Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Stereographische Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes, wenn die Bildebene mit der Ebene seines Grenzkreises parallel angenommen wird

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

für die Sommergestirne der 270te, für die Herbstgestirne der 360te und für die Wintergestirne der 90te Declinationskreis Hauptmeridian des Beobachters und sind daher in die genannten Gleichungen für $\delta\ \gamma\ \vartheta\ \varrho$ (Fig. 7) folgende Werthe zu substituiren:

für die Frühlingsgestirne : $\delta = 42^0$, $\gamma = 90^0$, $\vartheta = 23^0 27' 20''$, $\varrho = 90^0$
„ „ Sommergestirne : „ „ $\gamma = 0^0$ „ „ „ „ „
„ „ Herbstgestirne : „ „ $\gamma = 270^0$ „ „ „ „ „
„ „ Wintergestirne : „ „ $\gamma = 180^0$ „ „ „ „ „

Da R = 0,5 Meter angenommen wurde, so ergaben sich für ε e d und r folgende Werthe:

γ	ε	e	d	r
90^0	$147^0 2' 20''$	0,1968	0,5366	0,7334
0^0	0^0	0,3597	0,1677	0,5274
270^0	$212^0 57' 40''$	0,1968	0,5366	0,7334
180	0^0	0,1088	1,0949	1,2037

Stereographische Projektion eines gegebenen Kugelabschnittes wenn die Bildebene mit der Ebene seines Grenzkreises parallel angenommen wird.

Um einen beliebigen Erdtheil z. B. Europa, Afrika etc. oder ein beliebiges Land wie Frankreich, Deutschland, die Schweiz etc. nach der stereographischen Projektionsmethode darzustellen, denke man sich den betreffenden Erdtheil von einem kleinen Kugelkreise umschlossen, und verbinde den Pol dieses Kreises, welcher gleichzeitig Mittelpunkt des Landes ist mit dem Centrum der Kugel. Der so erhaltene Durchmesser wird als Augenaxe und sein Endpunkt als Augenpunkt der Projektion angenommen. In Fig. 20 ist Q'' der Mittelpunkt des Landes, das von dem Kugelkreise $D_1'' D_2''$ umschlossen wird; $C_1'' C_2''$ die Bildebene, welche mit der Ebene des Kreises $D_1'' D_2''$ parallel ist und $O'' Q''$ die Augenaxe, ferner $Q'' P_n'' O'' P_s''$ der durch die Augenaxe und die Erdaxe gehende grösste Kreis, dessen stereographische Projektion die Gerade $C_1 C_2$ ist, die wir den Hauptmeridian der Projektion genannt haben.

Um alsdann das Bild irgend eines Kugelkreises zu erhalten, muss

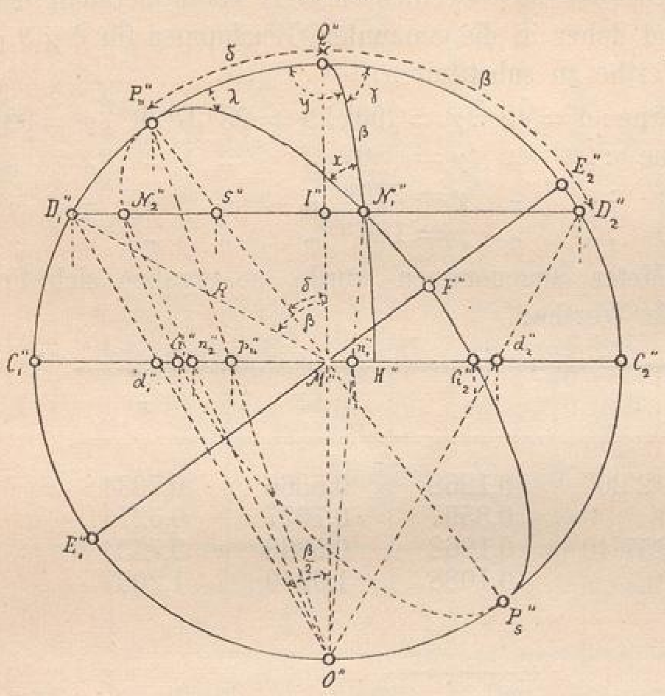


Fig. 20.

