Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach dieser Projektionsmethode m berechnet, endlich ist m in Gleichung (5) zu substituiren, durch welche sich alsdann n ergibt. Sowohl für m als für n erhält man zwei Werthe, von welchen je zwei zusammengehörende die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes a_1' oder a_2' sind. Will man ausser diesen noch zwei Punkte des Kreises bestimmen, so ist die Rechnung für einen zu $d_1'd_2'$ concentrischen Kreis zu wiederholen.

Berechnung der Kartennetze von Europa und Deutschland nach der stereographischen Projektionsmethode.

1) Stereographisches Kartennetz von Europa. Als Gegenpunkt Q des Auges werde derjenige angenommen, dessen geographische Länge $\lambda_1 = 40^0$ östlich von Ferro und dessen Breite $\varphi_1 = +52^0$ ist. Der 40te Meridian ist dann Hauptmeridian der Karte und die Poldistanz des Gegenpunktes $Q : \delta = 38^0$.

Zunächst ist der Bogenhalbmesser β des Grenzkreises der Karte zu berechnen. Für Europa ergibt sich dieser Winkelwerth, wenn man die Entfernung des Punktes Q ($\lambda_1 = 40^0$, $\varphi_1 = 52^0$) von einem ausserhalb Europa liegenden Punkte z. B. R ($\lambda_2 = 90^0$, $\varphi_2 = 60^0$) berechnet. Denkt man sich aus dem Punkte Q mit dem Bogenhalbmesser QR einen Kreis beschrieben, so muss durch diesen Europa eingeschlossen sein. Die Entfernung zweier Punkte der Kugeloberfläche ist nach Fig. 24 durch die Gleichung bestimmt:

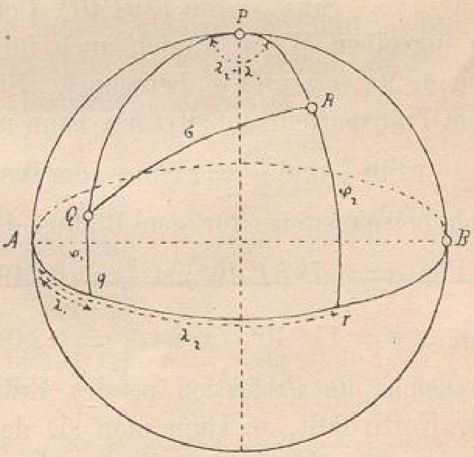


Fig. 24.

$$\text{Cos RQ} = \text{Sin}\varphi_1 \ \text{Sin}\varphi_2 + \text{Cos}\varphi_1 \ \text{Cos}\varphi_2 \ \text{Cos}\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$\text{oder Cos } \beta = \text{Sin } 52^0 \ \text{Sin } 60^0 + \text{Cos } 52^0 \ \text{Cos } 60^0 \ \text{Cos } 50^0$$
$$\beta = 28^0 \, 19' \, 14''$$

Der Einfachheit wegen kann man $\beta = 28^0$ annehmen und erhält alsdann den Radius d_1 M des Grenzkreises der Karte nach Gleichung XXXIII (Seite 51).

Bemerkung. In Fig. 24 ist σ durch β zu ersetzen.

Es ist $d_1 M = R Tg \frac{\beta}{2}$ oder für $R = 1$

$$d_1 M = Tg\,14^0 = 0{,}249\,328 \ (\log. = \overline{1}.396\,7711)$$

Will man das Kartennetz von 10^0 zu 10^0 berechnen, so hat man um die Meridiane zu konstruiren für λ der Reihe nach folgende Werthe zu setzen:

$$\lambda = 10^0,\ 20^0,\ 30^0,\ 40^0.$$

Für $\lambda = 10^0$ ergibt sich nach Gleichung XXX (Seite 42):

$$Tg\,\alpha = Cos\,38^0\,Tg\,10^0 \text{ und } \alpha = 7^0\,54'\,40''$$

ferner nach Gleichung XXXIV (Seite 51):

$$Sin\,\varepsilon = Sin\,7^0\,54'\,40''.\ Cotg\,28^0.\ Tg\,38^0 \text{ und } \varepsilon = 11^0\,40'\,5''$$

