Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Die Bonne'sche oder die modificirte Flamsteed'sche Projektionsmethode

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \operatorname{Cos} \varphi$	Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \operatorname{Cos} \varphi$	Breite φ des Parallelkreises	$l' = 100 \operatorname{Cos} \varphi$
75°	25,882	81°	15,643	86°	6,976
76	24,192	82	13,917	87	5,234
77	22,495	83	12,187	88	3,490
78	20,791	84	10,453	89	1,745
79	19,081	85	8,715	90	0,000
80	17,365				

Auch der Abplattung der Erde kann bei dieser Methode Rechnung getragen werden. Die Parallelkreise sind alsdann nicht in gleichen Entfernungen von einander zu ziehen, sondern in Entfernungen, welche gleich den Längen der aufeinanderfolgenden Bogengrade sind, die dem Meridiane des Ellipsoides angehören. Aus der Seite 98 angegebenen Tabelle, in welcher gleichzeitig die Längen der Parallelkreisgrade enthalten sind, können die Werthe der aufeinanderfolgenden Meridiangrade entnommen werden.

Da bei der Flamsteedschen Projektion die Parallelkreise durch gerade Linien dargestellt werden, so gibt diese Projektion keine sehr grosse Genauigkeit und sind besonders die vom mittleren Meridiane entfernten Theile der Karte etwas verzeichnet. Sie eignet sich vorzüglich für Länder, welche vom Aequator durchschnitten werden, und es ist in unseren Atlanten gewöhnlich das Blatt von Afrika nach dieser Methode gezeichnet. Eine Modification der Flamsteed'schen Projektion ist die Projektion von Bonne, welche im Folgenden beschrieben wird.

Die Bonne'sche*) oder die modificirte Flamsteed'sche Projektion.

Sie ist eine Combination der Kegelprojektion mit der Flamsteed'schen Projektionsmethode. Sind CD und EF (Fig. 30 S. 83) die äussersten Parallelkreise eines Landes, welches darzustellen ist, so denkt man sich an die Kugel einen Tangentialkegel gelegt, welcher dieselbe längs

*) Rigobert Bonne wurde in Raucourt bei Sedan 1727 geboren und starb 1795 in Paris, er war anfänglich Privatlehrer der Mathematik in Paris, später erster Ingenieur-géographe der Marine.

dem mittleren Parallelkreise GH des Landes berührt. Die Spitze S dieses Kegels liegt auf der Erdaxe, und wird in der Entwicklung der Kegelfläche als Mittelpunkt sämmtlicher Parallelkreise angenommen.

Der mittlere Meridian der Karte, von welchem die Entwicklung ausgeht, stellt sich als gerade Linie dar, und wird auf ihm vom Mittelpunkte G der Karte aus, die wahre Länge der Meridiangrade nach oben und unten aufgetragen. Durch die so erhaltenen Theilpunkte zieht man die Parallelkreise, welche aus dem Punkte S beschrieben werden.

Die Meridiane werden construirt, wenn man auf jeden Parallelkreis vom mittleren Meridiane aus die wahre Länge des entsprechenden Parallelkreisgrades aufträgt, und die demselben Meridiane angehörenden Theilpunkte durch Curven verbindet. In dem so erhaltenen Netze stehen die einzelnen Parallelkreise und Meridiane nicht senkrecht auf einander, sondern schneiden sich unter spitzen und stumpfen Winkeln.

Um die Radien der Parallelkreise zu berechnen, berechnet man vor Allem den Radius GS (Fig. 30 S. 83) des mittleren Parallelkreises, und vermehrt und vermindert seine Länge um die Länge eines Meridiangrades, oder wenn man das Netz von 10^0 zu 10^0 ziehen will, um die Länge von 10 Meridiangraden. Sind die Breiten φ_1 und φ_2 der äusseren Parallelkreise des Landes gegeben, so ist

$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ die Breite des mittleren Parallelkreises GH, und daher auch $\sphericalangle \mathrm{GSM} = \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

Der Radius des mittleren Parallelkreises ist:

$$\mathrm{SG} = \mathrm{GM}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \text{ oder}$$

$$\text{(LVI)}\quad \mathrm{SG} = \mathrm{R}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Der Radius r eines Parallelkreises dessen Breite φ' kleiner als φ ist, ergibt sich, wenn man zu dem Radius GS, welcher in Fig. 34 nach MO getragen wurde, den Meridianbogen addirt, der dem Centriwinkel $\varphi - \varphi'$ entspricht. Für einen Parallelkreis dessen Breite φ'' grösser als φ ist, muss von dem Radius GS der Meridianbogen des Centriwinkels $\varphi'' - \varphi$ abgezogen werden.