vor allem die Distanz $P_n'' Q''$ $= \delta$ des Erdpoles vom Gegenpunkte des Auges und der Bogenhalbmesser $D_1'' Q''$ $= \beta$ des Grenzkreises der Karte gegeben sein. Ferner für einen Meridian der Winkel λ, welchen seine Ebene mit der Ebene des Hauptmeridianes bildet, für einen Parallelkreis der Bogenhalbmesser ϱ, mit welchem man sich denselben vom Nordpol P_n der Kugel beschrieben denken kann und für einen beliebigen Kugelkreis endlich die aus Fig. 7 (Seite 18) ersichtlichen Elemente δ γ ϑ und ϱ.

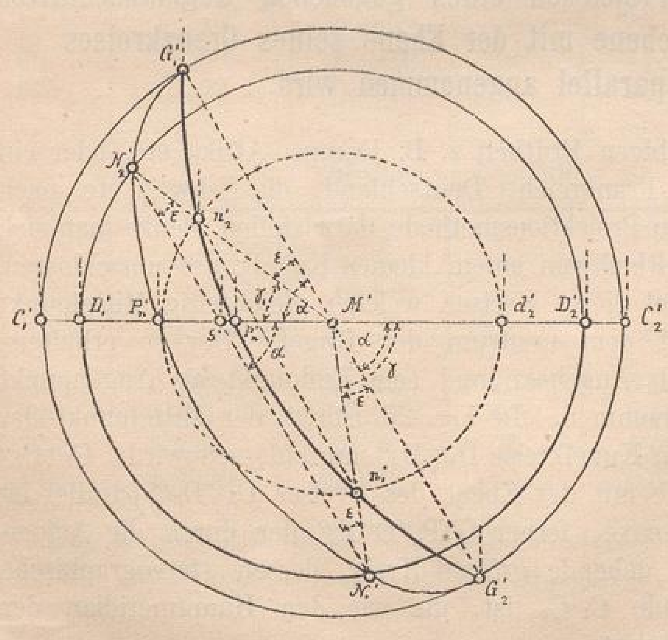


Fig. 21.

Um einen Meridian $G_1'' P_n G_2'' P_s''$ (Fig. 20) zu projiciren, berechne man zunächst den Radius der Basis

---

Bemerkung. In Fig. 21 ist bei P_n' der Buchstabe d_1' als Endpunkt des Durchmessers $d_1' d_2'$ zu setzen.

des Kugelabschnittes $D_1''Q''D_2''$. Es ergibt sich aus dem Dreiecke $D_1''I''M''$:

$D_1''I'' = R \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta$ (XXXII) (R = dem Radius der Kugel), ferner erhält man aus dem Dreiecke $d_1''M''O''$ den Radius der stereographischen Projektion dieses Kreises, welcher der Grenzkreis $d_1\,d_2$ der Karte ist.

$$d_1''M'' = R\,\mathrm{Tg}\,\frac{\beta}{2} \quad \text{(XXXIII)}.$$

Die Ebene des Meridianes $P_n''G_2''P_s''G_1''$ schneidet nun die parallelen Ebenen $D_1''D_2''$ und $C_1''C_2''$ in den parallelen Geraden ($N_1''N_2''$, $N_1'N_2'$) und ($G_1''G_2''$, $G_1'G_2'$), von welchen die letztere in der Bildebene liegt, also gleichzeitig ihre stereographische Projektion ist. Mit ihr ist auch die Gerade ($n_1''n_2''$, $n_1'n_2'$) parallel, welche die stereographische Projektion von $N_1\,N_2$ ist, denn die Ebene $O\,N_1\,N_2$ schneidet auch die parallelen Ebenen $D_1\,D_2$ und $C_1\,C_2$ in parallelen Linien.

