Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Bonne'schen Projektion in welcher Gleichung $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda$, d. h. gleich dem Winkel, den der Meridian des Punktes P mit dem mittleren Meridiane der Karte einschliesst.

Die Coordinaten des Punktes P sind nun:

$$\text{(LXIV)}\quad x = Pq = r_1 \operatorname{Sin} \alpha_1$$

$$y = Oq = OA + Aq = d + sA - sq$$

$$y = d + r_1 - r_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 = d + r_1 (1 - \operatorname{Cos} \alpha_1)$$

$$\text{(LXV)}\quad y = d + 2\, r_1 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

Aus Gleichung (LXIV) folgt:

$r_1 = \frac{x}{\operatorname{Sin} \alpha_1}$. Substituirt man diesen Werth in Gleichung (LXV) so ergibt sich:

$$y = d + \frac{2\,x}{\operatorname{Sin} \alpha_1} \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{oder da } \operatorname{Sin} \alpha_1 = 2 \operatorname{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{Cos} \frac{\alpha_1}{2}$$

$$y = d + \frac{\operatorname{Sin} \frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\alpha_1}{2}}\, x$$

$$\text{(LXVI)}\quad y = d + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_1}{2}\, x$$

Diess ist die Gleichung des Kreises K_1, mit welcher beliebig viele Kreispunkte erhalten werden können. Ist $\varphi_1 < \varphi$ so ist d negativ, im Uebrigen bleiben die erhaltenen Werthe unverändert.

Berücksichtigung der Abplattung der Erde bei der Bonne'schen Projektionsmethode.

Bei der Ableitung der vorhergehenden Gleichungen wurde die Erde als Kugel betrachtet, man kann jedoch bei der Bonne'schen Projektion ohne alle Schwierigkeit die Abplattung der Erde ebenfalls berücksichtigen:

In Fig. 29 sei $AP_n B$ ein Meridian des Erdellipsoides, C ein beliebiger Ellipsenpunkt, $x_1\ y_1$ seine Coordinaten, CT die Tangente an die Ellipse im Punkte C, CN die Normale des Ellipsenpunktes. Da die Tangentialebene im Punkte C des Ellipsoides senkrecht steht auf der Meridianebene $AP_n B$, so kann die Tangente TC als Horizont des Ortes C betrachtet werden, und $\sphericalangle$ EDY ist gleich der Polhöhe dieses

Ortes. Die Polhöhe eines Ortes ist aber gleich seiner geographischen Breite, somit $\measuredangle$ EDY = CDd = φ.

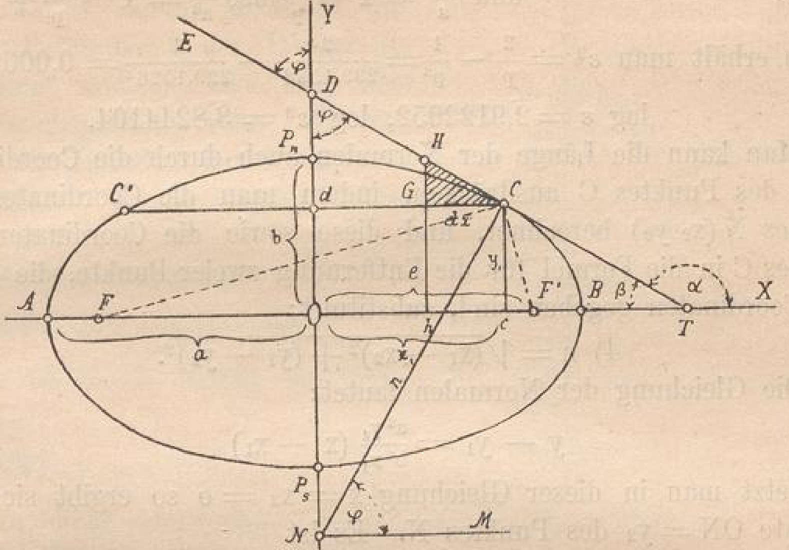

Fig. 29.

Für den Radius x_1 des Parallelkreises CC′ wurden Seite 78 u. 79 die Formeln

1) $x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \, Tg^2 \, \varphi}}$ und $x_1 = \frac{a \, Cos \, \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \, Sin^2 \, \varphi}}$ (2) gefunden.