Mittelst der Grössen $d_1 M$, α und ε sind zwei Meridianpunkte bestimmt, zwei weitere Punkte ergeben sich für einen zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreis, dessen Bogenhalbmesser β beispielsweise $= 10^0$ angenommen wird. Es ist dann:

$$d_1 M = Tg\,5^0 = 0{,}0874887$$

Winkel α bleibt unverändert und ist $= 7^0\,54'\,40''$.

Ferner ist nach Gleichung XXXIV:

$$Sin\,\varepsilon' = Sin\,7^0 54' 40''.\ Cotg\,10^0.\ Tg\,38^0 \text{ und } \varepsilon' = 37^0 34' 44''$$

In derselben Weise werden auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $d_1 M$, α ε und ε' berechnet. Statt die berechneten Winkel mit dem Transporteur aufzutragen, kann man auch mittelst der Gleichungen $\frac{s}{2} = r\,Sin\,\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{s'}{2} = r\,Sin\,\frac{\varepsilon}{2}$, die Werthe ihrer Sehnen erhalten, welche sich beispielsweise für den Radius $d_1 M = r = 0{,}249328$ ergeben.

Für $\alpha = 7^0\,54'\,40''$ ist $\frac{s}{2} = 0{,}249328\ Sin\,3^0 57' 20''$, $s = 0{,}034399$

„ $\varepsilon = 11^0\,40'\,5''$ ist $\frac{s'}{2} = 0{,}249328\ Sin\,5^0 50'\,2''$, $s' = 0{,}050686$

Obgleich die Projektion p_n des Erdpoles ausserhalb den Grenzkreis der Karte fällt, so kann man sie doch bei der Construktion der Meridiane verwerthen. Ihre Entfernung vom Mittelpunkte der Karte ist:

$$Mp_n = R Tg\,\frac{\delta}{2} = Tg\,19^0 = 0{,}344328 \text{ wenn } R = 1 \text{ ist,}$$

ferner ergibt sich nach Gleichung XXIV (Seite 39)

$$M'g' = R\,Cotg\,\delta = Cotg\,38^0 = 1{,}27994,$$

diese Distanz ist aber schon so gross, dass sie wohl nicht mehr aufgetragen werden kann, wesshalb die Mittelpunkte der Meridiane ausserhalb des Blattes fallen.

Berechnung der Parallelkreise. Ihre Bogenhalbmesser sind der Reihe nach:

$\varrho = 20, 30, 40, 50, 60^0.$

Zur Bestimmung der Parallelkreise dienen die Grössen e, d, r und α. Für $\varrho = 20^0$ und R=1 ergibt sich nach den Gleichungen I, II, III (Seite 17)

$$e = \mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}\,(38^0 - 20^0) = \mathrm{Tg}\,9^0 = 0{,}15838$$

$$d = \frac{\mathrm{Sin}\,38^0}{\mathrm{Cos}\,38^0 + \mathrm{Cos}\,20^0} = 0{,}356348\ ,\ r = \frac{\mathrm{Sin}\,20^0}{\mathrm{Cos}\,38^0 + \mathrm{Cos}\,20^0} = 0{,}197963$$

Nach Gleichung (XL) (Seite 53) ist:

$$\mathrm{Tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{S}{2} - \delta\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{S}{2} - \beta\right)}{\mathrm{Sin}\,\frac{S}{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{S}{2} - \varrho\right)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,5^0\,\mathrm{Sin}\,15^0}{\mathrm{Sin}\,43^0\,\mathrm{Sin}\,23^0}}$$

$$\alpha = 32^0 26' 40''$$

Für r = 0,249328 (Radius des Grenzkreises) ergibt sich die Sehne dieses Winkels durch die Gleichung:

$$\frac{s}{2} = r\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}249328\ \mathrm{Sin}\,16^0 13' 20''$$

$$s = 0{,}139306.$$

In analoger Weise wurden auch für die übrigen Parallelkreise e d r α und s berechnet. Für den nördlichen Polarkreis ist $\varrho = 23^0\,27'20''$ zu setzen. — Nachfolgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Zahlenwerthe, welche zur Construktion des Kartennetzes von Europa nach der stereographischen Projektionsmethode dienen.