Vor Allem kann man nun mit Gleichung XXX (Seite 42) den Winkel α berechnen, welchen die Gerade $G_1'G_2'$ (Fig. 21) mit dem Hauptmeridiane bildet. Es ist:

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Tg}\,\lambda \quad \text{(XXX)}.$$

Da die Ebene des zu projicirenden Meridianes durch die Erdaxe $P_n\,P_s$ geht, so muss ihr Durchschnitt $N_1\,N_2$ mit der Ebene $D_1\,D_2$ des Kugelkreises durch den Punkt S gehen, in welchem die Erdaxe die Ebene dieses Kreises trifft, und die horizontale Projektion $N_1'N_2'$ dieses Durchschnittes geht durch den Punkt S' des Hauptmeridianes. Die Entfernung $S'M'$ ergibt sich aus dem Dreieck $S''I''M''$, in welchem

$$S''I'' = I''M''\,.\,\mathrm{Tg}\,\delta = R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Tg}\,\delta$$

Es ist also auch:

$$S'\,M' = R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Tg}\,\delta.$$

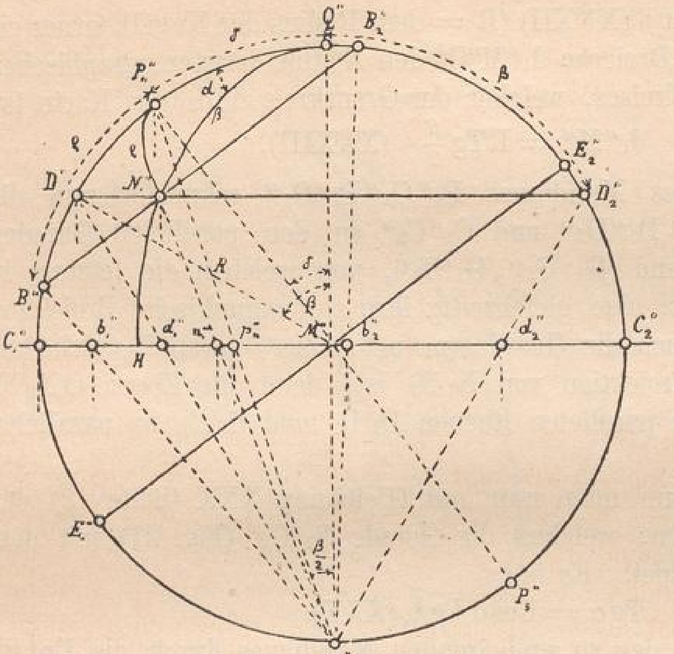
Ferner kann aus dem Dreieck $M'S'N_1'$, in welchem zwei Seiten $S'M'$ und $N_1'M'$, sowie der Winkel α gegeben sind, der Winkel ε berechnet werden.

$$\mathrm{Sin}\,\varepsilon = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,S'M'}{M'N_1'} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,R\,.\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Tg}\,\delta}{R\,\mathrm{Sin}\,\beta} \quad (M'N_1' = D_1''I'')$$

$$\mathrm{Sin}\,\varepsilon = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cotg}\,\beta\,\mathrm{Tg}\,\delta \quad \text{(XXXIV)}.$$

Der Winkel ε wird an die Gerade $G_1\,G_2$ auf beiden Seiten angetragen, und die Richtungen der Geraden $M'n_1'$ und $M'n_2'$ erhalten, welche den Grenzkreis der Karte $d_1'\,d_2'$ in zwei Punkten $n_1\,n_2$ der stereogr. Projektion des Meridianes treffen. Zwei andere Punkte des Meridianes werden erhalten, wenn man den Winkel ε für einen zweiten Kugelkreis berechnet, der mit $D_1\,D_2$ den Pol Q gemeinschaftlich hat, und einen Bogenhalbmesser besitzt, welcher kleiner als β ist. Nach

Fig. 22.



den Gleichungen (XXXIII) und (XXXIV) ergeben sich die neuen Werthe von $d_1 M$ und ε, welche man entsprechend aufträgt.

