Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Die

trigonometrische Auflösung

des

Dreieckes.

Von

Hans Hartl.

III

Alfred Hölder,
k.u.k. Hof- und Universitäts-Buchhändler

A. Lehrbücher für höhere Handelslehranstalten

(Handelsakademien).

Berger, Hermann, weil. Professor an der Wiener Handelsakademie und amtlich beeideter Gerichtsdolmetsch für die französische und englische Sprache, **Lehrbuch der englischen Sprache für den Handels- und Gewerbestand.** Anleitung zur gründlichen Erlernung der Umgangs- und Geschäftssprache sowie der Handelskorrespondenz. 14., unveränderte Auflage. Herausgegeben und sorgfältig revidiert von L. C. Hurt, Professor an der Wiener Handelsakademie. Preis gebunden 3 K 50 h.

Berger, J., Direktor der Handelsakademie und Hon.-Dozent an der k. k. Techn. Hochschule in Graz, Mitglied der k. k. Prüfungskommission für das Lehramt an zweiklassigen Handelsschulen, **Handelskunde** für höhere Handelsschulen. Preis gebunden 2 K 20 h.

— — **Wechselkunde** für höhere Handelsschulen. Preis gebunden 1 K 40 h.

— — **Einführung in das Handels- und Gewerberecht.** Für höhere Handelsschulen. Preis gebunden 2 K.

Bisching, Prof. Dr. Anton, Allgemeine Warenkunde, zum Gebrauche für Handels- und Gewerbeschulen. Mit 36 Abbildungen. 6., verbesserte Auflage. Preis geheftet 5 K, gebunden 5 K 40 h.

Haberer, Karl, Direktor der Handelsakademie in Innsbruck, **Lehrbuch der Handels- und Wechselkunde** für höhere Handelslehranstalten (Handelsakademien). Preis gebunden 3 K 60 h.

— — Die wichtigsten Fälle der **Devisenarbitrage,** tabellarisch zusammengestellt. Preis 70 h.

Hurt, L. C., Professor of English at the „Wiener Handelsakademie" and formerly at the „k. k. Theresianische Akademie", **English poems and poetical extracts for recital.** Supplement zu dem Lesebuch „English prose reader von Palotta und Hurt". 2. edition. Preis 40 h.

Kralik, Anton, Oberamtsoff. b. k. k. Hauptzollamte, Doz. an der Handelsakademie in Wien, **Lehrbuch der österreichisch-ungarischen Zollgesetze.** Für den Unterricht an höheren Handelslehranstalten. Zugleich Handbuch für Handels- und Gewerbetreibende sowie Angestellte aller Transportanstalten. Preis 3 K 20 h.

Kreibig, Dr. Josef Klemens, Direktor der k. k. Handelsakademie in Graz, **Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik** für **vierklassige** höhere Handelslehranstalten. I. Teil. 3., verbesserte Auflage. Preis gebunden 2 K 74 h. — II. Teil. 3., verbesserte Auflage. Preis gebunden 2 K 88 h. — III. Teil. 3., verbesserte Auflage. Preis gebunden 3 K 24 h. — IV. Teil. 3., verbesserte Auflage. Preis gebunden 2 K 64 h.

Lederer, J. U. Dr. Paul, Advokat und Lehrer des Handels- und Gewerberechtes an der deutschen Handelsakademie in Pilsen, **Lehrbuch des Handels- und Gewerberechtes** für Handelsakademien und höhere Handelsschulen. Preis gebunden 2 K 60 h.

Lünemann, Erich, Repetitorium der Handelswissenschaften. (Kaufmänn. und politische Arithmetik, Buchhaltung, Kontorarbeiten, Korrespondenz, Handelskunde. Wechsel- und Handelsrecht.) Ein Hilfs- und Nachschlagebuch. 2., verbesserte Auflage. Preis 4 K.

Mayr, Dr. Richard, Professor an der Wiener Handelsakademie, **Lehrbuch der Handelsgeschichte** auf Grundlage der Sozial- und Wirtschaftsgeschichte. Mit einem bibliographischen Anhange 2., umgearbeitete und gekürzte Auflage. Preis gebunden 3 K 40 h.

— — **Kanon der wichtigsten welt- und handelsgeschichtlichen Daten.** Nebst einem Anhang: 1. Hauptdaten der österreichischen Geschichte. 2. Zeittafel zur Geschichte der deutschen Literatur. 2., veränderte und verbesserte Auflage. Preis 75 h.

— — **Deutsches Lesebuch** für höhere Handelsschulen (Handelsakademien). Für den 1. und 2. Jahrgang (beziehungsweise Vorbereitungsklasse und 1. Jahrgang) höherer Handelsschulen. 2., verbesserte Auflage. Preis gebunden 4 K 80 h.

Mayr, Dr. Richard, Repetitorium der allgemeinen Geschichte in tabellarischer und zusammenhängender Darstellung. Nebst einem Anhang, enthaltend: 1. Hauptdaten der österreichischen Geschichte; 2. Übersicht der Literatur-, der neueren Musik- und der Kunstgeschichte. Preis 1 K 80 h.

— — **Literarhistorisches Lesebuch.** II. Teil des Lesebuches für höhere Handelsschulen (Handelsakademien). Für den 3., eventuell 2. und 3. Jahrgang höherer Handelsschulen. 2. Abdruck. Preis gebunden 5 K.

— — und **Dr. Hans Pischek, Hilfsbuch für den deutschen Unterricht** (Grammatik, Stilistik, Metrik und Poetik). 2., verbesserte Auflage. Preis gebunden 2 K 44 h.

Mitteregger, Dr. Josef, k. k. Professor und Lehrer der Chemie und Warenkunde an der Mädchen-Handelsschule in Klagenfurt, und **Dr. Anton Effenberger,** Direktor der Handelsakademie in Linz, **Lehrbuch der Chemie und chemischen Technologie** für höhere Handelslehranstalten. Mit einem Anhange: Übersichtliche Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse der wichtigsten Mineralverbindungen. Mit 55 Abbildungen. Preis gebunden 3 K 40 h.

Oppelt, Dr. Rudolf, Professor an der Grazer Handelsakademie, **Lehrbuch der unorganischen Chemie und chemischen Technologie** für höhere Handelsschulen und verwandte Lehranstalten. Mit 40 Abbildungen. Preis gebunden 2 K 40 h.

— — **Lehrbuch der organischen Chemie und chemischen Technologie** für höhere Handelsschulen und verwandte Lehranstalten. Mit 23 Abbildungen und 34 Holzschnitten von Ringformeln. Preis gebunden 2 K 30 h.

Ottel, Klemens, Direktor der deutschen Handelsakademie in Olmütz, **Handels- und Wechselkunde** für höhere Handelsschulen. 2., vermehrte Auflage. Preis gebunden 2 K 40 h.

Palotta, C. W., late Professor of English at the „Wiener Handelsakademie" and the „Höher. Artillerie- und Geniekurs", and **L. C. Hurt,** Professor of English at the „Wiener Handelsakademie" and late at the „k. k. Theresianische Akademie", **English prose reader.** A selection for the use of commercial and technical schools. 2. edition. (With many additions and alterations.) Preis gebunden 3 K 60 h.

Richter, Ignaz, Direktor der Reichenberger Handelsakademie, **Lehrbuch der Physik** für höhere Handelslehranstalten. Mit 281 in den Text gedruckten Holzschnitten und 3 Tafeln. Preis gebunden 3 K 40 h.

Rothbaum, Gustav, Direktor der neuen Wiener Handelsakademie und der Handelsschulen des Wiener kaufmännischen Vereines, **Lehrbuch der Algebra und politischen Arithmetik** für höhere Handelsschulen. Preis gebunden 3 K 20 h.

— — — In 2 Bänden gebunden. I. Teil 1 K 85 h. — II. Teil 1 K 85 h.

Sauer, Johann Julius, Professor an der Kaiser Franz Josef-Höheren Handelsschule in Brünn, **Englisches Lesebuch** für Handelslehranstalten. Preis gebunden 4 K 50 h.

— — **Specimens of commercial correspondence.** Preis gebunden 5 K.

Sinwel, Rudolf, Professor der Kaiser Franz Josef-Höheren Handelsschule in Brünn, **Lehrbuch der Geschichte** für höhere Handelsschulen (Handelsakademien) und verwandte Lehranstalten. I. Teil: Das Altertum. Preis gebunden 2 K 80 h. — II. Teil. Das Mittelalter. Preis gebunden 2 K 90 h. — Teil III: Die Neue Zeit. Bearbeitet von Franz Hermann Eichler, Professor der Handelsakademie in Aussig. Preis gebunden 3 K 30 h.

Sonndorfer, Dr. Rudolf, k. k. Regierungsrat, Direktor der Wiener Handelsakademie, und **Adrian Schuster,** Professor an der Wiener Handelsakademie, **Lehrbuch der internationalen Handelskunde** für Handelsakademien und höhere Handelslehranstalten. Preis gebunden 5 K.

Uebe, Friedrich, und **Dr. M. Müller,** Professoren an der Aussiger Handelsakademie, **Französisches Lesebuch** für kommerzielle Lehranstalten. 2., neu bearbeitete und vermehrte Auflage. Preis gebunden 3 K 60 h.

Verzan, Armando, Professor an der Grazer Handelsakademie, **Italienische Konversationsgrammatik** für Mittel- und höhere Handelsschulen. 2., verbesserte Auflage. Preis geheftet 3 K 10 h, gebunden 3 K 60 h.