Meridiane

Radius der Erde R = 1, Entfernung des Poles p_n vom Centrum der Karte: $Mp_n = 0{,}344328$.

Winkel welchen der Meridian mit dem Hauptmeridiane bildet: λ	Bogenhalbmesser der concentrischen Kreise β	Radien der concentr. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α (siehe Glch. XXX)	Sehne von α für r = 0,249328	ε (siehe Glch. XXXIV)	Sehne von ε für r = 0,249328
10⁰	28⁰	0,249328	7⁰54′40″	0,034399	11⁰40′ 5″	0,050686
10	10	0,087489	7 54 40		37 34 44	0,160631
20	28	0,249328	16 0 10	0,069412	23 53 50	0,103239
20	15	0,131653	16 0 10		53 29 54	0,224438
30	28	0,249328	24 27 50	0,105650	37 28 50	0,160208
30	20	0,176327	24 27 50		62 44 23	0,259580
40	28	0,249328	33 28 20	0,143595	54 8 10	0,226912
40	25	0,221695	33 28 20		67 31 50	0,277150

Parallelkreise

Bogenhalbmesser ϱ	e (siehe Glch. I)	d (siehe Glch. II)	r (siehe Glch III)	α (siehe Glch. XL)	Sehne von α für r = 0,249328
20°	0,15838	0,356348	0,197963	32°26′40″	0,139306
23°27′20″	0,12761	0,361011	0,233401	39 56 36	0,170319
30°	0,06993	0,372217	0,302290	53 54 40	0,226040
40	−0,01746	0,396166	0,413621	75 55 44	0,306759
50	−0,10510	0,430292	0,535396	100 33 46	0,383562
60	−0,19438	0,477994	0,672375	132 38 8	0,456662

Um in Bezug auf einen bestimmten Massstab in welchem das st. Netz resp. die Karte von Europa gezeichnet werden soll, einen Anhaltspunkt zu bekommen, wollen wir zuerst die Annahme machen, dass der Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser 14° beträgt, also halb so gross ist als der Bogenhalbmesser des Grenzkreises, in der wahren Grösse erscheine. Für R = 1 ist der Radius der stereog. Projektion dieses Kreises $d_1 M = Tg\, 7^0 =$ 0,122785 und diese Distanz ist auf der Kugel 14 . 15 = 210 geog. Meilen [: 1° eines grössten Kreises der Erdkugel ist = 15 geog. Meilen, 1 geog. Meile = 7407,407 Meter :]. Um daher die in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe in geog. Meilen zu verwandeln, hat man sie bei dieser Annahme mit $\frac{210}{0{,}122785} = 1710{,}313$ zu multipliciren.

Für den Grenzkreis der Karte ist alsdann der Radius der stereog. Projektion = 426,429 Meilen, dieser entspricht seinem Bogenhalbmesser = 420 Meilen und es ergibt sich zwischen beiden ein Unterschied von 6,429 Meilen, um welchen für diesen Fall der Radius der stereographischen Projektion grösser ist als die Länge, die er auf der Kugel repräsentirt.

Diese Differenz ist als Fehler auf die dem Grenzkreise zunächst liegenden 14° = 210 Meilen zu betrachten.

