Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen

Möllinger, Oskar

Zürich, 1882

3. Lambert's konforme Kegelprojektion

urn:nbn:de:hbz:466:1-76263

die lineare Vergrösserung $v = \frac{p' r'}{pr} = \frac{1}{\text{Cos}\,\varphi} = \text{Sec}\,\varphi$

und die Flächenvergrösserung

$$v^2 = \frac{1}{\text{Cos}^2\,\varphi} = \text{Sec}^2\,\varphi$$

3. Lambert's konforme Kegelprojektion. Stellt man sich die Aufgabe eine conforme Kegelprojektion zu konstruiren, bei welcher die Parallelkreise durch concentrische Kreise dargestellt werden, die Meridiane aber gerade Linien sind, welche vom Centrum der Parallelkreise ausgehen und unter sich Winkel bilden, die das n fache der Winkel sind, welche die Meridiane auf der Kugel mit einander einschliessen, so hat man zunächst eine Bedingungsgleichung abzuleiten, die erfüllt sein muss, damit die Projektion conform ist. Dieselbe wird auf folgende Weise erhalten:

Es seien ab und cd (Fig. 42) die Projektionen zweier Parallelkreisbogen AB und CD, welche demselben Centriwinkel entsprechen und deren Breiten φ und φ_1 sich sehr wenig von einander unterscheiden. Sind alsdann λ und λ_1 die Längen der Punkte c und a und ist $\lambda_1 - \lambda$ ebenfalls eine verschwindend kleine Grösse, so muss als Bedingung der Conformität die Proportion stattfinden:

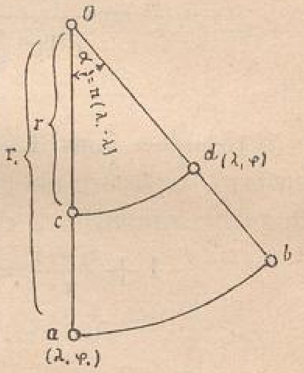

Fig. 42.

$$1)\quad \frac{ac}{cd} = \frac{AC}{CD}$$

Setzt man den Arc. von $(90^0 - \varphi) = \psi$, den Arc. von $(90^0 - \varphi_1) = \psi_1$ ferner den Arc. der Längendifferenz $= (\lambda_1 - \lambda)$ so ist:

$$AC = R\,(\psi_1 - \psi) \text{ und } CD = R\,(\lambda_1 - \lambda)\ \text{Sin}\ \psi$$

Bezeichnen ferner r_1 und r die Radien der Parallelkreise ab und cd so ist $ac = r_1 - r$, und da der Centriwinkel α, welcher dem Bogen cd entspricht, gleich dem n fachen Längenunterschiede ist, also Arc. $\alpha = n\,(\lambda_1 - \lambda)$, so muss

$$cd = n\,(\lambda_1 - \lambda)\,r \quad \text{sein}$$

und Gleichung 1) lautet;

$$\frac{r_1 - r}{n\,(\lambda_1 - \lambda)\,r} = \frac{\psi_1 - \psi}{(\lambda_1 - \lambda)\,\text{Sin}\,\psi}$$

Hieraus folgt:

$$2)\quad \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\operatorname{Sin}\psi}$$

welche Gleichung erfüllt sein muss, damit obige Kegelprojektion conform ist.

Dieser Bedingung wird nun Genüge geleistet, wenn man nach Lambert den Radius irgend eines Parallelkreises

$$3)\quad r = c\,\mathrm{Tg}^n\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \text{ oder}$$

$$r = c\,\mathrm{Tg}^n\,\tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) \text{ oder}$$

$3a)\ r = c\,\mathrm{Tg}^n \frac{\psi}{2}$ macht, in welcher Gleichung c irgend eine Constante bezeichnet, die durch den Massstab der Karte bestimmt ist.

Um dies zu beweisen bilde man den Quotienten:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c\,\mathrm{Tg}^n \frac{\psi_1}{2}}{c\,\mathrm{Tg}^n \frac{\psi}{2}} = \left(\frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

$$1 + \frac{r_1}{r} - \frac{r}{r} = 1 + \left(\frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}\right)^n - \frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}} = \left(1 + \frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}} - \frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = \left(1 + \frac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}\right)^n$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\dfrac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}} = x$

so ist $1 + \frac{r_1 - r}{r} = (1 + x)^n$

$$\frac{r_1 - r}{r} = nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\psi_1 - \psi$ so ergibt sich:

$$4)\quad \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{x}{\psi_1 - \psi}\left(n + \frac{n(n-1)}{1.2}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \ldots\right)$$

Es ist aber $\dfrac{x}{\psi_1 - \psi} = \dfrac{\mathrm{Tg}\frac{\psi_1}{2} - \mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}(\psi_1 - \psi)} = \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{\mathrm{Tg}\frac{\psi}{2}(\psi_1 - \psi)\operatorname{Cos}\frac{\psi_1}{2}\operatorname{Cos}\frac{\psi}{2}}$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{2\frac{(\psi_1 - \psi)}{2}\operatorname{Sin}\frac{\psi}{2}\operatorname{Cos}\frac{\psi_1}{2}}$$

