Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

Erstreckt sich dagegen eine Karte bis zum Aequator, so ist für diesen $\varphi = 0^0$ und man erhält den Radius des Kreises, welcher den Aequator darstellt nach der Gleichung:

$$r^2 = r''^2 + \frac{2R^2 \operatorname{Sin} \varphi''}{m}$$

Sind bei einer Karte die Parallelkreise, welche in ihrer wahren Länge entwickelt werden, nicht mehr als 10^0 von einander entfernt, und sind die Grenzkreise der Karte von diesen Parallelkreisen nicht mehr als 5^0 entfernt, so erhält man eine Karte deren lineare Dimensionen mit demselben Massstabe abgegriffen werden können. In der Mitte der Karte werden die Distanzen, welche sich von Süd nach Nord erstrecken etwas vergrössert, dagegen die Distanzen die von Ost nach West gemessen werden, etwas verkleinert. Jenseit der in der wahren Grösse entwickelten Parallelkreise verhält sich die Sache gerade umgekehrt: Verkleinerung der Süd- und Norddimensionen, Vergrösserung der Ost-Westdistanzen.

Diese Projektion wurde von H. C. Albers in Lüneburg in Zachs monatlicher Korrespondenz im Nov. 1805 veröffentlicht.

4. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

Eine andere Projektion bei welcher die aufeinanderfolgenden unendlich schmalen Kugelzonen gleich den unendlich schmalen concentrischen Ringflächen eines Kreissectors sind, hat Joh. Heinrich Lambert in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772) gegeben. Lambert hat gefunden, dass wenn man den Radius eines Parallelkreises in der Entwicklung der Kegelfläche:

1) $r = 2R\sqrt{m} \operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ macht, obiger Bedingung Genüge geleistet wird.

Erhebt man die Gleichung in's Quadrat, so ergibt sich:

$$r^2 = 4R^2 m \operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und da $2\operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = 2\left(\operatorname{Sin} 45^0 \operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Cos} 45^0 \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\right)^2$

$= 2.\operatorname{Sin}^2 45^0\left(\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\right)^2$ oder da $\operatorname{Sin}^2 45^0 = \frac{1}{2}$ ist

$$2\operatorname{Sin}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \left(1 - 2\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= (1 - \operatorname{Sin}\varphi)$$

so ist 2) $r^2 = 2R^2 m\ (1 - \operatorname{Sin}\varphi)$

Für einen Parallelkreis von der Breite φ_1 ist analog

$$r_1^2 = 2R^2m\,(1 - \operatorname{Sin}\varphi_1)$$

$$\text{und } r^2 - r_1^2 = 2R^2m\,(\operatorname{Sin}\varphi_1 - \operatorname{Sin}\varphi)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{\pi}{m}$ so ist

3) $\frac{r^2\pi}{m} - \frac{r_1^2\pi}{m} = 2\,R\pi\,(R\operatorname{Sin}\varphi_1 - R\operatorname{Sin}\varphi)$. Mittelst dieser Gleichung ist die Aequivalenz dieser Projektion leicht nachzuweisen.

Ihre linke Seite ist nämlich der Unterschied zweier Kreissectoren, welche den gemeinschaftlichen Centriwinkel $\alpha = \frac{360^0}{m}$ haben.

[Wie bekannt ist die Oberfläche eines Kreissectors:

$0_s = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ und da $0_s = \frac{r^2\pi}{m}$, so ist $\frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m}$]

Auf der rechten Seite der Gleichung 3 hat man dagegen die Oberfläche einer Kugelzone, deren äussere Parallelkreise die Breiten φ_1 und φ besitzen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, so ist die sehr schmale Kugelzone gleich der Oberfläche ihrer Projektion, wesshalb der Aequivalenz Genüge geleistet wird.

Soll die Länge irgend eines Parallelkreises von der Breite φ_1 gleich der Länge seiner Projektion sein, die mit dem Radius r_1 beschrieben wird, so ist:

$2\,R\,\pi\operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{2\,r_1\pi\alpha}{360^0}$ oder da $\frac{\alpha}{360} = \frac{1}{m}$ ist

$$2R\pi\operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{2r_1\pi}{m}$$

und 4) $2r_1\pi = m \times 2\,R\,\pi\operatorname{Cos}\varphi_1$ d. h. der Umfang der Projektion des Parallelkreises ist alsdann m mal so gross als der Parallelkreis selbst.