Zehden, Dr. Karl, weil. k. k. Hofrat und Inspektor für den kommerziellen Unterricht, **Handelsgeographie** auf Grundlage der neuesten Forschungen und Ergebnisse der Statistik. Mit einer Weltverkehrskarte. 10., verbesserte Auflage. Durchgesehen und ergänzt von **Dr. Robert Sieger,** Professor an der Universität Graz, früher an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Preis geheftet 6 K 40 h, geb. 7 K.

Ziegler, Julius, k. k. a. o. Professor an der Exportakademie etc., **Lehrbuch der Buchhaltung** für höhere kommerzielle Lehranstalten. I. Teil: Einfache Buchhaltung. Preis gebunden 2 K 60 h. — II. Teil: Doppelte Buchhaltung. Preis gebunden 3 K 40 h.

B. Lehrbücher für höhere Handelslehranstalten (Handelsakademien) und für zweiklassige Handelsschulen.

Auswahl kaufmännischer Fachausdrücke in neuer Rechtschreibung. Preis 24 h.

Bisching, Dr. A., und **Dr. C. Rothe**, **Abriß der Naturgeschichte** für den Unterricht an höheren und an zweiklassigen Handelsschulen mit besonderer Berücksichtigung der Warenkunde. 2., verbesserte Auflage. 2. Abdruck. Mit 207 in den Text gedruckten Abbildungen. Preis gebunden 2 K 20 h.

Dück, Johannes, Professor der Handelsakademie und Universitätslektor in Innsbruck. **Leitfaden der Geschäfts-Stenographie.** Preis 72 h.

Gautsch, J. v., **Lehrbuch der kaufmännischen Korrespondenz** für österreichische Handelsschulen. 3., verbesserte Auflage. Preis gebunden 4 K 20 h.

Gleisberg, Dr. E., **Allgemeine Wechselkunde** nebst Lehre von den Anweisungen, Bons, Schecks (Postscheck) und dem Abrechnungsverkehr (Saldierungsverein) im Anschluß an das Giro-(Erlags-)Geschäft namentlich der Österreichisch-ungarischen Bank und des k. k. Postsparkassenamtes. Preis gebunden 2 K 30 h.

Richter, Ignaz, Direktor der Reichenberger Handelsakademie, **Anfangsgründe der Naturlehre** für den Unterricht an zweiklassigen Handelsschulen. 2., verbesserte Auflage. Mit 186 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis gebunden 1 K 60 h.

Schiff, Prof. Josef, **Der Geschäftsstenograph.** Hand- und Übungsbuch für die stenographische Praxis im kaufmännischen Berufsleben. Mit Schlüssel. 6., durchgesehene Auflage. I. Abteilung: Theoretischer und praktischer Teil, Phraseologie und Kürzungsverzeichnis. Preis geheftet 1 K 76 h. — II. Abteilung: Schlüssel. Preis 80 h.

Ziegler, Julius, **Leitfaden des Wechselrechtes** für österreichische Handelsschulen und verwandte Lehranstalten als auch zum Selbstunterrichte. 2., unveränderter Abdruck mit Nachtrag: Der Wechselprozeß. Preis gebunden 1 K 60 h.

C. Lehrbücher für zweiklassige Handelsschulen.

Allina, Max, Handelsschuldirektor, **Lehr- und Ubungsbuch der einfachen und doppelten Buchführung** für zweiklassige Handelsschulen. 5. Auflage. Preis gebunden 3 K 24 h.

— — **Materialien für das praktische Übungskontor** an zweiklassigen Handelsschulen. 2., umgearbeitete Auflage. Preis gebunden 80 h.

Berger, J., Direktor der Handelsakademie in Graz, **Lehr- und Übungsbuch der kaufmännischen (einfachen und doppelten) Buchhaltung** für zweiklassige Handelsschulen. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. Preis gebunden 2 K 52 h.

Bisching, Prof. Dr. A., k. k. Schulrat und Mitglied der k. k. Prüfungskommission für das Lehramt an zweiklassigen Handelsschulen, **Allgemeine Warenkunde.** 7. Auflage. Bearbeitet zum Gebrauche an zweiklassigen Handelsschulen. Mit 37 Abbildungen. Preis gebunden 2 K 60 h.

Duile, Dr. Ferdinand, Professor an der Handelsakademie in Graz, **Warenkunde** für zweiklassige Handelsschulen. Preis gebunden 3 K 20 h.

Engelhard, Prof. Karl, **Lehrbuch der Gabelsbergerschen Stenographie.** Text und stenographischer Teil. 4., verbesserte Auflage, besorgt von **Hans Koppensteiner**, k. k. Professor am Karl Ludwig-Gymnasium in Wien. Mit Berücksichtigung der vom V. Deutschen Stenographentage in Wien beschlossenen Schreibweisen. Preis gebunden 1 K 90 h. — Schlüssel hiezu, 4., verbesserte Auflage. Preis geheftet 72 h.

— — **Lesebuch für angehende Gabelsberger-Stenographen.** 6. Auflage, besorgt von **Hans Koppensteiner**, k. k. Professor am Karl Ludwig-Gymnasium in Wien. Mit Berücksichtigung der vom V. Deutschen Stenographentage in Wien beschlossenen Schreibweisen. Preis gebunden 2 K 42 h.

Fortsetzung des Verzeichnisses am Schlusse des Buches.

Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren.

Für den Gebrauch an Werkmeister- und Baugewerkeschulen
und für den Selbstunterricht
bearbeitet von

Hans Hartl,
k. k. Professor an der Staatsgewerbeschule in Reichenberg.

Dritte Auflage.

Mit 55 in den Text gedruckten Figuren und 300 Übungsbeispielen samt Resultaten nebst einer Tafel der Winkelfunktionen.

Inhaltlich im wesentlichen unveränderter Abdruck der nach der neuen Rechtschreibung hergestellten, mit Erlaß des hohen k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 11. Dezember 1899, Z. 32.646, zum Unterrichtsgebrauche an Werkmeisterschulen allgemein zugelassenen zweiten Auflage.

Preis gebunden: 96 h.

Wien, 1907.
Alfred Hölder,
k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler,
Rotenturmstraße 13.

Zur Bezeichnung der Winkel wurden in diesem Büchlein hie und da auch einige griechische Buchstaben benutzt.

Es sind dies:

α (Alpha),	γ (Gamma),
β (Beta),	δ (Delta).

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Inhalt.

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Haben zwei oder mehrere rechtwinklige Dreiecke einen Spitzwinkel gleich, so sind sie **ähnlich**.

Das Längenverhältnis zweier Seiten des einen Dreieckes ist dann genau gleich dem Längenverhältnis der beiden entsprechenden (homologen) Seiten in jedem der ähnlichen Dreiecke.

Ist z. B. in den rechtwinkligen Dreiecken A B C und M N P (Fig. 1), in denen üblicher Weise die Winkel mit A, B, C, M, N, P, die Seiten mit a, b, c, m, n, p bezeichnet sind,

$$\sphericalangle A = \sphericalangle M = 32^0,$$

so ist $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

und es muß deshalb

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{p} \qquad \frac{b}{c} = \frac{n}{p}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \frac{b}{a} = \frac{n}{m} \quad \text{sein.}$$

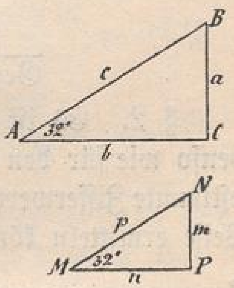


Fig. 1.

Würde man die in Fig. 1 dargestellten Dreiecke in zehnfacher Größe verzeichnen und sodann ihre Seiten an einem genauen Millimeterstabe abmessen, so würde man folgende Maße erhalten:

$a = 132{\cdot}5\ mm$ $\qquad$ $m = 84{\cdot}8\ mm$
$b = 212\ mm$ $\qquad$ $n = 135{\cdot}7\ mm$
$c = 250\ mm$ $\qquad$ $p = 160\ mm$

Durch Ausführung der entsprechenden Divisionen ergibt sich:

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{p} = 0{\cdot}530 \qquad \frac{b}{c} = \frac{n}{p} = 0{\cdot}848$$

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{n} = 0{\cdot}625 \qquad \frac{b}{a} = \frac{n}{m} = 1{\cdot}600$$

Das Ergebnis dieser Divisionen läßt sich folgendermaßen aussprechen:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem der eine Spitzwinkel 32^0 beträgt, ist das Verhältnis:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} &= 0{\cdot}530\\ \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} &= 0{\cdot}848\\ \frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} &= 0{\cdot}625\\ \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} &= 1{\cdot}600\end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

§ 2. Es ist nun einleuchtend, daß diese vier Seitenverhältnisse ebenso wie für den Winkel 32^0 auch für jeden andern Spitzwinkel ganz bestimmte Zifferwerte besitzen müssen, die wir annähernd etwa in folgender Weise ermitteln könnten.

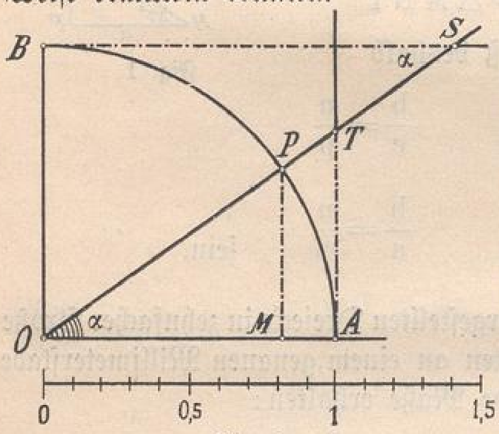


Fig. 2.