Der Fehler wird geringer, wenn man die Annahme macht, dass der Radius des Grenzkreises der Karte gleich der Länge des Bogenhalbmessers dieses Kreises sein soll. Der Radius des Grenzkreises ist r = 0,249328 und diese Distanz ist gleich 28.15 = 420 geogr. Meilen zu setzen. Bei dieser Annahme sind alle in obiger Tabelle enthaltenen Längen, wofern sie in geog. Meilen verwandelt werden sollen mit $\frac{420}{0{,}249328} = 1684{,}528$ (log. = 3,2264782) zu multipliciren. Der Radius des zum Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises, dessen Bogenhalbmesser $= 14^0$ ist, beträgt alsdann 206,834 geog. Meilen, während der Bogenhalbmesser selbst gleich 210 geog. Meilen ist. Der Unterschied beider Dimensionen beträgt bei dieser Annahme auf eine Länge, welche gleich der obigen von 210 geog. Meilen ist, nur 3,166 geog. Meilen, und ist dieselbe der Vorhergehenden daher vorzuziehen.*) Es ist selbstverständlich, dass die Karte resp. ihr Netz nun immer noch in einem bestimmten Massstabe gezeichnet werden kann. Soll derselbe z. B. bei der Karte von Europa $= 1 : 3000000$ sein, so beträgt der Radius des Grenzkreises $\frac{420 \times 7407,407}{3\,000\,000} = 1,037$ Meter, welche eine Länge von 0,249328 Einheiten repräsentiren, der Werth einer zehntels Einheit ist daher $\frac{1,037}{2,49328} = 0,4159$ Meter. Diese Länge kann nun in beliebig kleine Decimaltheile getheilt und der so erhaltene Massstab beim Auftragen der in obiger Tabelle angegebenen Zahlenwerthe benutzt werden.

Das durch obige Tabelle bestimmte Netz wurde auf Taf. I (siehe folgende Seite), in welcher gleichzeitig das Bonne'sche Netz von Europa enthalten ist, im Massstabe 1 : 40 000 000 gezeichnet.

In diesem kleinen Massstabe finden in Bezug auf die Meridiane für beide Projektionen keine merklichen Abweichungen statt und haben nur die Parallelkreise, deren stereographische Bilder durch punktirte Linien eingezeichnet sind, solche aufzuweisen.

Was die Construktion der Meridiane betrifft, so wurde dabei auf folgende Weise verfahren: Mittelst den in Rubrik 3 (Seite 57) angegebenen Radien beschrieb man aus dem Mittelpunkte M der Karte concentrische

---

*) Man könnte noch beliebige andere Annahmen machen, doch liefern diese alle keine so günstigen Resultate wie die zuletzt genannte Bestimmung. Denkt man sich z. B. über dem Grenzkreise des Kugelabschnittes einen Kegel construirt, dessen Spitze im Augenpunkte liegt und dessen Basiskreis als Durchschnitt einer Ebene erhalten wird, welche mit der Ebene des Grenzkreises parallel ist und durch die Mitte der Höhe des Kugelabschnittes geht, so könnte man den Radius dieses Basiskreises, welcher = 416,022 geog. Meilen ist, gleich dem Radius der st. Projektion des Grenzkreises, = 0,249328 setzen, und würde eine andere Constante erhalten, mit welcher die stereog. Längen zu multipliciren sind. Doch auch diese scheinbar zweckmässige Annahme weist grössere Fehler auf als die oben genannte. Dasselbe gilt auch für den Fall, in welchem die Oberfläche des Kugelabschnittes auf welchem sich Europa befindet gleich der Oberfläche seiner stereog. Projektion gemacht wird. (Durch Rechnung kann man sich davon leicht überzeugen.)