Ferner ergibt sich aus $\triangle$ NCd in welchem $\measuredangle$ NCd = φ ist, die Normale NC = n des Punktes C. Es ist

$$n = \frac{Cd}{Cos \, NCd} = \frac{x_1}{Cos \, \varphi}$$

Substituirt man in diese Gleichung für x_1 den Werth aus Glch. 1 so erhält man:

$$n = \frac{a^2}{Cos \, \varphi \sqrt{a^2 + b^2 \, Tg^2 \, \varphi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \, Cos^2 \, \varphi + b^2 \, Sin^2 \, \varphi}}$$

Substituirt man dagegen in die Gleichung $n = \frac{x_1}{Cos \, \varphi}$ den Werth aus Gleichung 2 so ist:

$$\text{(LXVII)} \quad n = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \, Sin^2 \, \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{(1 + \varepsilon \, Sin \, \varphi)\,(1 - \varepsilon \, Sin \, \varphi)}}$$

In dieser Gleichung ist $\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ (3)
oder da die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{p}$ oder $1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{p}$ gesetzt wird,
und $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{p}$ also $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$ ist,
so erhält man $\varepsilon^2 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{299{,}1528} - \frac{1}{299{,}1528^2} = 0{,}00667438$

$$\log \varepsilon = \overline{2},9122052, \ \log \varepsilon^2 = \overline{3},8244104.$$

Man kann die Länge der Normalen auch durch die Coordinaten $x_1\ y_1$ des Punktes C ausdrücken, indem man die Coordinaten des Punktes N $(x_2\ y_2)$ berechnet, und diese sowie die Coordinaten des Punktes C in die Formel für die Entfernung zweier Punkte, die durch ihre Coordinaten gegeben sind, substituirt:

$$4)\ n = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Die Gleichung der Normalen lautet:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = x_2 = o$ so ergibt sich die Ordinate $ON = y_2$ des Punktes N. Es ist

$$y_2 - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2} \text{ und}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{a^2 y_1}{b^2}$$

Glch. 4 lautet daher:

$$n = \sqrt{x_1{}^2 + \left(y_1 - y_1 + \frac{a^2 y_1}{b^2}\right)^2}$$

$$n = \sqrt{x_1{}^2 + \frac{a^4 y_1{}^2}{b^4}} \text{ oder da } \frac{a^4}{b^4} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{ ist, (folgt aus Glch. 3)}$$

$$\text{(LXVIII)}\ n = \sqrt{\frac{y_1{}^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + x_1{}^2} = \sqrt{\frac{y_1{}^2 + (1-\varepsilon^2)^2 x_1{}^2}{1-\varepsilon^2}}$$

$$1 - \varepsilon^2 = 0{,}99332562, \ \log (1 - \varepsilon^2) = \overline{1},9970917.$$

Ist in Fig. 29 (S. 95) CC′ der mittlere Parallelkreis der Karte, so ergibt sich nun die Seitenkante CD des Tangentialkegels, welche in der Entwicklung Radius des mittleren Parallelkreises ist, aus △ CDN:

$$\text{(LXIX)}\ CD = CN \,.\, \text{Cotg}\, CDN = n\ \text{Cotg}\, \varphi$$

Mit diesem Radius wird wie in Fig 36 dargestellt ist, aus s der Kreis K beschrieben. Die übrigen Parallelkreise der Karte werden erhalten, wenn man die wahren Längen der aufeinanderfolgenden Meridiangrade, welche aus nachfolgender Tabelle der Längen der Meridian- und Parallelkreisgrade des Erdellipsoides (S. 98) zu entnehmen sind, vom Mittelpunkte O der Karte aus, auf den Hauptmeridian nach oben und unten aufträgt. Dadurch wird für jeden Parallelkreis K_1 der Punkt A (Fig. 36) erhalten und kann derselbe aus dem Punkte s mit dem Radius sA beschrieben werden.

Sollte der Punkt s ausserhalb des Blattes fallen, so muss für jeden Parallelkreis der Winkel α_1 berechnet und die Gleichung des Kreises abgeleitet werden. Wie wir Seite 94 gefunden haben sind die Coordinaten irgend eines Kreispunktes P (Fig. 36)

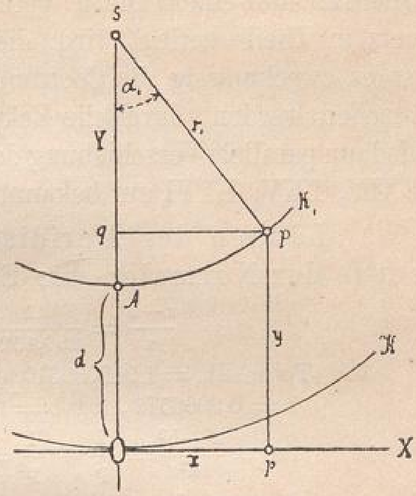

Fig. 36.