Man kann auch die Richtung der Geraden $M' N_1'$ und $M' N_2'$ durch die Winkel γ und γ_1 bestimmen, welche sie mit dem Hauptmeridiane bilden. Es ist

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \alpha + \varepsilon \\ \gamma_1 = \alpha - \varepsilon\end{array}\right\}\text{(XXXV)}$$

Ein zweites Verfahren, den Winkel ε zu berechnen ist folgendes:

$$\varepsilon = \gamma - \alpha$$

und da α bekannt ist, so ist zur Bestimmung von ε noch γ zu berechnen. Der Winkel γ ist aber gleich dem sphärischen Winkel $N_1'' Q'' D_2''$

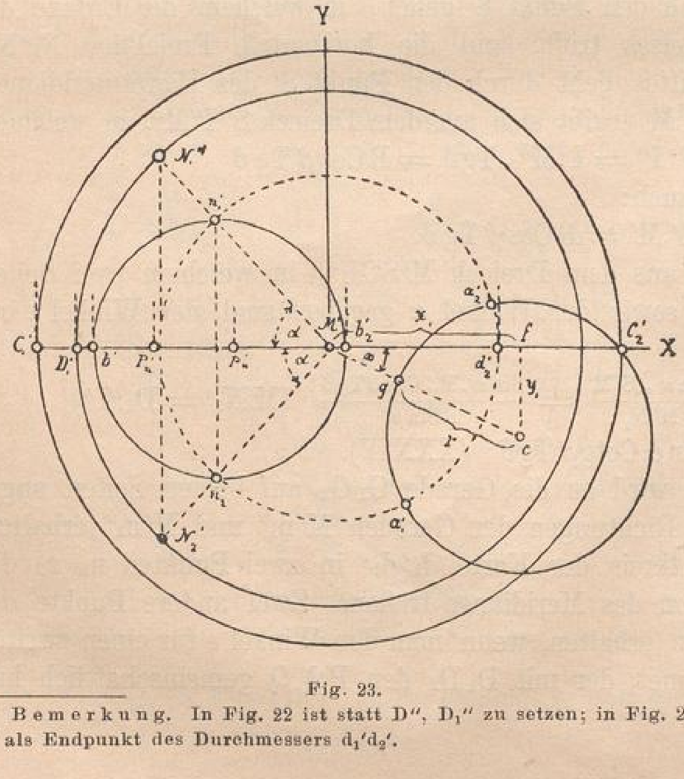


Fig. 23.

Bemerkung. In Fig. 22 ist statt D'', D_1'' zu setzen; in Fig. 23 bei P_n' der Buchstabe d_1' als Endpunkt des Durchmessers $d_1' d_2'$.

(Fig. 20) dessen Werth durch die Gleichung $\gamma = 180^0 - y$ (XXXVI) bestimmt ist.

Aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem $P_n''Q'' = \delta$, $Q''N_1'' = Q''D_2'' = \beta$, und Winkel λ gegeben sind, kann aber der Winkel y auf folgende Weise berechnet werden:

$$\operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin}\beta} \quad \text{(XXXVII)}$$

und nach den Neper'schen Analogien:

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(\lambda + x) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\beta - \delta)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\beta + \delta)} \operatorname{Cotg}\frac{y}{2}$$

$$\operatorname{Cotg}\frac{y}{2} = \frac{\operatorname{Tg}\frac{1}{2}(\lambda + x)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\beta + \delta)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\beta - \delta)} \quad \text{(XXXVIII)}$$

Nachdem man mittelst dieser Gleichung y gefunden hat, berechnet man γ, ε und γ_1.

