Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

2. Die Projektion von Mercator

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

somit die lineare Vergrösserung:

$$1)\ v = \frac{ah}{AH} = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2 \frac{\varDelta}{2}}$$

und die Flächenvergrösserung $v^2 = \frac{1}{4\ \mathrm{Cos}^4 \frac{\varDelta}{2}}$

für die Mitte der Karte ist $\varDelta = 0$ und $v = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2\ 0^0} = \frac{1}{2}$

für die Grenze der Karte ist bei der Darstellung der Halbkugel

$$\varDelta = 90^0 \text{ und } v = \frac{1}{2\ \mathrm{Cos}^2\ 45} = 1$$

An den Grenzen der Karte ist alsdann das Vergrösserungsverhältniss doppelt so gross wie in der Mitte.

Da die stereographische Projektion in den kleinsten Theilen ähnlich ist, so ist das Vergrösserungsverhältniss für alle Richtungen um einen bestimmten Punkt A dasselbe, welches auch die Lage des grössten Kreises QAO ist, auf dem der Punkt A liegt.

Berechnet man für verschiedene Werthe von $\varDelta$ die entsprechenden Werthe von v nach Glch. 1, so ergeben sich für v folgende Werthe:

$\varDelta = 0^0$	30^0	45^0	60^0	90^0
$v = 0{,}5000$	0,5359	0,5858	0,6666	1

Man sieht daraus, dass das Vergrösserungsverhältniss bis zu einer Entfernung von 60^0 vom Gegenpunkte des Auges nahezu constant bleibt und daher Karten bis zu dieser Ausdehnung mit keinen grossen Fehlern behaftet sein werden.

2. Die Projektion von Mercator. Bei der Construktion einer Karte nach Mercatorsprojektion (siehe Seite 65) ging man von der Voraussetzung aus, dass die Karte in den kleinsten Theilen ähnlich sein solle. Obgleich es daher unnöthig ist noch einmal die Aehnlichkeit nachzuweisen, so kann doch eine Verallgemeinerung des Beweises der Aehnlichkeit insofern stattfinden, dass man auf der Kugel ein unendlich kleines sphärisches Curvenstück pq (Fig. 28 Seite 72) wählt, welches mit irgend einem Meridiane den Winkel $qpr = \zeta$ einschliesst, und nachweist, dass bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion $p'q'$ dieses Curvenstückes mit der Projektion des entsprechenden Meridianes denselben Winkel bildet. Ist dieser Beweis für ein beliebiges Curvenstück geleistet, so werden für einen bestimmten Punkt der Kugel alle sphärischen Curvenelemente, welche durch diesen Punkt gehen, mit seinem Meridiane in Bild und Original

ebenfalls dieselben Winkel einschliessen und daher die Curvenelemente unter sich in Bild und Original auch gleiche Winkel bilden d. h. die Mercatorprojektion ist alsdann in den kleinsten Theilen ähnlich.

In Fig. 28 S. 72 sei qrp ein unendlich kleines sphärisches Dreieck, pr sei ein Meridianbogen, qr ein Parallelkreisbogen und pq ein unendlich kleines Curvenelement, das man sich auch durch ein Kreisbogenelement ersetzt denken kann. Ist ferner $\measuredangle$ qpr $= \zeta$ so ergibt sich

$$\operatorname{Tg} \zeta = \frac{q\,r}{p\,r}$$

oder da $$qr = cd \operatorname{Cos} \varphi = R\,(l_1 - l) \operatorname{Cos} \varphi$$

und $$pr = R\,(\varphi_1 - \varphi)$$

$$\operatorname{Tg} \zeta = \frac{(l_1 - l)}{(\varphi_1 - \varphi)} \operatorname{Cos} \varphi$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $(l_1 - l)$ den Arc. der Längendifferenz, $(\varphi_1 - \varphi)$ denjenigen der Breitendifferenz der Punkte p und q.