Wir schlagen von O aus (Fig. 2) einen Kreis mit dem Radius $OA = r$ und errichten in den Punkten A und B die zu einander senkrechten Tangenten AT und BS.

Um nun für einen bestimmten Winkel α die oben genannten Verhältnisse zu ermitteln, tragen wir diesen Winkel von OA aus auf.

$$\sphericalangle AOS = \sphericalangle \alpha$$

Es ist dann auch als Wechselwinkel

$$\sphericalangle BSO = \sphericalangle \alpha$$

Verzeichnen wir nun die Gerade $PM \perp OA$, so ergibt sich für den Winkel α

aus dem $\triangle OPM \ldots \dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PM}{r}$

" " $\triangle OPM \ldots \dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM}{r}$

---

*) Die Bezeichnungen „gegenüberliegend" und „anliegend" beziehen sich auf die Lage der betreffenden Kathete gegen den Winkel 32^0.

$$\text{aus dem } \triangle OAT \ldots \frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{r}$$

$$\text{„ „ } \triangle OBS \ldots \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{r}$$

Zeichnet man die Fig. 2 derart vergrößert, daß der Halbmesser des Kreises 1 m mißt, so wird, wenn der Winkel α beispielsweise 35° beträgt, eine genaue Abmessung ergeben:

$$PM = 0{\cdot}573\, m \quad OM = 0{\cdot}819\, m \quad AT = 0{\cdot}700\, m \quad BS = 1{\cdot}428\, m$$

Die oben genannten Verhältnisse nehmen daher für den Winkel 35° folgende Werte an:

$$\frac{PM}{r} = \frac{0{\cdot}573\, m}{1\, m} = 0{\cdot}573 \qquad \frac{OM}{r} = \frac{0{\cdot}819\, m}{1\, m} = 0{\cdot}819$$

$$\frac{AT}{r} = \frac{0{\cdot}700\, m}{1\, m} = 0{\cdot}700 \qquad \frac{BS}{r} = \frac{1{\cdot}428\, m}{1\, m} = 1{\cdot}428.$$

Ist also in Fig. 2 der Kreishalbmesser = 1, so geben die Maßzahlen der Strecken PM, OM, AT und BS unmittelbar den Wert jener vier Verhältnisse an.

§ 3. In solcher Weise können wir uns die genannten vier Verhältniswerte für alle Spitzwinkel von 0°—90° ermitteln und zu einer Tabelle zusammenstellen. Dabei empfiehlt es sich, statt der bisher gebrauchten umständlichen Bezeichnungen kürzere Benennungen einzuführen. Zu diesem Zwecke nennt man das Verhältnis:

$\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ den **sinus** **(sin.)**

$\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypothenuse}}$ „ **cosinus** **(cos.)**

$\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}}$ „ **tangens** **(tg.)**

$\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}}$ „ **cotangens** **(cotg.)**

jenes Winkels, auf welchen sich die Bezeichnungen „gegenüberliegend" u. „anliegend" beziehen.

Unter Einführung dieser kürzeren Bezeichnung lassen sich die im § 2 erhaltenen Verhältniswerte folgendermaßen anschreiben:

0·573 = sinus des Winkels 35° oder kürzer: 0·573 = sin 35°
0·819 = cosinus des Winkels 35° " " 0·819 = cos 35°
0·700 = tangens des Winkels 35° " " 0·700 = tg 35°
1·428 = cotangens des Winkels 35° " " 1·428 = cotg 35°

In derselben Weise gibt die am Schlusse dieser Schrift stehende Tabelle die Werte jener vier Seitenverhältnisse, die wir die „**winkelmessenden Verhältnisse**“ oder die „**Winkelfunktionen**“ (auch kurzweg „Funktionen“) nennen wollen, für alle Spitzwinkel von 0°—90° in Sprüngen von 30 zu 30 Minuten an.

Aus dieser Tabelle entnehmen wir unter Beachtung der oben stehenden Überschrift für die links angegebenen Winkel z. B.

sin 38° = 0·6157 cos 38° = 0·7880
tg 38° = 0·7813 cotg 38° = 1·2799

D. h. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine Spitzwinkel 38° beträgt, so ist das Verhältnis der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse = 0·6157, das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse = 0·7880, das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete = 0·7813 und das Verhältnis der anliegenden zur gegenüberliegenden Kathete = 1·2799.

Anmerkung: Sowohl der sinus als auch der cosinus kann nie größer als 1 sein. Dagegen können tangens und cotangens jeden beliebigen Wert annehmen.

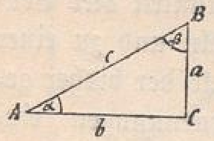


Fig. 3.

§ 4. Fassen wir beide Spitzwinkel α und β (Fig. 3) eines rechtwinkligen Dreieckes ins Auge, so finden wir, daß jede Kathete, welche dem einen Winkel gegenüberliegt, dem zweiten Winkel anliegt, und umgekehrt. So ist z. B.

a dem $\sphericalangle\, \alpha$ gegenüberliegend, dem $\sphericalangle\, \beta$ anliegend,
b dem $\sphericalangle\, \beta$ gegenüberliegend, dem $\sphericalangle\, \alpha$ anliegend.

Deshalb ist nach den in § 3 gegebenen Erklärungen

$\frac{a}{c} = \sin \alpha$ und zugleich $\frac{a}{c} = \cos \beta$ daher $\sin \alpha = \cos \beta$

$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ " " $\frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \beta$ " $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$

D. h. 1. **Der sinus eines Winkels gibt zugleich den cosinus seines Komplementswinkels*) an.**

*) Unter Komplementswinkel ist der Ergänzungswinkel zu 90° zu verstehen. So ist z. B. der Komplementswinkel von 25°30′ gleich 64°30′.

2. **Der cosinus eines Winkels gibt zugleich den sinus seines Komplementswinkels an.**

3. **Der tangens eines Winkels gibt zugleich den cotangens seines Komplementswinkels an.**

4. **Der cotangens eines Winkels gibt zugleich den tangens seines Komplementswinkels an.**

In unserer Tabelle (S. 42—45) ist für jeden linksstehenden (schwarzgedruckten) Winkel in derselben Zeile am rechten Rande der zugehörige Komplementswinkel angegeben, und man erkennt leicht, daß nach vorstehenden Sätzen jeder Tabellen-Wert zweierlei Bedeutung hat. Er gibt

1. die **oben** angegebene Funktion des **linksstehenden** Winkels, und
2. die **unten** angegebene Funktion der **rechtsstehenden** Winkels an.

So ist z. B. (S. 42, 43.)

$0{\cdot}2756 = \sin 16^0 = \cos 74^0$ $\quad$ $0{\cdot}8616 = \cos 30^0 30' = \sin 59^0 30'$

$0{\cdot}6249 = \mathrm{tg}\, 32^0 = \mathrm{cotg}\, 58^0$ $\quad$ $1{\cdot}3514 = \mathrm{cotg}\, 36^0 30' = \mathrm{tg}\, 53^0 30'$

Daraus ist zu ersehen, daß eigentlich die Tabellen auf S. 44 und 45 überflüssig sind, da die Winkel von 45°—90° schon auf den Seiten 42 und 43, nämlich rechts zu finden sind. Für diese rot gedruckten Winkel gelten dann die unten angegebenen. gleichfalls rotgedruckten Funktionsbezeichnungen.

Für den Anfänger wird es sich jedoch empfehlen, die ganze Tabelle (S. 42 bis 45) zu benützen und hiebei nur die obenstehenden Funktionsbezeichnungen und die dazugehörigen linksstehenden Winkel in Betracht zu ziehen, also das Rotgedruckte vorläufig nicht zu beachten.

Um sich mit der Tabelle vertraut zu machen, löse man folgende Übungsbeispiele.

1. Man bestimme mittels der Tabelle:

sin 37°	sin 42°	sin 59°	sin 83°
sin 10° 30′	sin $51^1/_2$°	sin 70° 30′	sin $25^1/_2$°
tg 18°	tg 65°	tg 73°	tg 58°
tg 5° 30′	tg $48^1/_2$°	tg 61° 30′	tg $75^1/_2$°
cos 13°	cos 29°	cos 55°	cos 73°
cos 24° 30′	cos 82° 30′	cos $19^1/_2$°	cos $64^1/_2$°
cotg 32°	cotg 67°	cotg 17°	cotg 46°
cotg 4° 30′	cotg 37° 30′	cotg $16^1/_2$°	cotg $74^1/_2$°

2. Man gebe die durch ihre Funktionen bestimmten Winkel A, B . . x, y . . im Winkelmaße (in Graden und Minuten) an.

sin A = 0·1908	sin B = 0·6691	sin C = 0·9613
tg x = 0·3839	tg y = 1·0724	tg z = 2·6051
sin u = 0·4147	sin v = 0·7254	sin w = 0·9914
tg m = 0·0612	tg n = 0·4142	tg p = 4·5107
cos a = 0·7986	cos b = 0·9782	cos c = 0·4695
cotg α = 6·3138	cotg β = 1·4282	cotg γ = 0·3443
cos M = 0·7254	cos N = 0·3007	cos P = 0·9833
cotg X = 12·706	cotg Y = 3·6059	cotg Z = 0·7673

Resultate zu 2.

