$
$$\text{Tg}\,\alpha = \text{Sin}\,(90^0 + \delta)\,\text{Tg}\lambda$$

(XXX) $\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Tg}\,\lambda$.

Die Abscisse $M'f'$ und Ordinate $f'J'$ des Punktes J' ergeben sich nach den Gleichungen (XXXI) $M'f' = x = R\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ und $f'J' = y = R\,\mathrm{Sin}\,\alpha$.

Wir werden später ein Verfahren kennen lernen, beliebige andere Punkte des Meridianes $J'p_n'K'$ als Durchschnittspunkte mit einem zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreise zu bestimmen, so dass der Meridian mit dem Peripheriezirkel auch dann gezogen werden kann, wenn der Durchmesser der Karte sehr gross ist.

Die Gerade JK (Fig. 16) kann gestützt auf Formel (XXX) auch auf folgende Weise construirt werden: Es sei Fig. 19 in Bezug auf die Projektion identisch mit Fig. 16, LN der Hauptmeridian, P_nP

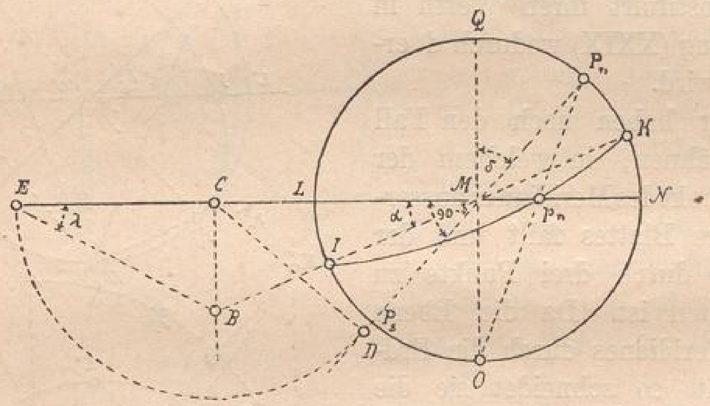


Fig 19.

eine Gerade, welche mit LM den Winkel $90^0 - \delta$ bildet. In einem beliebigen Punkte C der Geraden LM errichte man die Senkrechte CB und ziehe CD senkrecht auf P_nP_s, trage die Distanz CD nach CE, und an die Gerade CE im Punkte E den Winkel λ, welcher gleich der Länge des Meridianes ist. EB und CB schneiden sich in B, welchen Punkt man mit dem Mittelpunkte M der Karte verbindet, wodurch die gesuchte Gerade JK erhalten wird, denn es ist:

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{CB}{CM} = \frac{EC\,\mathrm{Tg}\,\lambda}{CM} = \frac{CD\,\mathrm{Tg}\,\lambda}{CM}$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,(90^0 - \delta)\,\mathrm{Tg}\,\lambda$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Tg}\,\lambda \quad \text{(wie oben.)}$$

Um das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, von welchem $\delta\ \gamma\ \vartheta$ und ϱ (Fig. 7), gegeben ist, wendet man unmittelbar die

Formeln V, VI, VII (Seite 19) an, mit welchen die Werthe von ω und ε berechnet werden. Dadurch ergibt sich die Richtung der Geraden MG (Fig. 7), auf welcher der Mittelpunkt m des gesuchten Kreises liegt. Man berechnet nun die Werthe von e, d und r nach den Gleichungen I, II, III, (Seite 17) und kann alsdann den Kreis construiren.