(LXIV) $x = r_1 \operatorname{Sin} \alpha_1$

(LXV) $y = d + 2 r_1 \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha_1}{2}$

ferner ist die Gleichung des Kreises K_1

(LXVI) $y = d + \operatorname{Tg} \frac{\alpha_1}{2} x$

In diese Gleichungen ist für α_1 der Werth zu setzen, welcher dem Erd-Ellipsoide entspricht. In Fig. 36 entspreche dem Bogen AP des Parallelkreises $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda$ Längengrade, so ist seine Länge

$$b = \frac{x_1 \pi \gamma_1}{180^0}, \text{ (} x_1 = \text{ dem Radius des Parallelkreises K)}$$

Die Länge des Bogens AP in Fig. 36 ist aber

$$b' = \frac{r_1 \pi \alpha_1}{180},$$ und da beide Werthe einander gleich sein sollen:

$$r_1 \alpha_1 = x_1 \gamma_1$$

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{r_1} \gamma_1$$

Aus Fig. 29 Seite 95 ergibt sich aber der Werth von

$x_1 = NC . \operatorname{Cos} NCd = n \operatorname{Cos} \varphi$ und daher

$$\text{(LXX)} \quad \alpha_1 = \frac{n \operatorname{Cos} \varphi \, \gamma_1}{r_1}$$

In nachfolgender Tabelle (S. 98) sind die Werthe der Logarithmen der Normalen für die Parallelkreise von Grad zu Grad angegeben und können daher mittelst dieser Werthe die Winkel α_1 nach Glch. LXX berechnet werden. Substituirt man für einen Parallelkreis den Werth von α_1 in die Glch. LXIV, LXV, LXVI, so ergeben sich die Coordinaten irgend eines Kreispunktes sowie die Gleichung des Kreises K_1.—

Wird ein Land wie Deutschland, Frankreich, die Schweiz etc. nach der Bonne'schen Methode dargestellt, so geschieht diess der Bequemlichkeit wegen gewöhnlich nicht auf einem Blatte, sondern man theilt die Karte in Quadrate, welche je eine Seite gemeinschaftlich haben und separat gezeichnet werden. Nach ihrer Vollendung werden diese Quadrate auf einem Blatte vereinigt. Da in diesem Falle das Kartennetz in Theile zerlegt wird, die einzeln construirt werden müssen, so ist es zweckmässig die Coordinatenaxen, auf welche die Parallelkreise bezogen werden, durch die Eckpunkte der Quadrate zu legen, es findet alsdann parallele Verschiebung der Axen statt und können die Gleichungen LXIV, LXV, LXVI auf bekannte Weise leicht umgeformt werden.

Längen der Meridian- und Parallelkreisgrade sowie der Normalen des Erdellipsoides für die Abplattung

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}1528} \text{ (nach Bessel).}$$

Die Toise ist $= 1{,}949036310$ m, $\log = 0{,}289819930$ für $a = 1$ ist $b = 0{,}9966572$, $\log b = \bar{1}{,}9985458$.

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = 0{,}00667438 \quad \log \varepsilon = \bar{2}{,}9122052$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{p} = \frac{1}{299{,}1528} \quad \log \frac{1}{p} = \bar{3}{,}5241069$$

Radius des Aequators $a = 3272077{,}14$ Toisen,
$= 6377397{,}16$ Meter,
halbe kleine Axe $b = 3261139{,}33$ Toisen,
$= 6356078{,}97$ Meter.

Breite	Grad des Meridianes *) Par. Toisen	Diff.	Grad des Parallelkreises *) Par. Toisen	Diff.	Logarith. der Normalen *) bis zur Umdrehungsaxe für a = 1	Diff.
0°	56727,356		57108,519		0,0000000	
		0,173		8,639		4
1	27,529		099,880		004	
		0,519		25,917		14
2	28,048		073,963		018	
		0,864		43,187		22
3	28,912		030,776		040	
		1,208		60,445		31
4	30,120		56970,331		071	
		1,550		77,685		39
5	31,670		892,646		110	
		1,892		94,902		48
6	56733,562		56797,744		0,0000158	
		2,230		112,093		57
7	35,792		685,651		215	
		2,566		129,252		66

*) Diese Zahlenwerthe sind dem Berliner „Astronomischen Jahrbuch" für 1852, herausgegeben von J. F. Encke, entnommen. Durch die neue europäische Gradmessung, deren Resultate indessen erst nach Jahren bekannt sein werden, dürften sich dieselben etwas, jedoch nicht wesentlich ändern. Das obige Verhältniss der Toise zum Meter steht in Francoeur's Geodesie.