Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Berücksichtigung der Abplattung der Erde beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion

6. Aufgabe. Der Unterschied der Längen $l_1 - l$ und die Weglänge a sei gegeben, man soll ζ und $(\varphi - \varphi_1)$ den Unterschied der Breiten construiren.

Auflösung. Diese Aufgabe kann nur näherungsweise gelöst werden. Nachdem man die Meridiane PR und ST der Orte gezogen hat, wird auf dem Massstabe BD die Länge PQ abgegriffen und mit dieser Zirkelöffnung aus P, welcher als Punkt der Abreise gegeben ist, ein Kreis beschrieben, der den Meridian ST in Q schneidet. Diese Länge ist jedoch nur die näherungsweise Länge von PQ. Man ziehe nun durch Q die Gerade QR parallel mit AB und greife auf dem Massstabe AB, soviele Minuten ab, als die Gerade $PR = P'R'$ enthält, diese Minutenzahl wird nach Pr getragen und rq parallel mit AB gezogen, es ergibt sich dadurch die Länge $Pq = a$ des durchlaufenen Weges, welche gleich der gegebenen Weglänge sein muss. Stimmt die durch Construktion erhaltene Weglänge mit der gegebenen überein, so ist die Construktion richtig, im anderen Falle muss sie noch einmal wiederholt werden, wobei man je nach dem erhaltenen Werthe von a die Distanz PQ grösser oder kleiner anzunehmen hat.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion.

Beim Entwurfe einer Karte nach Mercatorsprojektion kann auch die Abplattung der Erde berücksichtigt werden. Es sei in Fig. 29 (folgende Seite) $P_s A P_n$ der Ellipsenbogen, durch dessen Umdrehung um die Axe OY ein Rotationsellipsoid entsteht, welches die Gestalt der Erde besitzt. (Der Unterschied der Ellipsenaxen, welcher bei der Erde sehr klein ist, wurde der Deutlichkeit wegen in Fig. 29 etwas gross angenommen.) P_n sei der Nordpol der Erde, C ein beliebiger Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten x_1 y_1 sind, ferner sei CT eine Tangente an die Ellipse, welche gleichzeitig den Horizont des Ortes C darstellt. Zieht man im Punkte C eine Normale auf die Tangente, so ist der Winkel $CNM = \varphi$ die geog. Breite des Ortes C, denn er ist gleich dem Winkel EDY, welcher die Polhöhe des Ortes C ist. Aus dem Dreiecke ODT ergibt sich $\varphi + \beta = 90^0$

$$\varphi = 90^0 - \beta.$$

Wie bekannt ist die Gleichung der Ellipsentangente:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \text{ und in dieser Gleichung}$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \text{ oder da}$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = -\operatorname{Tg} \beta = -\operatorname{Cotg} \varphi \text{ so ist}$$

$$\operatorname{Cotg} \varphi = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \text{ und } \operatorname{Tg} \varphi = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

$$\text{somit } a^2 y_1 = b^2 x_1 \operatorname{Tg} \varphi$$

$$\text{und } a y_1 = \frac{b^2}{a} x_1 \operatorname{Tg} \varphi.$$

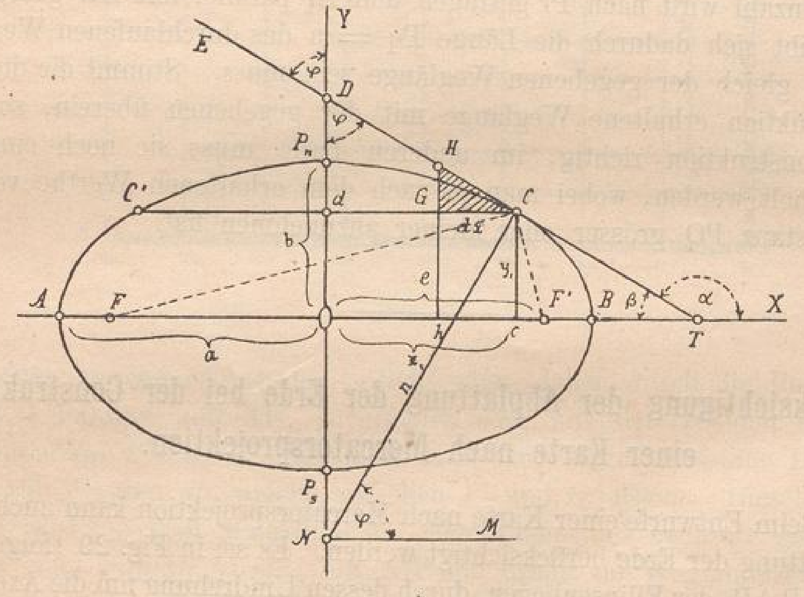

Fig. 29.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung der Ellipse, so ergibt sich:

$$\left(\frac{b^2 x_1 \operatorname{Tg} \varphi}{a}\right)^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$b^4 x_1{}^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi + a^2 b^2 x_1{}^2 = a^4 b^2$$

$$x_1{}^2 (b^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi + a^2) = a^4.$$

$$1) \quad x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi}}$$

In dieser Gleichung ist die Abszisse x_1 des Punktes C, welche gleich dem Radius Cd des Parallelkreises CC' ist, durch die Breite φ dieses Parallelkreises ausgedrückt. Man kann nun noch in diese