Für einen Parallelkreis (Fig. 22 und 23) ist $B_1''B_2''$ die vertikale Projektion, und $P_n''Q'' = \delta$ sowie $P_n''B_1'' = \varrho$ gegeben. Um seine stereographische Projektion zu zeichnen, beachte man, dass sich die Ebenen $D_1 D_2$ und $B_1 B_2$, welche auf der Ebene des Hauptmeridianes senkrecht stehen, in einer Geraden $N_1 N_2$ schneiden, welche ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht ist. Durch die Endpunkte $N_1 N_2$ dieser Geraden geht der Parallelkreis $B_1 B_2$, und es muss daher das stereographische Bild des Parallelkreises durch die Endpunkte $n_1 n_2$ ihrer Projektion gehen. $n_1 n_2$ ist parallel mit $N_1 N_2$ und beide stehen senkrecht auf dem Hauptmeridiane, dessen horizontale Projektion die Gerade $C_1' C_2'$ ist, auf welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Parallelkreise liegen.

Wie oben ergibt sich der Radius $M'd_2'$ des Grenzkreises der Karte:

$$M'd_2' = R \operatorname{Tg}\frac{\beta}{2} \quad \text{(XXXIII)}.$$

Legt man ferner durch die Punkte $N_1 N_2$ und den Gegenpunkt Q des Auges grösste Kreise, so schliessen diese mit dem Hauptmeridiane den Winkel $D_1''Q''N_1'' = \alpha$ ein, welchen auch die Radien $M'n_1'$ und $M'n_2'$ mit dem Hauptmeridiane bilden. Dieser Winkel ergibt sich aus dem sphärischen Dreiecke $P_n''Q''N_1''$, in welchem die drei Seiten δ β und $P_n''N_1'' = \varrho$ gegeben sind. Es ist:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\operatorname{Cos}\varrho - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\delta}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\delta} \quad \text{(XXXIX)}$$

oder nach einer zur Berechnung mit Logarithmen bequemeren Formel

$$\operatorname{Tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \delta\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \beta\right)}{\operatorname{Sin}\frac{S}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \varrho\right)}} \quad \text{(XL)}$$

Es ist selbstverständlich, dass es nur dann nothwendig ist den Winkel α zu berechnen, wenn der Mittelpunkt der stereographischen Projektion des Parallelkreises ausserhalb des Blattes fällt. Ist dies nicht der Fall, so rechnet man nach Gleichung XVII, XVIII, XIX (Seite 37 u 38) die Werthe von e d und r, von welchen der erstere immer aufgetragen werden kann. Durch die drei Punkte n_1 b_2 n_2 ist der Parallelkreis bestimmt, will man jedoch von ihm noch mehr Punkte haben, so berechnet man für einen zweiten Kugelkreis, für welchen der Bogenhalbmesser kleiner als β ist, ebenfalls den Werth des Winkels α, wodurch sich zwei neue Punkte des Parallelkreises ergeben.

Für einen beliebigen Kugelkreis, für welchen die Grössen δ γ ϑ und ϱ (Fig. 7 Seite 18) gegeben sind, berechnet man nach den Gleichungen V, VI, VII (Seite 19) die Grössen ω und ε und nach Gleichung I, II, III (Seite 17) e d und r. Denkt man sich alsdann in Fig. 23 den Kreis construirt, so handelt es sich in dem Fall, in welchem der Mittelpunkt c des Kreises ausserhalb des Blattes fällt, darum, seine Durchschnittspunkte $a_1{}'a_2{}'$ mit dem Grenzkreise der Karte oder mit einem zu ihm concentrischen Kreise zu bestimmen, dessen Radius r′ gegeben ist. Die Coordinaten des Mittelpunktes c des zu construirenden Kreises sind:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = d \operatorname{Cos} \omega \\ y_1 = d \operatorname{Sin} \omega \end{array}\right\} \text{(XLI)}$$

wenn $d = M'c$ die Entfernung seines Mittelpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten ist. Die Gleichung des Kreises in Bezug auf die Axen MX, MY lautet:

$$(y-y_1)^2 + (x-x_1)^2 = r^2 \quad (1)$$

ferner ist die Gleichung des Kreises $d_1{}'\,d_2{}'$:

$$y^2 + x^2 = r'^2 \quad (2)$$

Die Coordinaten m, n des Durchschnittspunktes beider Kreise ergeben sich, wenn man in Gleichung 1) und 2) an die Stelle der unbestimmten Coordinaten x und y diejenigen des Durchschnittspunktes setzt, und aus beiden Gleichungen die Werthe von n und m ermittelt.