∢A = 11°	∢B = 42°	∢C = 74°
∢x = 21°	∢y = 47°	∢z = 69°
∢u = 24° 30′	∢v = 46° 30′	∢w = 82° 30′
∢m = 3° 30′	∢n = 22° 30′	∢p = 77° 30′
∢a = 37°	∢b = 12°	∢c = 62°
∢α = 9°	∢β = 35°	∢γ = 71°
∢M = 43° 30′	∢N = 72° 30′	∢P = 10° 30′
∢X = 4° 30′	∢Y = 15°30′	∢Z = 52° 30′

Korrektur der Winkelfunktionen bei Berücksichtigung einzelner Minuten.

§ 5. Ist ein Winkel bis auf einzelne Minuten gegeben, so hat man, um seine Funktionen zu bestimmen, so wie in den folgenden Beispielen vorzugehen.

1. Beispiel. **sin 39° 17′ ist zu bestimmen.**

Nach der Tabelle ist . . . sin 39° = 0·6293

Die neben dem sinus von 39° und 39° 30′ unter der Überschrift Korrektur für 1′ stehende Zahl 2·3 bedeutet: Wenn der Winkel 39° um je 1′ wächst, so wächst sein sinus um je 2·3 Einheiten der letzten Dezimalstelle. Da nun der gegebene Winkel um 17′ größer ist als 39°, so ist der sin 39° (0·6293) noch um 17 × 2·3 = 39·1 Einheiten der letzten Dezimalstelle zu vergrößern.

Daher: sin 39° = 0·6293
Korrektur für 17′ . . 39·1
sin 39° 17′ = 0·63321

2. Beispiel. **tg 70° 42′ ist zu bestimmen.**

Die Tabelle gibt an . . .	tg 70° 30′ =	2·8239
26·8 × 12 = Korrektur für 12′		321·6
	tg 70° 42′ =	**2·85606**

In derselben Weise ist auch die Korrektur für den cosinus oder cotangens eines Winkels zu berechnen. Doch ist die Korrektur in diesen Fällen zu subtrahieren, da cosinus und cotangens mit wachsendem Winkel abnehmen, wie ein Blick auf die Tabelle zeigt.

3. Beispiel. **cos 24° 39′ = ?**

Tabelle ...	cos 24° 30′ =	0·9100
1·2 × 9 = Korr. für 9′ =		— 10·8
	cos 24° 39′ =	0·90892

4. Beispiel. **cotg 16° 22′ = ?**

Tabelle .....cotg 16°	=	3·4874
37·2 × 22=Korr. für 22′	=	— 818·4
cotg 16° 22′	=	**3·40556**

Übungsbeispiele. Man bestimme:

sin 15° 18′	sin 62° 9′	sin 23° 47′	sin 68° 52′
tg 28° 21′	tg 58° 15′	tg 10° 39′	tg 62° 50′
cos 24° 13′	cos 50° 20′	cos 53° 37′	cos 15° 43′
cotg 70° 10′	cotg 11° 18′	cotg 64° 51′	cotg 19° 45′

Resultate.

0·2638	0·8842	0·4034	0·9317
0·5397	1·6161	0·1880	1·9488
0·9120	0·6383	0·5932	0·9626
0·3607	5·0071	0·4694	2·7856

Korrektur des Winkels.

§ 6. Ist umgekehrt die Funktion, durch welche ein Winkel bestimmt ist, in der Tabelle nicht vollständig enthalten, so sucht man den nächst kleineren Tabellenwert und notiert den zugehörigen Winkel. Den Überschuß der gegebenen Funktion über den Tabellenwert dividiert man sodann durch die nebenstehende Minutenkorrektur und erhält dadurch die Zahl der Minuten, um welche der notierte Winkel zu vergrößern ist, wenn man von sinus oder tangens ausging, dagegen zu verkleinern ist, wenn cosinus oder cotangens vorliegt.

Die folgenden vier Beispiele mögen dieses Verfahren näher erläutern:

1. **sin u = 0·5967** . . $\sphericalangle$ **u = ?**
Tabelle . . 0·5948 . . . 36°30′
Überschuß . . . 19 : 2·3 = 8′
$\sphericalangle$ u = 36° 38′

2. **tg x = 2·0983** . . $\sphericalangle$ **x = ?**
Tabelle . . 2·0965 . . . . 64° 30′
Überschuß . . . 18 : 16 = 1·1′
$\sphericalangle$ x = 64° 31·1′

3. **cos A = 0·9185** . $\sphericalangle$ **A = ?**
Tabelle . . 0·9171 . . . 23° 30′
Überschuß . . . 14 : 1·1 = 12·7′
$\sphericalangle$ A = 23° 17·3′

4. **cotg B = 0·7300** . . $\sphericalangle$ **B = ?**
Tabelle . . 0·7265 . . . . 54° 0′
Überschuß . . . 35 : 4·5 = 7·8′
$\sphericalangle$ B = 53° 52·2′

Übungsbeispiele. Man bestimme die folgenden, durch ihre Funktionen gegebenen Winkel in Graden und Minuten:

sin x = 0·5200	sin y = 0·8371	sin z = 0·6235
tg u = 0·2135	tg v = 0·6648	tg w = 1·5209
sin A = 0·1925	sin B = 0·6911	sin C = 0·7853
tg m = 0·3705	tg n = 0·9256	tg p = 1·0879
cos X = 0·8685	cos Y = 0·7423	cos Z = 0·9281
cotg α = 0·2135	cotg β = 2·3846	cotg γ = 1·7230
cos r = 0·9695	cos s = 0·5261	cos t = 0·7391
cotg u = 0·9598	cotg v = 0·3238	cotg w = 0·5717

Resultate.

$\sphericalangle$ x = 31°20,	$\sphericalangle$ y = 56°50′	$\sphericalangle$ z = 38°34′
$\sphericalangle$ u = 12°3′	$\sphericalangle$ v = 33°36·9′	$\sphericalangle$ w = 36°40·4′
$\sphericalangle$ A = 11°6′	$\sphericalangle$ B = 43°43′	$\sphericalangle$ C = 51°45′
$\sphericalangle$ m = 20°20,	$\sphericalangle$ n = 42°47′	$\sphericalangle$ p = 47°24·6′
$\sphericalangle$ X = 29°43′	$\sphericalangle$ Y = 47°4′	$\sphericalangle$ Z = 21°52′
$\sphericalangle$ α = 77°57′	$\sphericalangle$ β = 22°45′	$\sphericalangle$ γ = 30°8′
$\sphericalangle$ r = 14°11′	$\sphericalangle$ s = 58°15·5′	$\sphericalangle$ t = 42°20·5′
$\sphericalangle$ u = 46°11′	$\sphericalangle$ v = 72°3·5′	$\sphericalangle$ w = 60°15′

Trigonometrische Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

§ 7. Unter der Auflösung eines Dreieckes versteht man die Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel aus den gegebenen Stücken.

I. Kennt man von einem rechtwinkligen Dreiecke zwei Seiten, so berechne man daraus eine Funktion des einen Spitzwinkels und suche dann den zugehörigen Winkel in der Tabelle.

Z. B. Kathete $a = 14{\cdot}73\ m$
Hypotenuse $c = 27{\cdot}8\ m$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{14{\cdot}73}{27{\cdot}8} = 0{\cdot}5299$$

nach Tabelle $\sphericalangle A = 32^0$
$90^0 - A = \sphericalangle B = 58^0$
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = 23{\cdot}577\ m$

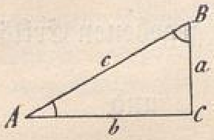


Fig. 4.

Kathete $a = 53{\cdot}48\ m$
Kathete $b = 98{\cdot}5\ m$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{53{\cdot}48}{98{\cdot}5} = 0{\cdot}5429_4$$

nach Tabelle $\sphericalangle A = 28^0 30'$
$90^0 - A = \sphericalangle B = 61^0 30'$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 112{\cdot}08\ m$

§ 8. **II. Kennt man von einem rechtwinkligen Dreiecke eine Seite und einen Spitzwinkel, so benutze man zur Berechnung der fehlenden Seiten die im folgenden abgeleiteten Sätze.**

Nach den in § 3 gegebenen Erklärungen ist:

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{c} = \sin B,$$

folglich, wenn wir beide Seiten dieser Gleichungen mit c multiplizieren,

$$\mathbf{a = c \,.\, \sin A} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b = c \,.\, \sin B}$$

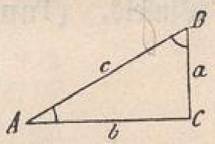


Fig. 5.

D. h. **Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels. (Sinus-Satz).**

Beispiel: $c = 57{\cdot}08\ m$
$\sphericalangle A = 49\tfrac{1}{2}^0$
Dann ist: $\sphericalangle B = 40\tfrac{1}{2}^0 \quad (90^0 - \sphericalangle A)$
und: $a = c \,.\, \sin A = 57{\cdot}08 \times 0{\cdot}7604 = 43{\cdot}404\ m$
$b = c \,.\, \sin B = 57{\cdot}08 \times 0{\cdot}6495 = 37{\cdot}073\ m$

Aus den Gleichungen:

$$\mathbf{a = c \,.\, \sin A} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b = c \,.\, \sin B}$$

folgt, wenn man beide Seiten der Gleichungen durch den darin vorkommenden sinus dividiert:

$$\mathbf{c = \frac{a}{\sin A}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c = \frac{b}{\sin B}}$$

D. h. Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete, dividiert durch den sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels.