Kreise und liegen auf jedem dieser Kreise je 4 Meridianpunkte. Um sie zu erhalten, wurden zunächst von dem südlichsten und nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes, welcher mit 40° bezeichnet ist, die in Rubrik 5 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α nach a b c d ... und von diesen Punkten aus sodann die in der Rubrik 7 enthaltenen Sehnenlängen der Winkel ε auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen. Für die Punkte des Meridianes a′1′1′a′ verhält es sich beispielsweise wie folgt: Es wird zuerst (40°) a = 0,034399 (Rubrik 5 der Tabelle) und sodann von a aus aa′ = 0,050686 und a 1 = 0.160631 (beide in Rubrik 7 der Tabelle) aufgetragen. Die beiden Punkte 1 verbindet man mit dem Mittelpunkte M der Karte. Diese Verbindungslinien schneiden den zum Grenzkreise concentrischen Kreis 1′2′2′1′ in den Meridianpunkten 1′1′ und wird durch sie und die auf dem Grenzkreise der Karte liegenden Meridianpunkte a′a′ der zu zeichnende Meridian hinreichend bestimmt. Ebenso verfährt man bei den übrigen Meridianen. Das Verfahren wurde Seite 51 begründet und ergibt sich seine Richtigkeit sofort aus Betrachtung von Fig. 20 und 21. (Seite 50.)

In Bezug auf die Construktion der Parallelkreise ist nur zu bemerken, dass nach Fig. 23 (Seite 52) die in der letzten Rubrik der Tabelle (Seite 58) enthaltenen Sehnenlängen der Winkel α vom nördlichsten Punkte des Hauptmeridianes aus auf den Grenzkreis der Karte aufgetragen werden, wodurch sich die Endpunkte der Parallelkreise ergeben.

Stereographisches Kartennetz von Deutschland. Als Mittelpunkt der Karte nehmen wir denjenigen an, dessen Länge $\lambda = 30^0$ östlich v. Ferro und dessen Breite $\varphi = 50^0$ ist. Die Poldistanz δ dieses Punktes ist dann gleich 40^0.

Der Bogenhalbmesser des Grenzkreises der Karte ergibt sich durch Berechnung des Abstandes der Punkte Q ($\lambda_1 = 30^0$, $\varphi_1 = 50^0$) und R ($\lambda_2 = 40^0$, $\varphi_2 = 54^0$)