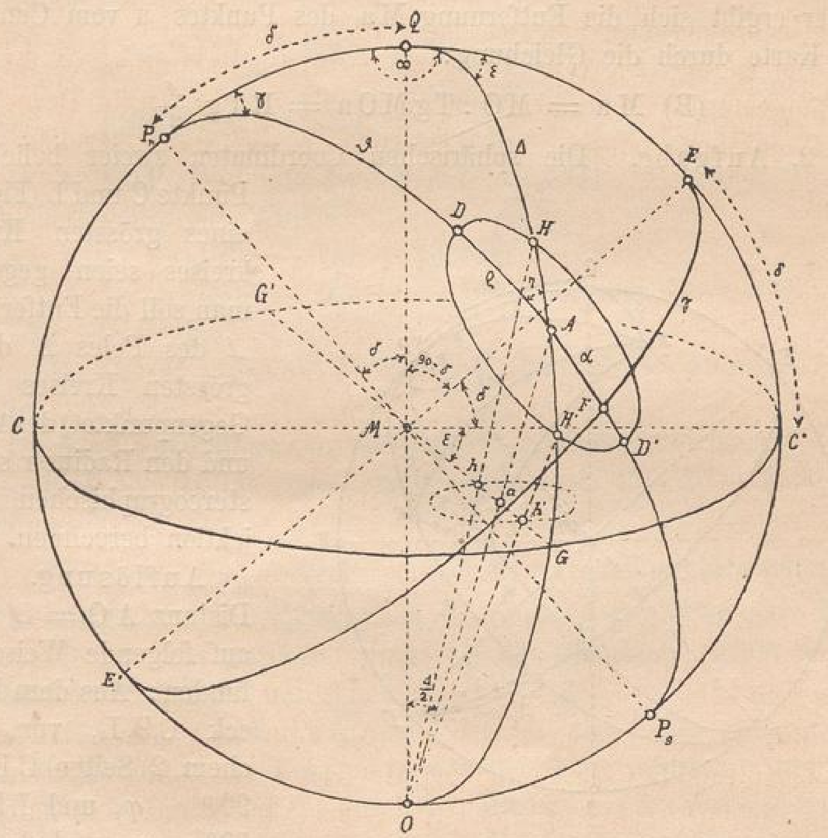


Fig. 7.

Hierher gehören auch die Lösungen folgender 3 Aufgaben:

1. Aufgabe. Gegeben sind die sphärischen Coordinaten eines Punktes A (Fig. 7), der Kugel, als welche wir EF $= \gamma$ und AF $= \alpha$ annehmen wollen, [$\gamma =$ dem Winkel, welchen der Meridian des Punktes A mit dem Hauptmeridiane einschliesst, $\alpha =$ der geog. Breite des Ortes A] man soll die stereographische Projektion a des Punktes A bestimmen.

Auflösung. Zunächst ergibt sich $P_n A = \vartheta = 90^0 - \alpha$ und man erhält mittelst den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Werthe von ω und ε. Durch den Winkel ε ist die Richtung MG der Geraden bestimmt, auf welcher die Projektion a des Punktes liegt. Mittelst des Sinussatzes wird nun die Entfernung Δ des Punktes A vom Gegenpunkte Q des Auges berechnet, es ist:

$$\text{(A)}\ \operatorname{Sin} \Delta = \frac{\operatorname{Sin} \vartheta \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \omega}$$

ferner ergibt sich die Entfernung Ma des Punktes a vom Centrum der Karte durch die Gleichung:

$$\text{(B)}\ \mathrm{Ma} = \mathrm{MO} \,.\, \operatorname{Tg} \mathrm{MOa} = \mathrm{R} \operatorname{Tg} \frac{\Delta}{2}$$

2. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten zweier beliebiger Punkte C und L (Fig. 37) eines grössten Kugelkreises seien gegeben, man soll die Entfernung Δ des Poles A dieses grössten Kreises vom Gegenpunkte Q des Auges und den Radius r seiner stereographischen Projektion berechnen. —

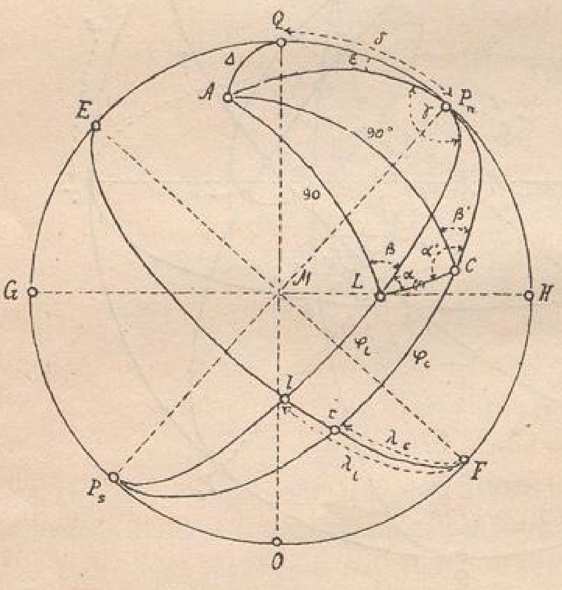


Fig. 37.

Auflösung. Die Distanz $AQ = \Delta$ wird auf folgende Weise gefunden: Aus dem Dreieck CP_nL, von welchem 2 Seiten $CP_n = 90^0 - \varphi_c$ und $LP_n = 90^0 - \varphi_l$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel CP_nL gegeben ist, erhält man mittelst den Neperschen Analogien die Winkel α und α'.

$$\text{(C)} \begin{cases} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha) = \dfrac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\mathrm{Pn\,L} - \mathrm{Pn\,C})}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\mathrm{Pn\,L} + \mathrm{Pn\,C})} \operatorname{Cotg} . \dfrac{\mathrm{C\,Pn\,L}}{2} \\[2ex] \operatorname{Tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) = \dfrac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\mathrm{Pn\,L} - \mathrm{Pn\,C})}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\mathrm{Pn\,L} + \mathrm{Pn\,C})} \operatorname{Cotg} \dfrac{\mathrm{C\,Pn\,L}}{2} \end{cases}$$