Bezeichnet man die Länge des Meridianbogens mit d, so ist daher (LVIb) $\mathrm{r} = \mathrm{GS} \pm \mathrm{d}$.

Ferner ist die Länge eines Meridiangrades

(LVII) $\mathrm{l} = \frac{\mathrm{R}\pi}{180}$ und die Länge von γ Graden irgend eines Parallelkreises dessen Breite φ ist:

$$\text{(LVIII)}\quad \mathrm{l}' = \frac{\mathrm{R}\pi\gamma^0}{180}\,\mathrm{Cos}\varphi = \frac{\mathrm{R}\pi\gamma''}{648000}\,\mathrm{Cos}\varphi = \mathrm{l}\,\gamma^0\,\mathrm{Cos}\varphi$$

Diese Länge muss auf den entsprechenden Parallelkreisen der Bonne'schen Projektion aufgetragen werden, was am Besten dadurch geschieht, dass man zuerst die in Fig. 34 ersichtlichen Centriwinkel α und sodann die ihnen entsprechenden Sehnen a l, b c, d p berechnet. Ist r der Radius eines Parallelkreises und l' die Bogenlänge für welche α erhalten werden soll, so ergibt sich:

$$\alpha = \frac{180\,l'}{r\pi} = \frac{180}{r\pi}\,\frac{R\pi\gamma}{180}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

oder (LIX) $\alpha = \frac{R\gamma}{r}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$

ferner ist die Sehne, welche diesem Winkel entspricht

(LX) $s = 2r\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}$

Setzt man in diesen Gleichungen den Radius der Erde $R = 1$, so ergeben sich die Folgenden:

(LVIa) $GS = \mathrm{Cotg}\,\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

(LVIIa) $1 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453$

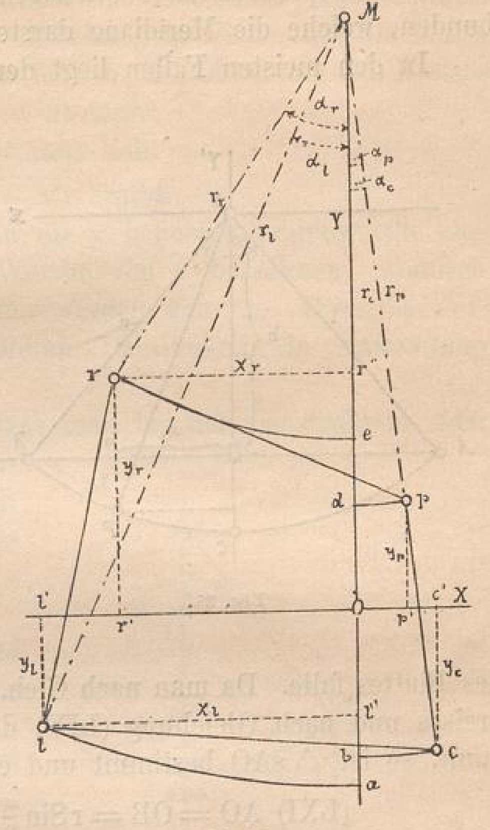

Fig. 34.

(LVIIIa) $l' = \frac{\pi\gamma}{180}\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0{,}017453\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\varphi$

(LIXa) $\alpha = \frac{\gamma\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{r}$ (LXa) $s = 2r\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}$

Nach diesen Gleichungen werden die Werthe von GS, α und s berechnet und in einem beliebigen Massstabe aufgetragen, wobei zu beachten ist, dass $1 = 0{,}017453 = 15$ geog. Meilen $= 111111{,}111$ Met.