Ist nun $(\psi_1 - \psi)$ eine unendlich kleine Grösse, so ist

$$\frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}{\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)} = 1 \text{ und } \psi_1 = \psi$$

somit $\quad \dfrac{x}{\psi_1 - \psi} = \dfrac{1}{\text{Sin}\,\psi}$

und Gleichung 4) lautet:

$$5)\ \frac{r_1 - r}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{1}{\text{Sin}\,\psi}\left(n + \frac{n(n-1)}{1.2}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \ldots\right)$$

für $\psi_1 - \psi =$ einer unendlich kleinen Grösse ist aber auch

$$x = \frac{\text{Tg}\,\frac{\psi_1}{2} - \text{Tg}\,\frac{\psi}{2}}{\text{Tg}\,\frac{\psi}{2}}$$ eine unendlich kleine Grösse und die

Summe der in obiger Gleichung mit x multiplicirten Glieder verschwindet gegenüber n, wie sich auf folgende Weise leicht beweisen lässt: Es ist

$$\frac{n(n-1)}{1.2}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \ldots = x\left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x + \ldots\right)$$

dieser Ausdruck ist kleiner als $x\left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots\right)$

denn es ist x eine verschwindend kleine Grösse und wenn man an seine Stelle die Einheit setzt, so muss dadurch ein grösserer Ausdruck entstehen. Setzen wir zu obigem Ausdruck in der Klammer noch die Glieder $1 + \frac{n}{1}$ hinzu, so ist

$$x\left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots\right) > \frac{n(n-1)}{1.2}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \ldots$$

Die Klammer links enthält die Summe der Coefficienten der Binomialreihe, welche $= 2^n$ ist, somit $2^n x > \frac{n(n-1)}{1.2}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2 + \ldots$

Da nun x eine verschwindend kleine Grösse ist, so ist auch $2^n x$ verschwindend klein und der rechte Theil obiger Relation eine an Null grenzende Grösse. Gleichung 5 lautet daher:

$$\frac{r_1 - r)}{r(\psi_1 - \psi)} = \frac{n}{\text{Sin}\,\psi}$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung 2, welche die Bedingung der Conformität enthält.

Um die Constante n zu bestimmen, stelle man die Forderung, dass zwei beliebige Parallelkreise, welche die Poldistanzen ψ_1 und ψ_2 besitzen, in ihrer wahren Grösse projicirt werden. Sind alsdann r_1 und r_2 die Radien ihrer Projektionen, ferner α der gemeinschaftliche Centriwinkel ihrer Bilder und R der Radius der Erde, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{r_1 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Sin} \psi_1$$

$$\frac{r_2 \pi \alpha}{180} = 2 R \pi \operatorname{Sin} \psi_2$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\operatorname{Sin} \psi_1}{\operatorname{Sin} \psi_2}$$

oder wenn man nach Glch. 3a für r_1 und r_2 ihre Werthe setzt:

$$\left(\frac{\operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}}\right)^n = \frac{\operatorname{Sin} \psi_1}{\operatorname{Sin} \psi_2}$$

$$n \left(\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}\right) = \log \operatorname{Sin} \psi_1 - \log \operatorname{Sin} \psi_2$$

$$6) \quad n = \frac{\log \operatorname{Sin} \psi_1 - \log \operatorname{Sin} \psi_2}{\log \operatorname{Tg} \frac{\psi_1}{2} - \log \operatorname{Tg} \frac{\psi_2}{2}}$$

Das Vergrösserungsverhältniss v wird auf folgende Weise erhalten. Es ist $v = \frac{a c}{A C} = \frac{c d}{C D}$ (siehe Fig. 41)

oder da $c d = n (\lambda_1 - \lambda) r$ und $CD = R (\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Sin} \psi$

so ist $v = \frac{n (\lambda_1 - \lambda) r}{R (\lambda_1 - \lambda) \operatorname{Sin} \psi} = \frac{n r}{R \operatorname{Sin} \psi}$

oder wenn man für r seinen Werth setzt:

$$v = \frac{n c}{R \operatorname{Sin} \psi} \operatorname{tg}^n \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Flächenvergrösserung ist das Quadrat dieser Grösse. Diese Projektionsmethode rührt von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert her, welcher sie in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik beschrieben hat (Berlin 1772).

Da sie nebst der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen als Hauptvorzüge noch die Leichtigkeit der Construktion des Netzes, ferner die richtige Abbildung der Winkel (mit einziger Ausnahme der Winkel am Pole) und die Gleichheit der zwischen denselben Parallelkreisen liegenden Meridianbogen besitzt, so eignet sie sich vorzüglich zur Darstellung von Ländern von grosser Längenerstreckung. Sie wurde von der geographischen Gesellschaft in Petersburg zur Construktion der im Mai 1862 publicirten Karte des europäischen Russlandes und des Kaukasus (12 Blätter im Massstabe 1 : 1680000) welche sich von

36° bis 68° Breite erstreckt, angewandt, wobei jedoch der Abplattung der Erde Rechnung getragen wurde.

Ueber andere conforme Abbildungen siehe die berühmte Abhandlung von Gauss: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird," welche 1822 den Preis der Kopenhagener Akademie erlangte und im dritten Hefte von Schumachers Astronomischen Abhandlungen (Altona 1825) erschienen ist. Die allgemeine Theorie über die konformen Abbildungen findet sich auch in Gretschels Lehrbuch der Kartenprojektionen (Verlag von Friedrich Voigt, Weimar 1873) Seite 199 Kap. V., ferner in J. J. Littrow's Chorographie (Becks Universitätsbuchhandlung, Wien 1833) Seite 176.