Durch diese sind auch die Winkel β und β' bekannt.

$$\text{D)}\ \beta = 90^0 - \alpha;\ \beta' = \alpha' - 90^0$$

und man kann aus $\triangle$ AP_nL oder aus $\triangle$ AP_nC, in welchen zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Seite AP_n berechnen. Durch Anwendung des Cosinussatzes auf diese beiden Dreiecke, in welchen AL = AC = 90° ist, ergeben sich die Gleichungen:

$$(E) \begin{cases} \operatorname{Cos} AP_n = \operatorname{Sin} LP_n \operatorname{Cos}\beta \\ \operatorname{Cos} AP_n = \operatorname{Sin} CP_n \operatorname{Cos}\beta' \end{cases}$$

ferner ist:

$$(F) \begin{cases} \operatorname{Sin} AP_nL = \operatorname{Sin}\gamma = \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin} AL}{\operatorname{Sin} AP_n} = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin} AP_n} \\ \operatorname{Sin} AP_nC = \operatorname{Sin}\gamma' = \frac{\operatorname{Sin}\beta'}{\operatorname{Sin} AP_n} \end{cases}$$

In $\triangle$ AQP_n sind nun zwei Seiten AP_n, QP_n = δ und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$(G) \begin{cases} \varepsilon = 180^0 - (\lambda_1 + \gamma) \text{ oder} \\ \varepsilon = 180^0 - (\lambda_c + \gamma') \text{ bekannt, und kann } AQ = \varDelta \end{cases}$$

nach der Gleichung:

$$(H) \operatorname{Cos} \varDelta = \operatorname{Cos} AP_n \operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Sin} AP_n \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\varepsilon$$

erhalten werden.

Da der Bogenhalbmesser eines grössten Kreises der Kugel = 90° ist, so wird der Radius seiner stereographischen Projektion nach der Gleichung:

$$(J) \quad r = \frac{R}{\operatorname{Cos} \varDelta}$$ berechnet, in welche Gleichung IIIa übergeht.

3. Aufgabe. Die sphärischen Coordinaten der Eckpunkte eines Kugeldreieckes sind gegeben, man soll die Oberfläche seiner stereographischen Projektion berechnen.

Auflösung. Nach Aufgabe 1 werden zuerst die stereographischen Projektionen der Eckpunkte des Dreieckes bestimmt und ihre Coordinaten in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Karte gehendes rechtwinkliges Axensystem ermittelt (die Ordinatenaxe lässt man mit dem Hauptmeridiane zusammenfallen). Mit den letzteren können die Sehnenlängen der stereographischen Projektionen der Kreisbogen, sowie die Oberfläche des Sehnendreieckes berechnet werden. Ferner ergeben sich nach Aufgabe 2 die Radien der stereographischen Kreisbogen, durch diese und die Sehnenlängen sind auch die Centriwinkel der 3 Kreissectoren bestimmt, deren Oberfläche nun berechnet werden kann. Zieht man von den Sectoren die drei Mittelpunktsdreiecke ab, so ergeben sich die Oberflächen der Kreisabschnitte, die zu dem Sehnendreieck zu adiren sind. Es wird dadurch die Gesammtoberfläche der stereographischen Projektion des sphärischen Dreieckes erhalten. —

Für das sphärische Dreieck Lissabon-Constantinopel-Petersburg wurden folgende Dreiecksseiten gefunden:

$$LC = p = 29^0\,7'\,33'',\ LP = c = 32^0\,32'\,8'',\ CP = l = 18^0\,57'\,18''$$

Nach den Gleichungen C bis J der vorigen Aufgabe ergeben sich die Radien ihrer stereographischen Projektionen wie folgt:

$$r_p = 3{,}157167 = 5318{,}33 \text{ g. Meilen};\ r_c = 2{,}358500 = 3972{,}96 \text{ g. M.}$$
$$r_l = 11{,}98233 = 20184{,}57 \text{ g. M.}$$

Ferner erhält man folgende den Sehnen lc, lp, cp entsprechende Centriwinkel:

$$\nu_p = 4^0\,42'\,12'',\ \nu_c = 7^0\,0'\,2'',\ \nu_l = 0^0\,47'\,40''$$

Die Oberfläche des Sehnendreieckes ist:

$$F = \sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2} - p\right)\left(\frac{S}{2} - c\right)\left(\frac{S}{2} - l\right)} = 60485{,}88 \square \text{ M.}$$

die Oberflächen der 3 Kreisabschnitte sind: $A_p = 1352{,}30$

$A_c = 2415{,}70$

$A_l = 639{,}00$

Also der Inhalt der stereogr. Projektion

des sphärischen Dreieckes $O = 64892{,}88$

Nach der Formel von L'Huillier ergibt sich der sphärische Excess ε des Kugeldreieckes:

$$\operatorname{Tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{Tg}\frac{S}{4}\operatorname{Tg}\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2} - p\right)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2} - c\right)\operatorname{Tg}\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2} - l\right)},$$

in dieser ist $S = p + c + l$ = der Summe der Seiten des sphärischen Dreieckes. Man erhält