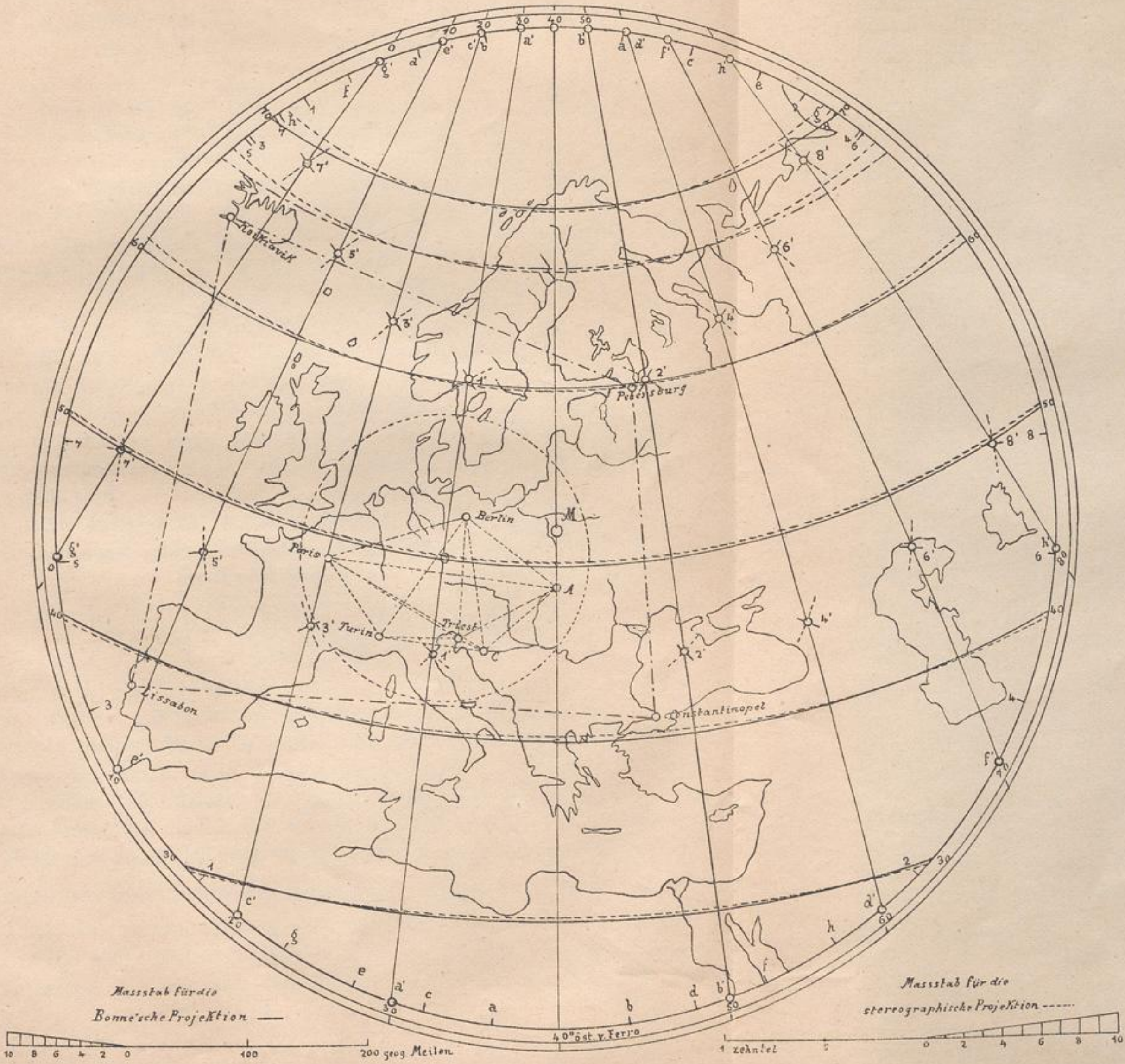
$$\text{Cos QR} = \text{Sin } 50^0 \text{ Sin } 54^0 + \text{Cos } 50^0 \text{ Cos } 54^0 \text{ Cos } 10^0$$
$$\text{QR} = 7^0 20'$$

Der Einfachheit wegen setze man $\text{QR} = \beta = 8^0$, dann ist für $R = 1$ der Radius des Grenzkreises der Karte $r = \text{Tg}\frac{\beta}{2} = \text{Tg } 4^0 =$ 0,0699268.

Um die Meridiane und Parallelkreise von zwei zu zwei Graden zu berechnen, setze man

1) für die Meridiane $\lambda = 2^0, 4^0, 6^0, 8^0, 10^0,$

Das stereographische und Bonne'sche Kartennetz von Europa.



M = 1: 40000000

2) für die Parallelkreise $\varrho = 36^0, 38^0, 40^0, 42^0, 44^0$.

Als Beispiel für die Berechnung der Meridiane wollen wir $\lambda = 2^0$ annehmen.

Nach Gleichung XXX ist:

$$\operatorname{Tg}\alpha = \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Tg}\lambda = \operatorname{Cos} 40^0 \operatorname{Tg} 2^0$$

$$\alpha = 1^0 31' 56''$$

Nach Gleichung XXXIV ist:

$$\operatorname{Sin}\varepsilon = \operatorname{Sin} 1^0 31' 56'' \operatorname{Cotg} 8^0 \operatorname{Tg} 40^0$$

$$\varepsilon = 9^0 11' 11''$$

Um zwei weitere Punkte des Meridianes zu bestimmen, setze man z. B. $\beta = 2^0 20'$ und erhält den Radius des mit dem Grenzkreise der Karte concentrischen Kreises $r = \operatorname{Tg} 1^0 10' = 0{,}020365$, ferner nach Gleichung XXXIV den Winkel ε'. Es ist

