Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

1. Lambert's normale isocylindrische Projektion

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

V. Abschnitt.

Von den äquivalenten Abbildungen.

Wenn sich bei einer Projektion der Kugeloberfläche die Projektionen irgend zweier Flächenelemente ebenso verhalten wie ihre Originale auf der Kugel, so sagt man die Projektion sei eine äquivalente Abbildung. Sind F_1 und F_2 zwei Flächenelemente der Kugel, f_1 und f_2 ihre Projektionen, so hat man die Proportion

$$f_1 : f_2 = F_1 : F_2 \text{ oder}$$
$$f_1 : F_1 = f_2 : F_2.$$

Ferner findet für eine beliebige Anzahl Flächenelemente die Proportionalreihe statt:

$$f_1 : F_1 = f_2 : F_2 = f_3 : F_3 = \ldots = f_n : F_n$$

Hieraus folgt $\Sigma(f) : \Sigma(F) = f_1 : F_1$
$= f_2 : F_2$
$= \ldots..$

für $\Sigma(f) = \Sigma(F)$ ist auch $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2 \ldots . f_n = F_n$.

Es ist aber die Summe aller F gleich dem Flächeninhalte der sphärischen Figur, die Summe aller f gleich dem Flächeninhalte ihrer Projektion. Wird daher eine sphärische Figur in ihrer wahren Grösse abgebildet, so sind bei einer äquivalenten Abbildung auch die einzelnen Flächenelemente der Projektion gleich den entsprechenden Elementen der sphärischen Figur.

Wir wollen nun für einige der bekanntesten Kartenprojektionen die Aequivalenz beweisen:

1. Lambert's normale isocylindrische Projektion.

Denkt man sich die Kugel mit einem senkrechten Kreiscylinder umhüllt, welcher sie längs des Aequator berührt, so wird dieser von den verlängerten Meridianebenen in parallelen Geraden geschnitten, welche gleich weit von einander entfernt sind. Ebenso werden die verlängerten Parallelkreisebenen die Cylinderfläche in Kreisen schneiden, welche mit dem Aequator congruent sind. Denkt man sich nun die Cylinderfläche längs einer Kante resp. eines Meridianes aufgeschnitten und in eine Ebene entwickelt, so entsteht ein Netz von senkrecht auf einander stehenden Geraden, bei welchen die Meridiane gleiche Entfernungen besitzen, während die Distanz der Parallelkreise um so mehr abnimmt, je näher die letzteren dem Pole liegen.

Um die Entfernung irgend eines Parallelkreises vom Aequator zu berechnen, hat man die Gleichung:

$$d = R \operatorname{Sin} \varphi$$

in welcher R den Radius der Erde und φ die Breite des Parallelkreises bezeichnet.

Um die Aequivalenz dieser Projektionsmethode nachzuweisen, bedenke man dass die Mantelfläche eines senkrechten Kreiscylinders welcher als Basis den Aequator und die Höhe y besitzt:

$$M = 2 R \pi . y$$

Dieselbe Formel hat man aber auch für die Oberfläche einer Kugelzone, deren Höhe y ist. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Parallelkreisen liegenden Kugelzonen sind daher gleich den entsprechenden Cylinderzonen, und es ist auch die Mantelfläche des ganzen Cylinders gleich der Kugeloberfläche.

Diese Projektion wurde zuerst von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert (1728—1777) in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben.

2. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone.

Eine gegebene Kugelzone, deren mittlerer Parallelkreis die Breite φ besitzt, kann auf eine Cylinderfläche projicirt werden, welche als Basis diesen Parallelkreis hat. Stellt man die Bedingung, dass die zu erhaltende Projektion äquivalent sein soll, so muss die Kugelzone welche sich von der Breite φ bis zur Breite φ_1 erstreckt gleich der Mantelfläche des Cylinders sein, dessen Entwicklung die Kugelzone darstellt. Die Höhe h des Cylinders ergibt sich alsdann aus der Bedingungsgleichung:

$$\text{Fläche der Kugelzone} = \text{der Fläche der Cylinderzone}$$

$$2 R \pi (R \operatorname{Sin} \varphi_1 - R \operatorname{Sin} \varphi) = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi \, h .$$

$$2 R^2 \pi (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi) = 2 R \pi \operatorname{Cos} \varphi \, h .$$

$$h = \frac{R (\operatorname{Sin} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \varphi)}{\operatorname{Cos} \varphi}$$