$\varepsilon = 4^0\,54'\,56'' = 17696''$ und somit die Oberfläche des sphärischen Dreieckes

$$O' = \frac{R^2 \pi \varepsilon}{180} = \frac{859{,}4372^2 \,.\, 3{,}14159 \,.\, 17696}{648000} = 63369{,}13 \text{ geogr. Q.-Meilen.}$$

Die stereographische Projektion ist daher um 1523,75 Q.-Meilen oder um 2,4 % grösser als die Oberfläche des sphärischen Dreieckes. (Für den ganzen Kugelabschnitt beträgt die Flächendifferenz 2 %).*)

Vor Kurzem wurden vom Verfasser dieses Buches vier transparente Sternkarten von einem Meter Durchmesser veröffentlicht, die unter dem Titel „Ansichten des Sternhimmels" erschienen sind, bei welchen die stereographische Horizontalprojektion zur An-

*) Der Radius der stereog. Projektion desjenigen Kugelkreises, welcher den Kugelabschnitt begrenzt auf dem sich Europa befindet und der daher Grenzkreis der Karte ist, wurde gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieser Kreises angenommen.

wendung kam. Die Karten stellen die Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Wintergestirne dar, wie sie von einem Bewohner des mittleren Europa gesehen werden. Bei ihrer Construction wurde als Bildebene der Horizont eines Bewohners des 48. Parallelkreises angenommen und um die Sterne genau eintragen zu können die Parallelkreise und Meridiane von Grad zu Grad gezogen. Für die nördlichen Parallelkreise wurden nach den Gleichungen I, IIa, IIIa, die Werthe von e d und r berechnet, für die südlichen Parallelkreise nach den Gleichungen (XX) und (XXII) die Werthe x und α, für die Meridiane nach Gleichung (XXIV) die Distanz M'g'; für die Meridiane, bei welchen $\lambda \begin{smallmatrix} > 0^0 \\ < 56^0 \end{smallmatrix}$ ist nach den Gleichungen (XXX) und (XXXI) die Werthe von α und x und endlich für die Meridiane, bei welchen $\lambda > 50^0$ ist nach den Gleichungen (XXV) und (XXVI) die Werthe von $g'h' = y$ und r.

Da das auf solche Weise erhaltene Kartennetz auch zur Construktion einer Karte des mittleren Europa verwendet werden kann, so seien die zu seiner Construktion dienenden Zahlenwerthe in nachfolgender Tabelle angegeben.

Für $R = 0{,}5$ (Radius der Kugel) und $\delta = 42^0$ ergaben sich folgende Werthe:

Tabelle zur Construktion einer Karte des mittleren Europa nach der stereog. Horizontalprojektion.

Parallelkreise.

ϱ	$e = R \,.\, Tg \frac{1}{2}(\delta - \varrho)$ für $\varrho < \delta$	$d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Cos}\varrho}$	$r = \frac{R \operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Cos}\varrho}$	ϱ	$e = R \,.\, Tg \frac{1}{2}(\varrho - \delta)$ für $\varrho > \delta$	$d = \frac{R \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Cos}\varrho}$	$r = \frac{R \operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Cos}\varrho}$
0°	0,1919	0,1919	0,0000	60°	—0,0792	0,2691	0,3483
5	0,1673	0,1922	0,0250	65	—0,1017	0,2870	0,3887
10	0,1434	0,1933	0,0502	70	—0,1247	0,3083	0,4330
15	0,1200	0,1953	0,0755	75	—0,1481	0,3339	0,4820
20	0,0972	0,1988	0,1016	80	—0,1722	0,3649	0,5371
25	0,0747	0,2028	0,1281	85	—0,1969	0,4030	0,5999
30	0,0526	0,2079	0,1554	90	—0,2226	0,4502	0,6728
35	0,0306	0,2142	0,1836	95	—0,2493	0,5100	0,7593
40	0,0087	0,2217	0,2130	100	—0,2771	0,5875	0,8646
45	—0,0131	0,2307	0,2438	105	—0,3064	0,6908	0,9972
50	—0,0350	0,2414	0,2764	110	—0,3372	0,8341	1,1713
55	—0,0570	0,2541	0,3111				