Beispiel: $a = 53{\cdot}85\ m$
$\sphericalangle B = 40^0 30'$
$90^0 - B \ldots\ldots \sphericalangle A = 49^0 30'$

$$c = \frac{a}{\sin A} = 53{\cdot}85 : 0{\cdot}7604 = 70{\cdot}82\ m$$

$$b = c \sin B = 45{\cdot}99\ m$$

§ 9. Nach den in § 3 gegebenen Erklärungen ist ferner (in Fig. 5)

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

woraus, wenn wir beide Seiten der Gleichungen mit dem darin vorkommenden Nenner b (a) multiplizieren,

folgt: $\mathbf{a = b \,.\, tg\, A}$ und $\mathbf{b = a \,.\, tg\, B}$

D. h. Die unbekannte Kathete ist gleich der bekannten Kathete, multipliziert mit dem tangens des der ersteren gegenüberliegenden Winkels. (Tangens-Satz.)

Beispiel. $a = 57{\cdot}25\ cm$
$\sphericalangle B = 51^0 30'$
Dann ist: $\sphericalangle A = 38^0 30'$
und ..... $b = a \,.\, \operatorname{tg} B = 57{\cdot}25 \times 1{\cdot}2572 = 71{\cdot}973\ cm$
und ..... $c = a : \sin A = 57{\cdot}25 : 0{\cdot}6225 = 91{\cdot}968\ cm$

§ 10. Da man nach § 4 statt des sinus (tangens) des einer Kathete gegenüberliegenden Winkels stets den cosinus (cotangens) des ihr anliegenden Winkels setzen kann, so lassen sich die in §§ 8 und 9 angegebenen Sätze auch folgendermaßen aussprechen.

Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem cosinus des der Kathete anliegenden Spitzwinkels. (Cosinus-Satz.)

Es ist also in Fig. 5

$$a = c \,.\, \cos B \qquad \text{und} \qquad b = c \,.\, \cos A.$$

Die Hypotenuse ist gleich der Kathete, dividiert durch den cosinus des der Kathete anliegenden Spitzwinkels.

Es ist also in Fig. 5

$$c = \frac{a}{\cos B} \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{b}{\cos A}$$

Die unbekannte Kathete ist gleich der bekannten Kathete, multipliziert mit dem cotangens des der ersteren anliegenden Spitzwinkels.
(Cotangens-Satz.)

Es ist also in Fig. 5

$$a = b \,.\, \mathrm{cotg}\, B \quad \text{und} \quad b = a \,.\, \mathrm{cotg}\, A$$

Anmerkung. Da jederzeit, wenn der eine Spitzwinkel des rechtwinkligen Dreieckes gegeben ist, der zweite Winkel sehr rasch (durch Subtraktion des ersteren von 90^0) zu finden ist, so würden die in § 8 und § 9 angeführten Sätze zur trigonometrischen Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes vollständig genügen. Doch ergibt die Mitverwendung der im § 10 zusammengestellten Sätze in den meisten Fällen rechnerische Vorteile.

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

1. $c = 125\ m$, $\sphericalangle B = 38^0$
2. $a = 25{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle B = 63^0 30'$
3. $a = 22{\cdot}66\ m$, $c = 44\ m$
4. $a = 175\ dm$, $b = 70{\cdot}7\ dm$
5. $c = 53{\cdot}85\ cm$, $\sphericalangle A = 31^0 20'$
6. $a = 73{\cdot}28\ dm$, $\sphericalangle A = 39^0 10'$
7. $a = 15{\cdot}85\ m$, $c = 37{\cdot}24\ m$
8. $a = 525\ cm$, $b = 426{\cdot}25\ cm$

9. α) Welchen Steigungswinkel besitzt die Gütsch-Drahtseilbahn bei Luzern, deren Steigung $\left(\frac{h}{b}\text{ in Fig. 6}\right)$ 52 % beträgt? $\left(\frac{h}{b} = \frac{52}{100}\right)$

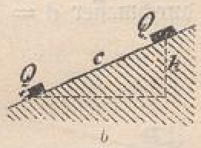


Fig. 6.

β) Man gebe die Steigungswinkel folgender Bahnen aus den beigefügten „Steigungen" an:

Schafbergbahn (25 %), Goldau—Rigi (21·2 %),
Brennerbahn (2·5 %), Arlbergbahn (3·2 %).

10. Wie viel Prozent beträgt die größte Steigung (h : b) auf der i. J. 1889 eröffneten Pilatus-Zahnradbahn, wenn der größte Steigungswinkel $\alpha = 25^0 38{\cdot}5'$ ist?

11. Wie viele Pferdekräfte Hubarbeit leistet die Berglokomotive der Vitznau-Rigi-Zahnradbahn, wenn sie einen Zug vom Gesamtgewichte $Q = 20500\ kg$ längs einer Steigung von $12\frac{1}{2}^0$ mit einer Geschwindigkeit $c = 1{\cdot}55\ m$ aufwärts befördert?

Anleitung: Die geleistete Arbeit = Gewicht $\times$ „vertikale Hubhöhe" (Fig. 6).

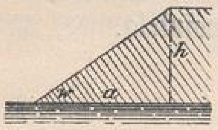


Fig. 7.

12. Wie groß ist die Anlage (a in Fig. 7) eines Dammes von der Höhe $h = 4 \cdot 75$ m und dem Böschungswinkel $w = 33^{0}30'$?

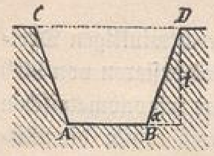


Fig. 8.

13. Die beiden Seitenwände eines Grabens sind unter demselben Böschungswinkel $\alpha = 42^{0}$ gegen die Horizontale geneigt. Die beiden Böschungslinien AC und BD messen je $3 \cdot 75$ m, die Grabensohle AB hat eine Breite von $4 \cdot 25$ m. Man berechne die Tiefe und die obere Breite des Grabens (Fig. 8).

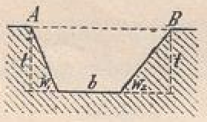


Fig. 9.

14. *a)* Ein Graben (Fig. 9) hat eine Grabensohle von der Breite $b = 5 \cdot 25$ m, eine Tiefe $t = 3 \cdot 25$ m, und seine beiden Seitenwände besitzen die Böschungswinkel $w_1 = 65\frac{1}{2}^{0}$ und $w_2 = 47^{0}$. Wie groß ist die obere Breite AB des Grabens?

b) Dasselbe Beispiel ist für die Angaben

$\sphericalangle\, w_1 = 37^{0}$ $\quad b = 4 \cdot 45$ m

$\sphericalangle\, w_2 = 79^{0}40'$ $\quad t = 2 \cdot 35$ m

zu lösen.

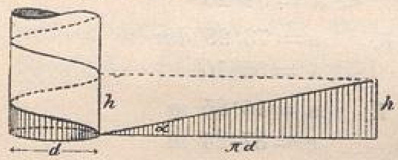


Fig. 10.

15. *a)* Welche Ganghöhe h muß eine Schraube (Fig. 10) vom Spindeldurchmesser $d = 75 \cdot 5$ mm besitzen, wenn ihr Steigungswinkel α 4^{0} betragen soll?

b) Dieselbe Aufgabe ist für $d = 157$ mm und $\sphericalangle\, \alpha = 5\frac{1}{2}^{0}$ zu lösen.

c) Wie groß ist der Steigungswinkel einer Schraube, welche bei einem Spindeldurchmesser $d = 115$ mm die Ganghöhe $h = 24$ mm besitzt?

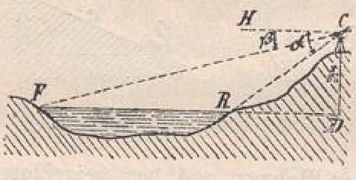


Fig. 11 *a*.

16. Von der Pfänderspitze C (Fig. 11 a), deren Höhe h über den Bodenseespiegel 662 m beträgt, erscheint das Rheinspitz F (Rheinmündung) unter dem Tiefenwinkel $\beta = 2^{0}20'$ und der in derselben Vertikalebene liegende Uferpunkt bei Bregenz (R) unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 14^{0}9'$. Man berechne daraus die gegenseitige Entfernung x der beiden Uferpunkte.

Anleitung: Man berechne aus den Dreiecken CDR und CDF die Strecken DR und DF und dann $x = DF - DR$.

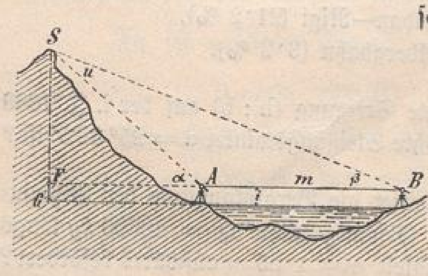


Fig. 11 *b*.

17. Die Spitze S des Schafberges (Fig. 11 *b*) erscheint von zwei mit S in derselben Vertikalebene liegenden Uferpunkten A (bei Scharfling) und B (bei Bichl) des Mondsees unter den Höhenwinkeln $\alpha = 23^{0}26'$ und $\beta = 15^{0}10'$.

Wie hoch liegt S über dem Spiegel des Mondsees, wenn die Entfernung A B = 1795·13 *m* und die Instrumentenhöhe i = 1·7 *m* ist?

Anmerkung: Diese Aufgabe ist eine Umkehrung der Aufgabe 16.

18. *a)* Welche Winkel (α und β) schließt die Resultierende R zweier unter einem rechten Winkel zusammenwirkender Kräfte P = 38 *kg* und Q = 53 *kg* (Fig. 12) mit diesen Kräften ein, und wie groß ist die Resultierende?