Gleichung das Verhältniss ε der Excentricität OF' zur halben grossen Axe a einführen. Es ist:

$$\varepsilon = \frac{OF'}{OB} = \frac{e}{a}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$2)\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

Schreibt man im Radikand der Gleichung 1) a^2 als Faktor heraus, so ergibt sich:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} Tg^2 \varphi\right)}} = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2) Tg^2 \varphi}}$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2)\frac{Sin^2 \varphi}{Cos^2 \varphi}}} = \frac{a \, Cos \varphi}{\sqrt{Cos^2 \varphi + Sin^2 \varphi - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}$$

$$3)\ x_1 = \frac{a \, Cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}$$

Betrachtet man in dieser Gleichung φ als variabel, so ist auch x_1 variabel und die Gleichung kann differenzirt werden:

$$dx = a \, . \, d\left(\frac{Cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}\right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}\left(d \, Cos \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi} - d\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi} \, Cos \varphi\right)$$

$$dx = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}\left(- Sin \varphi \, d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi} + \frac{\varepsilon^2 Sin \varphi \, Cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi}}\right)$$

$$dx = \frac{a \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}\left(- Sin \varphi (1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi) + \varepsilon^2 Sin \varphi (1 - Sin^2 \varphi)\right)$$

$$dx = \frac{a \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}\left(- Sin \varphi + \varepsilon^2 Sin^3 \varphi + \varepsilon^2 Sin \varphi - \varepsilon^2 Sin^3 \varphi\right)$$

$$4)\ dx = -\frac{a (1 - \varepsilon^2) Sin \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 Sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Soll nun die Oberfläche des Erdellipsoides nach der Mercatorprojektion auf einer Ebene abgebildet werden, so dass die Abbildung mit dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so müssen analog wie bei der Projektion der Kugel die Seiten zweier unendlich kleiner Rechtecke des Ellipsoides und seiner Abbildung in Proportion stehen. Ist daher $d\alpha$ der unendlich kleine Bogen des Aequators, ds derjenige eines Ellipsenmeridianes, so sind die unendlich kleinen Rechteckseiten, welche von zwei unendlich nahe aneinanderliegenden Meridianen und Parallelkreisen des Ellipsoides begrenzt werden: $d\alpha \, Cos \varphi$ und ds, wobei das Ellipsoidenrechteck um die Breite φ vom Aequator entfernt ist. Ferner sind die entsprechenden Seiten der Abbildung des Rechteckes bei der Mercatorprojektion gleich $d\alpha$ und $d\lambda$, wobei $d\lambda$ das Differential der wachsenden Breiten und $d\alpha$ das Differential des Aequatorbogens bezeichnet, und es besteht die Proportion

$$ds : d\alpha \operatorname{Cos}\varphi = d\lambda : d\alpha$$

$$d\lambda = \frac{d\alpha}{d\alpha \operatorname{Cos}\varphi}\, ds$$

Die Bogen $d\alpha$ und $d\alpha . \operatorname{Cos}\varphi$ entsprechen aber denselben Centriwinkeln und verhalten sich daher wie die Radien der Kreise, zu welchen sie gehören, d. h. wie der Radius a des Aequators zum Radius x_1 des Parallelkreises, es ist daher:

$$5)\ d\lambda = \frac{a}{x_1}\, ds$$

Aus dem unendlich kleinen Dreiecke CHG (Fig. 29), in welchem die Tangente CH mit dem Bogenelemente ds zusammenfällt und Winkel $CHG = \varphi =$ der Breite des Parallelkreises CC′ ist, ergibt sich aber der Werth von CH oder

$$ds = \frac{dx}{\operatorname{Sin} CHG} = \frac{dx}{\operatorname{Sin}\varphi}$$ oder wenn man in diese Gleichung für dx den gefundenen Werth setzt, (siehe Glch. 4) ohne jedoch das — Zeichen zu berücksichtigen:

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man diesen Werth, sowie den Werth von x_1 (siehe Glch. 3) in Glch. 5 so ergibt sich:

$$d\lambda = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}}{a \operatorname{Cos}\varphi} \cdot \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\lambda = \frac{a(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi\, (1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, zerlege man sie in zwei Summanden. Multiplicirt man ε^2 mit $1 = \operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi$ so erhält man:

$$d\lambda = \frac{a\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}\left(\frac{1-\varepsilon^2\, (\operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = \frac{a\, d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}\left(1 - \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Cos}^2\varphi}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = a\left[\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon . \frac{\varepsilon \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$d\lambda = a\left[\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon . \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so ergibt sich

$$\lambda = a\left[\int \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} - \varepsilon \int \frac{d(\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi)}{1-\varepsilon^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right]$$