Für den mittleren Parallelkreis der Karte, dessen Radius gleich der Erzeugenden des Tangentialkegels, gleich $R\,\mathrm{Cotg}\,\varphi$ ist, kann der Centriwinkel des Parallelkreisbogens, welcher γ Graden entspricht nach Glch. (L) Seite 85 berechnet werden. Es ist:

(LIXb) $\alpha = \gamma\,\mathrm{Sin}\,\varphi = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi$

wenn $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2 =$ dem Unterschiede der Längen der äussersten Meridiane der Karte gesetzt wird. Nachdem der Bogen des Parallelkreises durch die Schenkel dieses Winkels begrenzt ist, wird er in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, und die Theilpunkte mit den entsprechenden der übrigen Parallelkreise durch Curven verbunden, welche die Meridiane darstellen.

In den meisten Fällen liegt der Mittelpunkt s der Parallelkreise ausserhalb des Blattes, wesshalb er für die Construktion dieser Kreise nicht benutzt werden kann. Die Parallelkreise können alsdann durch Construktion einzelner Punkte auf folgende Weise erhalten werden:

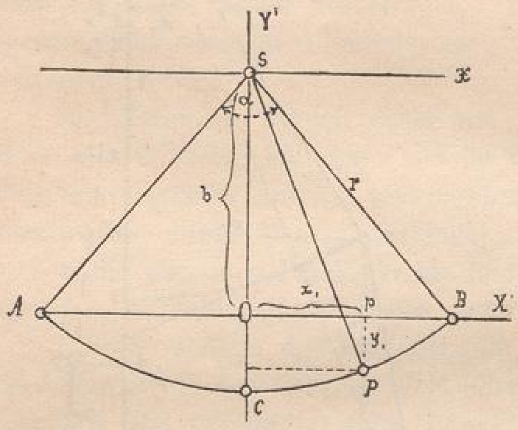

Fig. 35.

In Fig. 35 sei sC der Hauptmeridian der Karte, C ein Theilpunkt durch welchen der Parallelkreis ACB gehen soll, s der Mittelpunkt des Parallelkreises, welcher jedoch ausserhalb des Blattes falle. Da man nach Glch. (LVIb) den Radius r des Parallelkreises und nach Gleichung (LIX) den Winkel AsB $= \alpha$, berechnen kann, so ist $\triangle$ sAO bestimmt und ergibt sich aus demselben

$$\text{(LXI)}\quad AO = OB = r \operatorname{Sin} \tfrac{\alpha}{2}$$

$$\text{und}\quad Os = r \operatorname{Cos} \tfrac{\alpha}{2}$$

$$\text{ferner ist}\quad OC = sC - Os = r - r \operatorname{Cos} \tfrac{\alpha}{2} = r\left(1 - \operatorname{Cos} \tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{(LXII)}\quad OC = 2r \operatorname{Sin}^2 \tfrac{\alpha}{4}$$

Für jeden Parallelkreis wird nun nach Gleichung LXI und LXII AO und OC berechnet*), und da der Punkt C gegeben ist, zuerst CO aufgetragen, in O eine Senkrechte auf sC errichtet und auf diese AO = OB aufgetragen. Der Kreisbogen ACB kann nun mit dem Peripheriezirkel gezogen werden.

Sollen noch mehr Punkte des Kreises bestimmt werden, so kann dies am einfachsten auf analytischem Wege geschehen. Legt man

*) Die Werthe von $\operatorname{Sin} \frac{\alpha}{2}$ und $\left(1 - \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}\right)$ können Sarrazin's Taschenbuch entnommen werden (siehe S. 4).

die Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt s des Kreises, so lautet seine Gleichung: $x^2 + y^2 = r^2$

Verschiebt man die Axen parallel mit sich selbst bis sie durch den Punkt O gehen, so wird die Gleichung in Bezug auf die neuen Axen OX′ und OY′ erhalten, wenn man in der Gleichung des Kreises $x = x'$ und $y = y' - b$ setzt, es ist alsdann:

$x'^2 + (y' - b)^2 = r^2$, woraus sich

(LXIII) $y' = b - \sqrt{(r + x')(r - x')}$ ergibt.

In diese Gleichung kann man für x' beliebige Zahlenwerthe einsetzen und die entsprechenden Werthe von y' berechnen, wodurch beliebig viele Kreispunkte erhalten werden können. Dasselbe Verfahren wird auch für jeden anderen Parallelkreis in Anwendung gebracht.