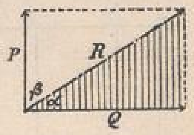


Fig. 12.

b) Eine Kraft R = 235 *kg* (Fig. 12) ist in zwei zu einander senkrechte Komponenten P und Q zu zerlegen, welche mit der Kraft R die Winkel $\alpha = 32^0$ und $\beta = 58^0$ einschließen. Wie groß sind diese Komponenten? ($\alpha + \beta = 90^0$).

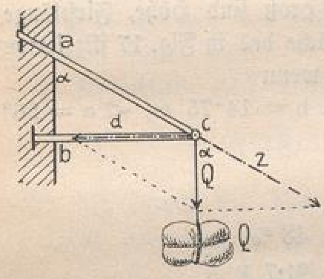


Fig. 13 *a*.

19. An der in Fig. 13 skizzierten Eisenkonstruktion (Aufzugs-Vorrichtung) hängt bei c vertikal die Last Q. Wie groß sind Zug- und Druckspannung (z und d) in den beiden Konstruktionsteilen a c und b c, wenn:

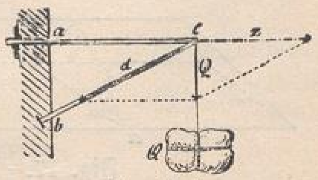


Fig. 13 *b*.

a) Q = 350 *kg*, $\sphericalangle \alpha = 62\frac{1}{2}^0$
b) Q = 1375 *kg*, $\sphericalangle \alpha = 40^0 30'$
c) Q = 865 *kg*, $\sphericalangle \alpha = 57^0 40'$
d) Q = 825 *kg*, $\sphericalangle \alpha = 62^0$ ist?

(α bedeutet den Neigungswinkel des schrägen Konstruktionsteiles gegen die Vertikale.)

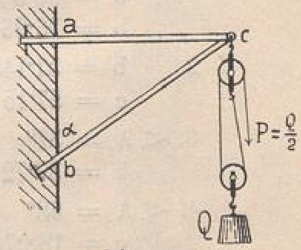


Fig. 13 *c*.

Wie stellen sich die Lösungen, wenn die Last Q nicht unmittelbar am Punkte c, sondern in der durch Fig. 13 c dargestellten Weise an einem Rollenzuge angehängt ist.

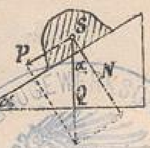


Fig. 14.

20. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 14) vom Neigungswinkel $\alpha = 25^0 45'$ liegt eine Last vom Gewichte Q = 75·25 *kg*.

Wie groß ist die Bewegungskomponente P?

Wie groß ist der die Reibung erzeugende Normaldruck N?

Wie groß ist die Reibung R, wenn der Reibungskoëffizient f = 0·45 ist? (R = N . f)

Anmerkung: In dem rechtwinkligen Kräfte-Dreiecke ist $\sphericalangle$ (Q, N) = $\sphericalangle \alpha$

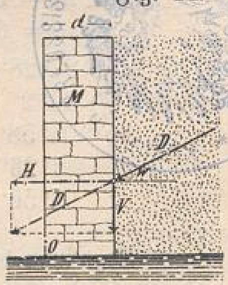


Fig. 15.

21. Auf die Stützmauer M (Fig. 15), deren Höhe h = 4 *m* und deren Dicke d = 1·2 *m* ist, wirkt in $\frac{1}{3}$ der

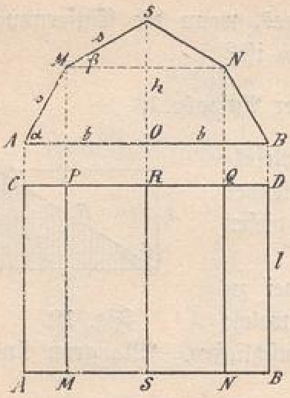


Fig. 16.

Höhe unter dem $\sphericalangle$ w = 33° gegen den Horizont geneigt, der Erddruck D = 4425 *kg*. Wie groß sind die beiden Drehmomente der Komponenten H und V bezüglich der Kante O.

(Anleitung : $H \cdot \frac{h}{3}$ und — V. d.)

22. Das in Fig. 16 in zwei Projektionen dargestellte Mansarddach besitzt die Länge l = 15·25 *m*, die Breite AB = 2b = 12·5 *m*, und die Höhe h ist gleich der halben Breite. Wie groß ist die gesamte Dachfläche, wenn AM = MS, $\sphericalangle \alpha = 60^0$ und $\sphericalangle \beta = 30^0$ ist?

(Anleitung : $s \cos \alpha + s \cos \beta = AO = b$. Aus dieser Gleichung berechne man zunächst s.)

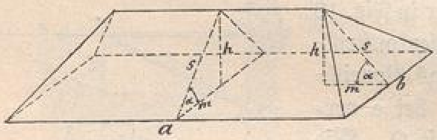


Fig. 17.

23. Wie groß sind Höhe, Firstlänge und Gesamtfläche des in Fig. 17 skizzierten Walmdaches, wenn
a = 25·5 *m*, b = 14·75 *m*, $\sphericalangle \alpha = 26^0$ ist?

Resultate.

1. a = 98·5 *m*
   b = 76·96 *m*
2. b = 51·145 *m*
   c = 57·15 *m*
3. $\sphericalangle$ A = 31°
   b = 37·72 *m*
4. $\sphericalangle$ A = 68°
   c = 188·74 *dm*
5. a = 28·002 *cm*
   b = 45·999 *cm*
6. b = 89·958 *dm*
   c = 116·023 *dm*
7. $\sphericalangle$ A = 25°12′
   b = 33·698 *m*
8. $\sphericalangle$ A = 50°55′
   c = 676·25 *cm*
9. *α)* 27°28′
   β) 14°2′
   11°58′
   1°26′
   1°50′
10. 48 %
11. 91·7 P. S.
12. a = 7·176 *m*
13. t = 2·508 *m*
    CD = 9·822 *m*
14. *a)* 9·762 *m*
    b) 7·997 *m*
15. *a)* h = 16·59 *mm*
    b) h = 47·49 *mm*
    c) 3°48′
16. 13620 *m*
17. 1300 *m*
18. *a)* $\sphericalangle \alpha$ = 35°38′
    $\sphericalangle \beta$ = 54°22′
    R = 65·21 *kg*
    b) P = 124·527 *kg*
    Q = 199·304 *kg*
19. *a)* d = 672 *kg* *)
    z = 758 *kg*
    b) z = 1808 *kg*
    d = 1174 *kg*

*) Legt man der Rechnung die Fig. 13b zugrunde, so sind die Werte von z und d mit einander zu vertauschen.

19. *c)* z = 1617 *kg**)
d = 1367 *kg*
d) z = 1757 *kg*
d = 1552 *kg**)

20. P = 32·69 *kg*
N = 67·77 *kg*
R = 30·5 *kg*

21. $H.\frac{h}{3} = 4948$ *mkg*
$V.d = -2892$ *mkg*

22. 279·1 m^2

23. 3·596 *m*
10·75 *m*
418·47 m^2

§ 11. Das Rechteck

kann durch eine Diagonale in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt und auf diese zurückgeführt werden (Fig. 18).

Beispiel: Welche Winkel β und α schließen die Diagonalen eines Rechteckes von den Seiten a = 43·2 *cm*, b = 29·5 *cm* mit diesen Seiten ein?

Resultat: $\sphericalangle \beta = 34^0\,19{\cdot}5'$ $\sphericalangle \alpha = 55^0\,40{\cdot}5'$

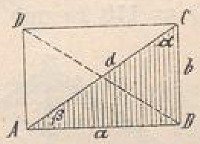


Fig. 18.

§ 12. Das gleichschenklige Dreieck

läßt sich durch die zur Grundlinie gehörige Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen (Fig. 19).

(Dabei ist zu beachten, daß die gedachte Höhe sowohl den Winkel an der Spitze als auch die Grundlinie halbiert.)

Beispiel: In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe h = 25·8 *cm*, der Winkel an der Spitze 43°. Wie groß sind Basis und Schenkel?

Resultat: b = 20·324 *cm*, s = 27·73 *cm*.

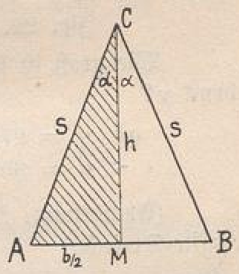


Fig. 19.

§ 13. Der Rhombus

zerfällt durch die beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, auf welche er zurückgeführt werden kann (Fig. 20).

(Dabei ist zu beachten, daß die zu einander senkrechten Diagonalen sich selbst und die vier Rhombuswinkel halbieren.)

Beispiel: In einem Rhombus, dessen Spitzwinkel 61°20′ beträgt, ist die kürzere Diagonale d_2 = 4·75 *m*. Man berechne die zweite Diagonale d_1 und die Rhombusseite s.

Resultat: d_1 = 8·010 *m*, s = 4·656 *m*.

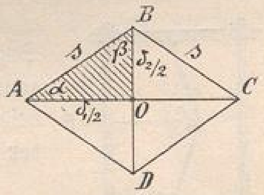


Fig. 20.

---

*) Nach Fig. 13 c ist die bei c wirksame Belastung gleich Q + P = $\frac{3}{2}$ Q. Somit werden auch die Komponenten d und z $1\frac{1}{2}$ mal so groß. Es sind daher die Resultate des Beispiels 19 mit $1\frac{1}{2}$ zu multiplizieren.

Übungsbeispiele.

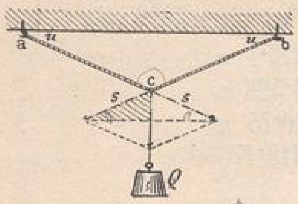


Fig. 21.