Wie oben gefunden wurde (siehe Seite 66 u. 67) ist aber

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{1}{M} \log \mathrm{Tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ferner kann $\int \frac{d(\varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi)}{1 - \varepsilon^2 \,\mathrm{Sin}^2\,\varphi} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$ gesetzt werden, welches wie oben abgeleitet wurde $= \frac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1+x}{1-x} + C$ ist (siehe S. 66) und daher

$$\int \frac{d(\varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi)}{1 - \varepsilon^2 \,\mathrm{Sin}^2\,\varphi} = \frac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1 - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi} + C \text{ und}$$

$$\lambda = a \left[\frac{1}{M} \log \mathrm{Tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1 - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi} \right] + C$$

Das Integral ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu nehmen, für $\varphi = 0$ wird aber $\lambda = 0$, wesshalb die Constante wegfällt.

Entwickelt man das letzte Glied der Gleichung nach der logarithmischen Reihe:

$$\overset{e}{\log} \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$$

so ergibt sich, da $x = \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi$ ist:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \overset{e}{\log} \frac{1 + \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1 - \varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi} = -\varepsilon\left(\varepsilon \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{\varepsilon^3 \,\mathrm{Sin}^3\,\varphi}{3} + \frac{\varepsilon^5 \,\mathrm{Sin}^5\,\varphi}{5} + \ldots\right)$$
$$= -\varepsilon^2 \,\mathrm{Sin}\,\varphi - \frac{1}{3}\varepsilon^4 \,\mathrm{Sin}^3\,\varphi - \frac{1}{5}\varepsilon^6 \,\mathrm{Sin}^5\,\varphi - \ldots$$

und daher (XLVI) $\lambda = a \left[\frac{1}{M} \log \mathrm{Tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right) - \varepsilon^2 \,\mathrm{Sin}\,\varphi - \frac{1}{3}\varepsilon^4 \,\mathrm{Sin}^3\,\varphi - \frac{1}{5}\varepsilon^6 \,\mathrm{Sin}^5\,\varphi - \ldots \right]$

Betrachtet man diese Länge, welche, da der Radius a des Aequators gewöhnlich in Toisen gegeben ist, ebenfalls in Toisen erhalten wird, als Bogen des Aequators, so entspricht diesem Bogen ein Centriwinkel von α Minuten, dessen Werth auf folgende Weise erhalten wird:

$\lambda : \mathrm{Arc}\,\alpha' = a : 1$ und $\mathrm{Arc}\,\alpha' = \frac{\lambda}{a}$ oder da $\mathrm{Arc}\,\alpha' = \alpha \,\mathrm{Arc}\,1' = \alpha \,\mathrm{Sin}\,1'$

$$\alpha \,\mathrm{Sin}\,1' = \frac{\lambda}{a} \text{ und } \alpha = \frac{\lambda}{a \,\mathrm{Sin}\,1'}$$

Dividirt man daher Glch. (XLVI) mit $a \,\mathrm{Sin}\,1'$ so ergibt sich α;

$$\alpha = \frac{1}{M \,\mathrm{Sin}\,1'} \log \mathrm{Tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{Sin}\,1'} \mathrm{Sin}\,\varphi - \frac{\varepsilon^4}{3 \,\mathrm{Sin}\,1'} \mathrm{Sin}^3\,\varphi - \frac{\varepsilon^6}{5 \,\mathrm{Sin}\,1'} \mathrm{Sin}^5\,\varphi - \ldots$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist unabhängig von ε und bleibt unverändert, wenn man die Abplattung der Erde vernachlässigt, die anderen Glieder sind daher die relative Correktion dieser Grösse. Nach Bessel ist $\log \varepsilon = \bar{2},9122052$ und es ergibt sich als Endresultat zur Berechnung der wachsenden Breiten die Gleichung:

$$\text{(XLVIa)} \quad \alpha = 7915{,}704674 \log \mathrm{Tg}\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right) - 22{,}9448 \,\mathrm{Sin}\,\varphi - 0{,}051 \,\mathrm{Sin}^3\,\varphi - \ldots$$

(α ist gleich einer bestimmten Minutenzahl des Erdäquators)

Dies ist die Formel von Delambre zur Berechnung der wachsenden Breiten, wenn das Erdellipsoid nach der Mercatorprojektion dargestellt werden soll, gewöhnlich wird jedoch auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht genommen, und sind die in obiger Tabelle (Seite 68) enthaltenen Werthe der wachsenden Breiten hinreichend genau.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Merkatorprojektion, welche wie wir gesehen haben für die Schifffahrt eine so grosse Bedeutung hat, zuerst von Gerard Kremer genannt Mercator in Anwendung gebracht wurde, indem er im Jahre 1569 eine grosse Seekarte nach dieser seiner Projection anfertigte, wodurch er sich in der Kartographie und Schifffahrtskunde einen unsterblichen Namen gesichert hat.