Ferner ergibt sich aus Gleichung 4)

5) $R\operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{r_1}{m}$

Zur Bestimmung der Grösse m macht man die Annahme, dass für den genannten Parallelkreis, als welchen man am natürlichsten den mittleren Parallelkreis der Karte annimmt, die Breitengrade in dem richtigen Verhältnisse zu den Längengraden stehen. Sind φ_1 und φ nur wenig von einander verschieden, und bezeichnet man mit $(\varphi_1 - \varphi)$ den Arcus welcher ihrer Differenz entspricht, so ist der kleine Bogen des Meridianes $= R\,(\varphi_1 - \varphi)$ und seine Projektion $= r_1 - r$. Ist ferner λ gleich dem Arc. eines sehr kleinen Längenunterschiedes, so ist $R\lambda\operatorname{Cos}\varphi_1$ der sehr kleine Parallelkreisbogen, und nach Gleichung 5) $\frac{r_1\lambda}{m}$ seine Projektion. Es findet somit die Proportion statt:

$$R(\varphi_1 - \varphi) : R\lambda \operatorname{Cos}\varphi_1 = (r_1 - r) : \frac{r_1\lambda}{m}$$

und $$(r_1 - r)\, R\lambda \operatorname{Cos}\varphi_1 = \frac{r_1\lambda}{m}\, R(\varphi_1 - \varphi)$$

$$6)\ \frac{r_1 - r}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_1}{m \operatorname{Cos}\varphi_1}$$

Setzt man nach Glch. 1) für r_1 und r ihre Werthe so ist:

$$r - r_1 = 2R\sqrt{m}\left[\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\right]$$
$$= 2R\sqrt{m}\,.\,2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\right)$$
$$= 4R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{4}\right)\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}$$

und der linke Theil der Glch. 6 lautet:

$$\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{4}\right)\frac{4\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4\,.\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}\right)}$$

Sind nun φ und φ_1 sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\frac{\varphi + \varphi_1}{4} = \frac{2\,\varphi_1}{4} = \frac{\varphi_1}{2} \text{ und } \frac{4\operatorname{Sin}\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{4\left(\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}\right)} = 1$$

somit $$7)\ \frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = R\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

ferner ist der rechte Theil der Glch. 6

$$\frac{r_1}{m\operatorname{Cos}\varphi_1} = \frac{r_1}{m\operatorname{Sin}(90^0 - \varphi_1)} = \frac{2R\sqrt{m}\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}{m\,.\,2\operatorname{Sin}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

oder $$8)\ \frac{r_1}{m\operatorname{Cos}\varphi_1} = \frac{R}{\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Setzt man in die Glch. 6 die erhaltenen Werthe, so ergibt sich:

$$\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}\operatorname{Cos}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Hieraus folgt $$9)\ m = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Nach dieser Gleichung lässt sich der Werth von m, welcher immer grösser als 1 ist, berechnen, und da der Werth

$2\,\mathrm{R}\,\mathrm{Sin}\left(45^0 \quad \frac{\varphi}{2}\right)$ leicht construirt werden kann, er ist in Fig. 41 $=$ AP, so wird auch der Werth von $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{m}}\,.\,\mathrm{AP}$ leicht durch Construction erhalten.

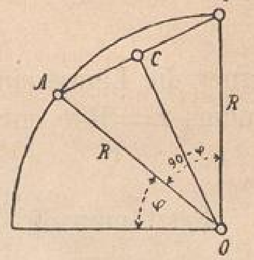

Fig. 41.

5. Projektion von Bonne. Dieselbe wurde schon Seite 89 ausführlich beschrieben, und kann man sich daher darauf beschränken ihre Aequivalenz nachzuweisen. Ein sehr schmaler Streifen der Kugeloberfläche, welcher zwischen den Parallelkreisen von den Breiten φ_1 und φ_2 liegt, ist gleich der Länge des Parallelkreises von der Breite $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ multiplicirt mit dem Abstande $\mathrm{R}\,(\varphi_1 - \varphi_2)$ der beiden Parallelkreise. [$\varphi_1 - \varphi_2$ sei gleich dem Arc., welcher der Breitendifferenz entspricht.] Da nun beide Längen auf der Karte in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden und aufeinander senkrecht stehen, so wird ein solcher Streifen auf der Karte ebenfalls in seiner wahren Grösse abgebildet. Dasselbe gilt auch von jedem anderen analogen Flächenstreifen der Kugel, und da man jede sphärische Figur in der Richtung der Parallelkreise in unendlich schmale Streifen zerlegen kann, deren Projektionen gleich ihren Originalen sind, so wird ein jeder Theil der Kugelfläche auf der Karte in der wahren Grösse abgebildet, wodurch die Aequivalenz der Bonne'schen Projektion bewiesen ist.

6. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner. Dieselbe ist eine conventionelle Kegelprojektion, bei welcher die Spitze des Kegels im Pole angenommen wird. Alle Parallelkreise werden als concentrische Kreise gezeichnet, welche als gemeinschaftlichen Mittelpunkt die Spitze des Kegels besitzen. Der Radius eines Parallelkreises von der Breite φ wird gleich der Länge des Meridianbogens genommen, welcher zwischen dem Pol und dem Parallelkreise liegt. Es ist daher:

$$\mathrm{r} = \mathrm{R}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathrm{R}\,\psi$$

wenn φ den Arc. der Breite, und ψ sein Complement bezeichnet.

Da die Parallelkreise in ihrer wahren Länge abgetragen werden, so ist wieder jeder unendlich schmale Flächenstreifen der Kugel nach der Richtung der Parallelkreise gleich seiner Projektion, wesshalb diese Kegelprojektion ebenfalls äquivalent ist.