1. *a)* Wie groß sind die Seilspannungen s in den beiden gleich langen Seilstücken a c und b c (Fig. 21), wenn bei c die vertikale Belastung Q = 75·5 *kg* wirkt und $\sphericalangle$ u = 27° 15′ ist?

b) Welchen Durchmesser d müßte ein Hanfseil (in Fig. 21) haben, um bei einem Neigungswinkel u = 25° die Last Q = 325 *kg* zu tragen, wenn für 1 *cm*² Querschnitt 103 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

c) Wie groß ist der von den beiden Seilstücken gebildete Winkel, wenn Q = 110 *kg* und s = 75 *kg* ist?

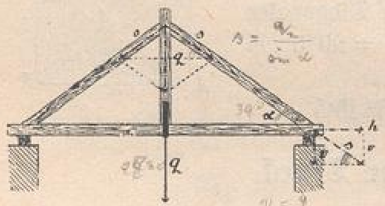


Fig. 22.

2. Auf die Hängesäule eines einfachen Hängewerks (Fig. 22) wirkt als Zug nach abwärts die Kraft $q = \frac{5}{8}$ der Gesamtbelastung Q.

Wie groß ist der Druck s in den Streben, wenn diese unter einem Winkel α gegen die Horizontale geneigt sind?

Wie groß ist ferner der Horizontalschub h im Hauptbalken und der Vertikaldruck v?

a) q = 2730 *kg* *b)* q = 5685 *kg* *c)* q = 3437·5 *kg*
$\sphericalangle\, \alpha = 39°$ $\sphericalangle\, \alpha = 38°$ $\sphericalangle\, \alpha = 37\frac{1}{2}°$

(Anmerkung: Man berücksichtige die Kongruenz der entstehenden rechtwinkligen Kräfte-Dreiecke.)

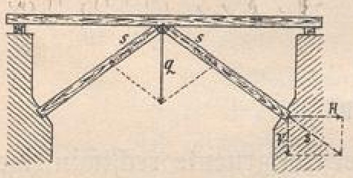


Fig. 23.

3. Wie groß ist der Strebendruck s in den Streben eines einfachen Sprengwerks (Fig. 23), wenn in der Mitte des Hauptbalkens der Druck q = 4200 *kg* vertikal abwärts wirkt und die beiden Streben unter dem Winkel *w* = 40° gegen den Horizont geneigt sind?

Wie groß sind der Horizontalschub H und der Vertikaldruck V gegen die Mauer?

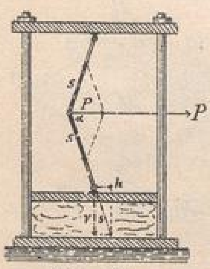


Fig. 24.

4. *a)* An einer einfachen Kniepresse (Fig. 24), deren Schenkel den Winkel 177° mit einander einschließen, wirkt horizontal die Kraft P = 25 *kg*. Wie groß ist der Druck s in den beiden Schenkeln, und wie groß sind der Horizontalschub h und der vertikale Preßdruck v?

b) Wie groß muß die Kraft P sein, wenn bei einer gegenseitigen Neigung der Schenkel von 176° ein Preßdruck (v) von 500 *kg* erzielt werden soll?

c) Unter welchem Winkel müssen sich die beiden Schenkel einstellen, wenn die horizontal wirkende Kraft P = 40 *kg* einen Preßdruck v = 600 *kg* hervorbringen soll?

5. Von der Gesamtbelastung Q eines doppelten Hängewerkes (Fig. 25) wird auf jede Hängesäule die als Zug nach abwärts wirkende Kraft $q = \frac{11}{30}$ Q übertragen.

Man berechne die Spannung s in den Streben und den Druck d im Spannriegel. Wie groß muß die Querschnittsfläche f des letzteren sein, wenn auf 1 cm^2 Querschnitt 75 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden und wenn

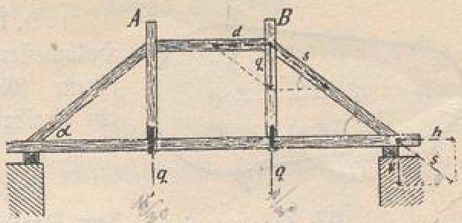


Fig. 25.

$s = \frac{q}{\sin \alpha}$ $d = q \cdot \operatorname{cotg} \alpha$

a) Q = 18700 *kg* $\sphericalangle \alpha = 40\frac{1}{2}^0$ *b)* Q = 6660 *kg* $\sphericalangle \alpha = 42^0$ ist?

6. *a)* Auf die Stütze s eines einfach armierten Trägers (Fig. 26) wird der vertikale Druck q = 2500 *kg* übertragen. Wie groß ist die Zugspannung z in den schmiedeeisernen Zugstangen, wenn $\sphericalangle \alpha = 18\frac{1}{2}^0$ ist?

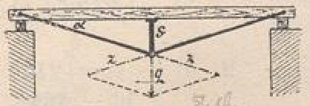


Fig. 26.

Welchen Durchmesser d müssen diese Zugstangen erhalten, wenn auf 1 cm^2 Querschnitt 700 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

b) Dieselbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

q = 1875 *kg* $\sphericalangle \alpha = 11^0 20'$.

7. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines doppelt armierten Trägers (Fig. 27) wird auf jede Stütze der vertikal abwärts wirkende Druck $q = \frac{11}{30}$ Q übertragen. Wie groß sind die Zugspannungen z_1 und z_2 in den Zugstangen für folgende Angaben:

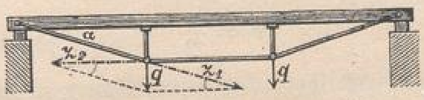


Fig. 27.

$z_1 = \frac{q}{\sin \alpha}$
$z_2 = q \cdot \operatorname{cotg} \alpha$.

a) Q = 6750 *kg* $\sphericalangle \alpha = 12\frac{1}{2}^0$ *b)* Q = 8400 *kg* $\sphericalangle \alpha = 10^0$ *c)* Q = 9650 *kg* $\sphericalangle \alpha = 13^0 45'$

Wie groß müssen die Durchmesser der verwendeten Zugstangen genommen werden, wenn auf 1 mm^2 Querschnitt 7 *kg* zulässige Belastung gerechnet werden?

8. Zwei in ebenem Gelände führende geradlinige Bahnstrecken MA und NB (Fig. 28), welche mit einander den Winkel ω einschließen, sollen durch einen Kreisbogen vom Halbmesser R mit einander verbunden werden. Man berechne die „Tangentenlänge" PA und PB, und die Entfernung des Bogenscheitels S von dem Winkelpunkte P, wenn

a) ω = 102° R = 325 *m* *b)* ω = 95° 30′ R = 285 *m* *c)* ω = 110° 20′ R = 375 *m* ist?

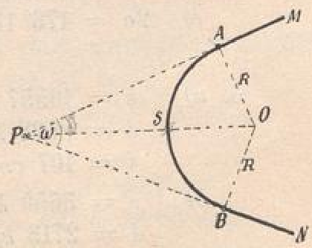


Fig. 28.

PA (B) = $R \cdot \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$

PS = $\frac{R}{\sin \frac{\omega}{2}} - R = 1$

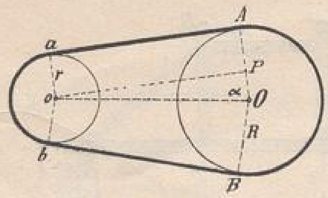


Fig. 29.

9. Über zwei Riemenscheiben (Fig. 29) von den Halbmessern R = 60 *cm* und r = 35 *cm* und einem Mittelpunktsabstand a = 180 *cm* wird ein Treibriemen gelegt. Man berechne die Riemenlänge L.

Anleitung: Man bestimme den Winkel α aus dem Dreiecke o P O.

Resultate.

1. *a)* s = 8244 *kg*
   b) d = 2·18 *cm*
   c) 85° 40′

2. *a)* s = 2169 *kg*
   h = 1685 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$
   b) s = 4617 *kg*
   h = 3638 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$
   c) s = 2823 *kg*
   h = 2240 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$

3. s = 3267 *kg*
   $V = \frac{q}{2}$
   H = 2503 *kg*

4. *a)* s = 477 *kg*
   h = 12·5 *kg*
   v = 477 *kg*
   b) P = 34·9 *kg*
   c) 2α = 176° 11′

5. *a)* s = 10557 *kg*
   d = 8028 *kg*
   f = 107 *cm*²
   b) s = 3650 *kg*
   d = 2713 *kg*
   f = 36·2 *cm*²

6. *a)* z = 3939·5 *kg*
   d = 26·77 *mm*
   b) z = 4768·5 *kg*
   d = 29·45 *mm*

7. $z_1 = \frac{q}{\sin \alpha}$
   $z_2 = q \operatorname{cotg} \alpha$
   $d_1 = \sqrt{\frac{4 z_1}{7 \pi}}$
   $d_2 = \sqrt{\frac{4 z_2}{7 \pi}}$
   a) z_1 = 11437 *kg*
   z_2 = 11164 *kg*
   d_1 = 45·61 *mm*
   d_2 = 45·06 *mm*
   b) z_1 = 17732 *kg*
   z_2 = 17468 *kg*
   d_1 = 56·79 *mm*
   d_2 = 56·36 *mm*
   c) z_1 = 14887 *kg*
   z_2 = 14460 *kg*
   d_1 = 52·037 *mm*
   d_2 = 51·285 *mm*

8. *a)* PA = 263·2 *m*
   PS = 93·2 *m*
   b) PA = 258·9 *m*
   PS = 100 *m*
   c) PA = 261 *m*
   PS = 81·8 *m*

9. α = 82° 1′
   L = 662 *cm*

§ 14. Die regelmäßigen Vielecke

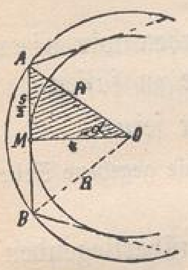


Fig. 30.

lassen sich auf das gleichschenklige „Bestimmungsdreieck" AOB (Fig. 30) zurückführen, welches man erhält, wenn man die Endpunkte A und B einer Vielecksseite mit dem Mittelpunkte des Vieleckes verbindet.