Da es häufig vorkommt, dass man bei der Construktion einer Karte einzelne Punkte, deren sphärische Coordinaten gegeben sind, in die Karte einzuzeichnen hat, so wollen wir noch folgende Aufgabe lösen:

Es sei die Länge λ und die Breite φ des Mittelpunktes der Karte, ferner die Länge λ_1 und die Breite φ_1 irgend eines Punktes P gegeben, welcher in die Karte eingetragen werden soll, man soll die Coordinaten x und y dieses Punktes (siehe Fig. 36) in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt O der Karte gehendes rechtwinkliges Coordinatensystem berechnen.

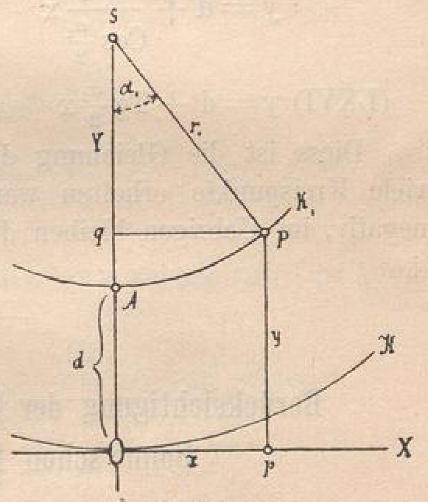

Fig. 36.

Auflösung. Der Radius sO des mittleren Parallelkreises der Karte ist bekannt: Für $R = 1$ ist

$$sO = r = \operatorname{Cotg}\varphi$$

ferner ist auch der Abstand $OA = d$ des Parallelkreises K_1 vom mittleren Parallelkreise K gegeben, und es kann daher der Radius r_1 dieses Parallelkreises berechnet werden:

$$r_1 = sA = sO - OA = r - d$$

Der Winkel $AsP = \alpha_1$ ergibt sich nach Gleichung LIXa

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1 \operatorname{Cos}\varphi_1}{r_1}$$

in welcher Gleichung $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda$, d. h. gleich dem Winkel, den der Meridian des Punktes P mit dem mittleren Meridiane der Karte einschliesst.

Die Coordinaten des Punktes P sind nun:

(LXIV) $x = Pq = r_1 \operatorname{Sin} \alpha_1$

$$y = Oq = OA + Aq = d + sA - sq$$

$$y = d + r_1 - r_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 = d + r_1 (1 - \operatorname{Cos} \alpha_1)$$

(LXV) $y = d + 2\, r_1 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha_1}{2}$

Aus Gleichung (LXIV) folgt:

$r_1 = \frac{x}{\operatorname{Sin} \alpha_1}$. Substituirt man diesen Werth in Gleichung (LXV) so ergibt sich:

$$y = d + \frac{2\,x}{\operatorname{Sin} \alpha_1} \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{oder da } \operatorname{Sin} \alpha_1 = 2 \operatorname{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{Cos} \frac{\alpha_1}{2}$$

$$y = d + \frac{\operatorname{Sin} \frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\alpha_1}{2}} x$$

(LXVI) $y = d + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_1}{2} x$

Diess ist die Gleichung des Kreises K_1, mit welcher beliebig viele Kreispunkte erhalten werden können. Ist $\varphi_1 < \varphi$ so ist d negativ, im Uebrigen bleiben die erhaltenen Werthe unverändert.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Bonne'schen Projektionsmethode.

Bei der Ableitung der vorhergehenden Gleichungen wurde die Erde als Kugel betrachtet, man kann jedoch bei der Bonne'schen Projektion ohne alle Schwierigkeit die Abplattung der Erde ebenfalls berücksichtigen:

In Fig. 29 sei $AP_n B$ ein Meridian des Erdellipsoides, C ein beliebiger Ellipsenpunkt, x_1 y_1 seine Coordinaten, CT die Tangente an die Ellipse im Punkte C, CN die Normale des Ellipsenpunktes. Da die Tangentialebene im Punkte C des Ellipsoides senkrecht steht auf der Meridianebene $AP_n B$, so kann die Tangente TC als Horizont des Ortes C betrachtet werden, und $\sphericalangle$ EDY ist gleich der Polhöhe dieses