Ferner ist bei einer Karte nach Mercatorsprojektion die Projektion des Parallelkreisbogens qr gleich der Länge des Aequatorbogens, welcher der Längendifferenz $(l_1 - l)$ entspricht, also für $R = 1$

$$q'\,r' = l_1 - l$$

Für die Projektion des Meridianbogens pr wurde dagegen S. 66 gefunden

$$p'\,r' = d\lambda = \frac{d\,\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} \text{ oder da } d\,\varphi = \varphi_1 - \varphi$$

$$p'\,r' = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi} \text{ und daher}$$

$$\operatorname{Tg} \zeta' = \frac{q'\,r'}{p'\,r'} = \frac{l_1 - l}{\varphi_1 - \varphi} \operatorname{Cos} \varphi$$

Es ist also $\operatorname{Tg} \zeta' = \operatorname{Tg} \zeta$ und $\zeta' = \zeta$ d. h. die Projektion des Curvenelementes schliesst in Wirklichkeit mit dem Meridiane denselben Winkel ein, wie das Curvenelement selbst.

Um für die Merkatorprojektion das Vergrösserungsverhältniss v zu bestimmen, dividire man die Projektion eines Meridianelementes mit seinem Originale. Es ist aber für $R = 1$ ein Meridianelement

$$pr = (\varphi_1 - \varphi)$$

während seine Projektion $p'\,r' = \frac{\varphi_1 - \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}$ somit die lineare Vergrösserung $v = \frac{p' r'}{pr} = \frac{1}{\text{Cos}\,\varphi} = \text{Sec}\,\varphi$

und die Flächenvergrösserung

$$v^2 = \frac{1}{\text{Cos}^2\,\varphi} = \text{Sec}^2\,\varphi$$

3. Lambert's konforme Kegelprojektion. Stellt man sich die Aufgabe eine conforme Kegelprojektion zu konstruiren, bei welcher die Parallelkreise durch concentrische Kreise dargestellt werden, die Meridiane aber gerade Linien sind, welche vom Centrum der Parallelkreise ausgehen und unter sich Winkel bilden, die das n fache der Winkel sind, welche die Meridiane auf der Kugel mit einander einschliessen, so hat man zunächst eine Bedingungsgleichung abzuleiten, die erfüllt sein muss, damit die Projektion conform ist. Dieselbe wird auf folgende Weise erhalten:

Es seien ab und cd (Fig. 42) die Projektionen zweier Parallelkreisbogen AB und CD, welche demselben Centriwinkel entsprechen und deren Breiten φ und φ_1 sich sehr wenig von einander unterscheiden. Sind alsdann λ und λ_1 die Längen der Punkte c und a und ist $\lambda_1 - \lambda$ ebenfalls eine verschwindend kleine Grösse, so muss als Bedingung der Conformität die Proportion stattfinden:

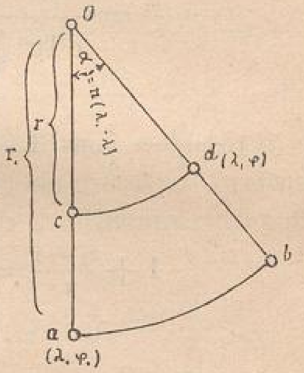

Fig. 42.

1) $\frac{ac}{cd} = \frac{AC}{CD}$

Setzt man den Arc. von $(90^0 - \varphi) = \psi$, den Arc. von $(90^0 - \varphi_1) = \psi_1$ ferner den Arc. der Längendifferenz $= (\lambda_1 - \lambda)$ so ist:

$$AC = R\,(\psi_1 - \psi) \text{ und } CD = R\,(\lambda_1 - \lambda)\ \text{Sin}\ \psi$$

Bezeichnen ferner r_1 und r die Radien der Parallelkreise ab und cd so ist $ac = r_1 - r$, und da der Centriwinkel α, welcher dem Bogen cd entspricht, gleich dem n fachen Längenunterschiede ist, also Arc. $\alpha = n\,(\lambda_1 - \lambda)$, so muss

$$cd = n\,(\lambda_1 - \lambda)\,r \quad \text{sein}$$

und Gleichung 1) lautet;

$$\frac{r_1 - r}{n\,(\lambda_1 - \lambda)\,r} = \frac{\psi_1 - \psi}{(\lambda_1 - \lambda)\,\text{Sin}\,\psi}$$