Es ist $(n-y_1)^2 + (m-x_1)^2 = r^2 \quad (3)$

$$n^2 + m^2 = r'^2 \quad (4)$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich

$$-2\,ny_1 + y_1{}^2 - 2\,mx_1 + x_1{}^2 = r^2 - r'^2$$

$$\text{und} \quad n = \frac{y_1{}^2 + x_1{}^2 + r'^2 - r^2 - 2\,mx_1}{2\,y_1} \quad (5)$$

Nachdem dieser Werth gehörig reducirt ist (y_1 x_1 r′ r sind durch Zahlen gegeben), wird er in Gleichung (4) eingesetzt und aus dieser m berechnet, endlich ist m in Gleichung (5) zu substituiren, durch welche sich alsdann n ergibt. Sowohl für m als für n erhält man zwei Werthe, von welchen je zwei zusammengehörende die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes a_1' oder a_2' sind. Will man ausser diesen noch zwei Punkte des Kreises bestimmen, so ist die Rechnung für einen zu $d_1'd_2'$ concentrischen Kreis zu wiederholen.

Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach der stereographischen Projektionsmethode.

1) Stereographisches Kartennetz von Europa. Als Gegenpunkt Q des Auges werde derjenige angenommen, dessen geographische Länge $\lambda_1 = 40^0$ östlich von Ferro und dessen Breite $\varphi_1 = +52^0$ ist. Der 40te Meridian ist dann Hauptmeridian der Karte und die Poldistanz des Gegenpunktes $Q : \delta = 38^0$.

Zunächst ist der Bogenhalbmesser β des Grenzkreises der Karte zu berechnen. Für Europa ergibt sich dieser Winkelwerth, wenn man die Entfernung des Punktes Q ($\lambda_1 = 40^0$, $\varphi_1 = 52^0$) von einem ausserhalb Europa liegenden Punkte z. B. R ($\lambda_2 = 90^0$, $\varphi_2 = 60^0$) berechnet. Denkt man sich aus dem Punkte Q mit dem Bogenhalbmesser QR einen Kreis beschrieben, so muss durch diesen Europa eingeschlossen sein. Die Entfernung zweier Punkte der Kugeloberfläche ist nach Fig. 24 durch die Gleichung bestimmt:

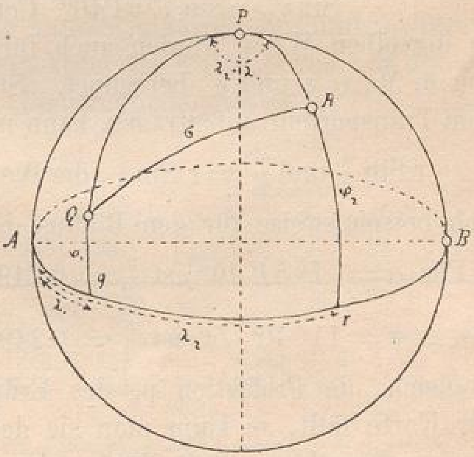


Fig. 24.

$$\text{Cos}\, RQ = \text{Sin}\,\varphi_1\, \text{Sin}\,\varphi_2 + \text{Cos}\,\varphi_1\, \text{Cos}\,\varphi_2\, \text{Cos}\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$\text{oder Cos}\,\beta = \text{Sin}\, 52^0\, \text{Sin}\, 60^0 + \text{Cos}\, 52^0\, \text{Cos}\, 60^0\, \text{Cos}\, 50^0$$
$$\beta = 28^0\, 19'\, 14''$$

Der Einfachheit wegen kann man $\beta = 28^0$ annehmen und erhält alsdann den Radius $d_1 M$ des Grenzkreises der Karte nach Gleichung XXXIII (Seite 51).

Bemerkung. In Fig. 24 ist σ durch β zu ersetzen.