$$\operatorname{Sin}\varepsilon' = \operatorname{Sin} 1^0 31' 56''. \operatorname{Cotg} 2^0 20' \operatorname{Tg} 40^0$$

$$\varepsilon' = 33^0 24' 39''$$

Für $r = 0{,}0699268$ (Radius des Grenzkreises) ergeben sich die Sehnen der Winkel $\alpha\ \varepsilon\ \varepsilon'$ wie folgt:

$$s = 0{,}00186995,\ s' = 0{,}01119922,\ s'' = 0{,}0402008.$$

In analoger Weise berechnet man auch für die übrigen Meridiane die Werthe von $\alpha\ \varepsilon\ \varepsilon'\ s\ s'\ s''$, welche in nachfolgender Tabelle zusammengestellt sind.

Als Beispiel für die Berechnung der Parallelkreise wollen wir denjenigen wählen, dessen Bogenhalbmesser $\varrho = 36^0$ ist. Für $R = 1$ ist

$$e = \operatorname{Tg} 2^0 = 0{,}0349208$$

$$\operatorname{Tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \delta\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \beta\right)}{\operatorname{Sin}\frac{S}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{S}{2} - \varrho\right)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} 2^0 \operatorname{Sin} 34^0}{\operatorname{Sin} 42^0 \operatorname{Sin} 6^0}}$$

$$\alpha = 55^0 41' 18''$$

Für $r = 0{,}0699268$ ist die Sehne von $\alpha : s = 0{,}0653212$.

In gleicher Weise berechnet man auch für die übrigen Parallelkreise die Werthe von e, α und s, welche nachfolgende Tabelle enthält.

Sollen alle Längen in geog. Meilen aufgetragen werden, so setze man den Radius des Grenzkreises der Karte ($r = 0{,}0699268$) gleich $8 \times 15 = 120$ geog. Meilen. Alle in nachfolgender Tabelle angegebenen Dimensionen sind alsdann mit $\frac{120}{0{,}0699268} = 1716{,}08$ ($\log = 3{,}2345375$) zu multipliciren. Es ist übrigens einfacher den Radius $r = 120$ geog. Meilen des Grenzkreises gleich einer passenden Länge zu setzen, wodurch sich für die Karte ein bestimmter Massstab ergibt und alsdann analog wie oben angegeben wurde, einen Massstab zu construiren, mit welchem nachfolgende Zahlenwerthe unmittelbar aufgetragen werden können.

Stereographisches Netz von Deutschland.

Meridiane.

λ	β	Radien der concent. Kreise auf welchen Meridianpunkte liegen	α	Sehne von α für r = 0,0699268	ε	Sehne von ε für r = 0,0699268
2°	8°00′	0,0699268	1°31′ 56″	0,00186995	9°11′ 11″	0,0111992
2	2 20	0,0203650	1 31 56		33 24 39	0,0402008
4	8	0,0699268	3 3 58	0,00374160	18 37 25	0,0226290
4	3 20	0,0290970	3 3 58		50 24 26	0,0595548
6	8	0,0699268	4 36 12	0,00561664	28 37 53	0,0345804
6	4 20	0,0378335	4 36 12		62 42 49	0,0727748
8	8	0,0699268	6 8 41	0,00749542	39 43 25	0,0475154
8	5 20	0,0465757	6 8 41		74 10 43	0,0843398
10	8	0,0699268	7 41 33	0,00938094	53 3 10	0,0624600
10	7	0,0553251	7 41 33		66 10 20	0,0763460

Parallelkreise.

ϱ	e	α	Sehne von α für r = 0,0699268
36°	0,0349208	55°41′18″	0,0653212
38	0,0174551	70 47 56	0,0810134
40	0,0000000	85 13 10	0,0946810
42	—0,0174551	100 20 4	0,1073960
44	—0,0349208	116 23 0	0,1188498