Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

1. Die stereographische Projektionsmethode

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

VI. Abschnitt.

Von den konformen oder orthomorphen Abbildungen.

Ist eine Projektion ihrem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich, so sagt man dieselbe sei eine konforme oder orthomorphe Abbildung. Wie aus der ebenen Geometrie bekannt ist sind zwei Figuren ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben und ihre entsprechenden Seiten in Proportion stehen. Dass ein beliebiges Kugeldreieck und seine Projektion diese Eigenschaft nicht besitzen kann, versteht sich von selbst, denn die Kugel ist keine entwickelbare Fläche, dagegen kann man beliebig viele Arten von Projektionen erhalten, bei welchen jedes unendlich kleine Kugeldreieck ABC seinem Bilde abc ähnlich ist. Ist für diesen Fall P ein Punkt im Inneren des Dreieckes und p seine Projektion, so müssen 1) die Winkel APB, APC, BPC ihren entsprechenden Projektionen apb, apc, bpc gleich sein und 2) muss die Gleichung stattfinden:

$$\frac{ap}{AP} = \frac{bp}{BP} = \frac{cp}{CP} = v$$

Man nennt den Werth v, welcher das Verhältniss zwischen dem unendlich kleinen Bilde und seinem Originale darstellt, das lineare Vergrösserungsverhältniss der Projektion. Dasselbe ist für jeden Punkt P der Kugeloberfläche ein anderes, während es für ähnliche Figuren ein constantes ist, und muss für jede Projektionsmethode besonders bestimmt werden.

Wir wollen nun die wichtigsten konformen Projektionen betrachten:

1. Die stereographische Projektionsmethode. Wie früher bewiesen wurde (siehe Seite 14) schneiden sich bei jeder stereographischen Projektion zwei beliebige Kugelkreise unter demselben Winkel wie ihre Originale auf der Kugel, und es lässt sich dieser Satz auch für zwei beliebige Curven aussprechen, welche auf der Kugel gezogen

werden. Denn denkt man sich auf jeder Curve zwei Punkte angenommen, welche ihrem Schnittpunkte sehr nahe liegen und sich links und rechts von ihm befinden, so kann man durch je drei dieser Punkte einen Kreis legen, wodurch die sich schneidenden Curvenelemente durch Kreiselemente ersetzt werden und die Tangenten im Durchschnittspunkte beider Curven mit den Tangenten der Kugelkreise zusammenfallen. Die Projektionen der letzteren schneiden sich aber unter demselben Winkel wie ihre Originale, wesshalb sich auch die Projektionen der Curven unter demselben Winkel wie die Curven selbst schneiden müssen. Jedes unendlich kleine sphärische Dreieck ABC ist daher mit seinem Bilde abc ähnlich, denn beide haben gleiche Winkel und da sich jede unendlich kleine sphärische Figur in sphärische Dreiecke zerlegen lässt, welche alle mit ihren Bildern ähnlich sind, so folgt daraus, dass diese Figur und ihr Bild ebenfalls ähnlich sein müssen. Eine jede stereographische Projektion ist daher eine conforme oder orthomorphe Abbildung.

Um das Vergrösserungsverhältniss für die stereographische Projektionsmethode zu bestimmen, denke man sich durch die Augenaxe OQ (Fig. 7 Seite 18) einen grössten Kreis QAO gelegt. Nimmt man auf diesem Kreise zwei Punkte A und H an, welche sehr nahe bei einander liegen, so hat man den Werth des Verhältnisses zu bestimmen, das man erhält, wenn man die Projektion von AH d. h. die Linie ah mit ihrem Originale AH dividirt.

Ist der Abstand des Punktes A vom Gegenpunkte des Auges $AQ = \varDelta$, ferner der Abstand $HQ = \varDelta_1$, der Radius der Erde $= R$ und bezeichnen $\varDelta$ und $\varDelta_1$ die Arc. der betreffenden Winkelgrössen, so ist

$$AH = R\,(\varDelta - \varDelta_1)$$

ferner die Projektion $ah = Ma - Mh = R\left(\mathrm{Tg}\frac{\varDelta}{2} - \mathrm{Tg}\frac{\varDelta_1}{2}\right)$

$$ah = \frac{R \,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\varDelta - \varDelta_1)}{\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta_1}{2}}$$

$$\text{und } \frac{ah}{AH} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta_1}{2}\,2\,.\,\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}$$

Sind nun $\varDelta$ und $\varDelta_1$ sehr wenig von einander verschieden, so ist

$$\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varDelta_1}{2} = \mathrm{Cos}^2\,\frac{\varDelta}{2} \text{ und } \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}}{\frac{\varDelta - \varDelta_1}{2}} = 1$$

somit die lineare Vergrösserung:

$$1)\ v = \frac{ah}{AH} = \frac{1}{2\,\mathrm{Cos}^2 \frac{\varDelta}{2}}$$

und die Flächenvergrösserung $v^2 = \frac{1}{4\,\mathrm{Cos}^4 \frac{\varDelta}{2}}$

für die Mitte der Karte ist $\varDelta = 0$ und $v = \frac{1}{2\,\mathrm{Cos}^2\,0^0} = \frac{1}{2}$

für die Grenze der Karte ist bei der Darstellung der Halbkugel

$$\varDelta = 90^0 \text{ und } v = \frac{1}{2\,\mathrm{Cos}^2\,45} = 1$$

An den Grenzen der Karte ist alsdann das Vergrösserungsverhältniss doppelt so gross wie in der Mitte.

Da die stereographische Projektion in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so ist das Vergrösserungsverhältniss für alle Richtungen um einen bestimmten Punkt A dasselbe, welches auch die Lage des grössten Kreises QAO ist, auf dem der Punkt A liegt.

Berechnet man für verschiedene Werthe von $\varDelta$ die entsprechenden Werthe von v nach Glch. 1, so ergeben sich für v folgende Werthe:

$\varDelta = 0^0$	30^0	45^0	60^0	90^0
$v = 0{,}5000$	0,5359	0,5858	0,6666	1

Man sieht daraus, dass das Vergrösserungsverhältniss bis zu einer Entfernung von 60^0 vom Gegenpunkte des Auges nahezu constant bleibt und daher Karten bis zu dieser Ausdehnung mit keinen grossen Fehlern behaftet sein werden.

2. Die Projektion von Mercator. Bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion (siehe Seite 65) ging man von der Voraussetzung aus, dass die Karte in den kleinsten Theilen ähnlich sein solle. Obgleich es daher unnöthig ist noch einmal die Aehnlichkeit nachzuweisen, so kann doch eine Verallgemeinerung des Beweises der Aehnlichkeit insofern stattfinden, dass man auf der Kugel ein unendlich kleines sphärisches Curvenstück p q (Fig. 28 Seite 72) wählt, welches mit irgend einem Meridiane den Winkel $qpr = \zeta$ einschliesst, und nachweist, dass bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion $p'q'$ dieses Curvenstückes mit der Projektion des entsprechenden Meridianes denselben Winkel bildet. Ist dieser Beweis für ein beliebiges Curvenstück geleistet, so werden für einen bestimmten Punkt der Kugel alle sphärischen Curvenelemente, welche durch diesen Punkt gehen, mit seinem Meridiane in Bild und Original