Ist die Seitenzahl des regelmäßigen Vieleckes n, bedeutet r den Halbmesser des eingeschriebenen, R den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises,

so ist im $\triangle$ OAM................ $\frac{s}{2} = R \sin \alpha$,

daher $s = \mathbf{2\,R\,sin}\,\alpha$

und $\mathbf{R} = \dfrac{s}{\mathbf{2\,sin}\,\alpha}$

Ferner ist $\frac{s}{2} = r \operatorname{tg} \alpha$ daher $s = \mathbf{2\,r\,tg}\,\alpha$

und $\mathbf{r} = \dfrac{s}{\mathbf{2\,tg}\,\alpha}$

In allen diesen Formeln ist $\sphericalangle \alpha = \dfrac{\mathbf{180^0}}{\mathbf{n}}$

(Man beachte die Tabelle auf Seite 46.)

Übungsbeispiele.

1. Wie groß sind die Halbmesser des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises für ein Fünfeck von der Seitenlänge s = 2·53 *m*?
2. Wie groß ist die Seite s_9 (s_{10}), [s_{12}] eines regulären Neunecks (Zehneckes), [Zwölfeckes], welches einem Kreise vom Halbmesser R = 12·5 *dm* eingeschrieben ist?
3. Man berechne den Umfang des regulären Sechzigeckes, welches einem Kreise vom Durchmesser 1 *m* eingeschrieben (umschrieben) ist.
4. Wie groß wird der Durchmesser des Teilkreises für eine Kettenrolle mit 10 Zähnen, wenn die Kettenteilung 24 *mm* beträgt?
5. Wie groß ist der Teilkreisdurchmesser eines Stirnrades von 60 Zähnen bei 32 *mm* Teilung?
6. Wie groß sind die Durchmesser der Zahnräder eines Stirnrädervorgeleges mit 56 und 25 Zähnen und der gemeinsamen Teilung von 35 *mm*?

Resultate.

1. r = 1·74 *m* R = 2·152 *m*
2. s_9 = 8·55 *dm* s_{10} = 7·725 *dm* s_{12} = 6·47 *dm*
3. u = 3·1404 *m* U = 3·1446 *m* 4. d = 38·83 *mm*
5. 611·4 *mm* 6. 624·2 *mm* und 279·2 *mm*

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 15. Entsprechend den vier Kongruenzsätzen haben wir vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung ins Auge zu fassen.

Ein schiefwinkliges Dreieck kann nämlich bestimmt sein:

1. Durch eine Seite und zwei Winkel, (deren Lage gegen die gegebene Seite gleichfalls bestimmt sein muß.)
2. Durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.
3. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.
4. Durch die drei Seiten.

§ 16. In den beiden ersten Fällen genügt zur Auflösung des Dreieckes der

Sinussatz: Die Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

NB. Kommt ein stumpfer Winkel vor, so nehme man statt seines sinus den sinus seines Nebenwinkels. (Siehe nachstehende Ableitung.)

Z. B. in Fig. 31 a

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

und in Fig. 31 b.

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

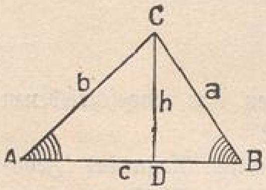


Fig. 31 a.

Beweis.

Ziehen wir

$$CD \perp AB,$$

so folgt aus den Dreiecken

ADC und BDC:

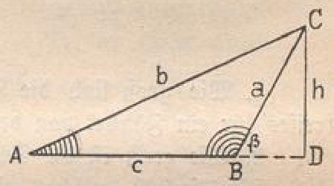


Fig. 31 b.

$$h = b \sin A \qquad h = b \sin A$$
$$h = a \sin B \qquad h = a \sin \beta$$

woraus sich durch Gleichstellung der beiden für h gefundenen Werte ergibt:

$$b \sin A = a \sin B \qquad b \sin A = a \sin \beta$$

Aus diesen Gleichungen können wir Proportionen bilden, wenn wir die Faktoren des linksstehenden Produktes zu inneren, die Faktoren des rechtsstehenden Produktes zu äußeren Gliedern machen. Dadurch erhalten wir:

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B} \qquad \mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

Damit ist der Sinussatz bewiesen.

Wendet man denselben auf je zwei andere Seiten an, so ergibt sich:

$$\mathbf{a : c = \sin A : \sin C} \quad \text{und} \quad \mathbf{b : c = \sin B : \sin C}$$

Durch Zusammenfassung dieser Proportionen erhält man

$$\mathbf{a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C},$$

worin statt des sinus eines etwaigen stumpfen Winkels stets der sinus seines Nebenwinkels zu nehmen ist.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 53{\cdot}25\ m$
$\sphericalangle B = 74^0 30'$
$\sphericalangle C = 50^0$

Auflösung:

$180^0 - (B + C) = \sphericalangle A = 55^0 30'$

$b : a = \sin B : \sin A$

$c : a = \sin C : \sin A$

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{53{\cdot}25}{0{\cdot}8241} . 0{\cdot}9636$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \sin C = \frac{53{\cdot}25}{0{\cdot}8241} . 0{\cdot}7660$$

$\mathbf{b = 62{\cdot}263}\ m$

$\mathbf{c = 49{\cdot}496}\ m$

2. $a = 48{\cdot}5\ m$
$b = 61{\cdot}2\ m$
$\sphericalangle B = 75^0 30'$

Auflösung:

$a : b = \sin A : \sin B$

$$\sin A = \frac{a . \sin B}{b} = \frac{48{\cdot}5 \times 0{\cdot}9682}{61{\cdot}2}$$

$\sin A = 0{\cdot}7673$

$\mathbf{\sphericalangle A = 50^0 7'}$

$\mathbf{\sphericalangle C = 54^0 23'}$

$c : b = \sin C : \sin B$

$$c = \frac{b . \sin C}{\sin B} = \frac{61{\cdot}2 \times 0{\cdot}8129}{0{\cdot}9682}$$

$\mathbf{c = 51{\cdot}384}\ m$

Anmerkung. Kennt man von einem Dreiecke eine Seite und die Winkel, so kann man, wie aus den Formeln für *b* und *c* in der vorstehenden Auflösung zu Beispiel 1 ersichtlich ist, die fehlenden Seiten nach folgender leicht zu merkenden Regel berechnen:

Die gesuchte Seite wird gefunden, indem man die bekannte Seite durch den sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividiert und mit dem sinus des der gesuchten Seite gegenüberliegenden Winkels multipliziert.

Bei Anwendung dieser Regel erspart man das Anschreiben der Proportionen und hat bei Berechnung beider unbekannten Seiten die Division nur einmal auszuführen. (Siehe obige Formeln für *b* und *c* in Beispiel 1.)

Übungsbeispiele:

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 250\ m$, $\sphericalangle A = 72^0$, $\sphericalangle C = 65^0$
2. $b = 5{\cdot}49\ m$, $\sphericalangle A = 72^0 25'$, $\sphericalangle B = 49^0 45'$
3. $a = 45{\cdot}64\ cm$, $\sphericalangle C = 29^0 30'$, $\sphericalangle A = 103^0 30'$
4. $a = 35\ m$, $b = 75\ m$, $\sphericalangle B = 80^0$
5. $a = 23{\cdot}25\ m$, $c = 35{\cdot}88\ m$, $\sphericalangle C = 81^0 30'$
6. $b = 45{\cdot}5\ m$, $c = 69{\cdot}6\ m$, $\sphericalangle C = 96^0 30'$

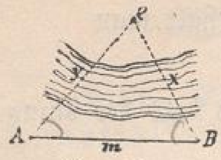


Fig. 32 a.

7. Man bestimme die Entfernungen AC und BC (Fig. 32a) eines unzugänglichen Punktes C aus den mittels Meßlatte und Winkelmeßinstrumenten gefundenen Abmessungen:

a)	b)	c)
$m = 125\ m$	$m = 356{\cdot}7\ m$	$m = 225{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 52^\circ$	$\sphericalangle A = 37^\circ 20'$	$\sphericalangle A = 100^\circ$
$\sphericalangle B = 71^\circ$	$\sphericalangle B = 61^\circ 30'$	$\sphericalangle B = 35^\circ$

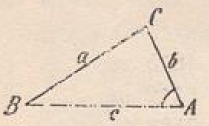


Fig. 32 b.

8. Man berechne die durch direkte Messung nicht zu ermittelnde Entfernung c der beiden Punkte A und B (Fig. 32b) aus folgenden Abmessungen:

a)	b)	c)
$a = 130\ m$	$a = 512\ m$	$a = 240\ m$
$b = 105\ m$	$b = 350\ m$	$b = 221\ m$
$\sphericalangle A = 65^\circ 30'$	$\sphericalangle A = 98^\circ$	$\sphericalangle A = 128^\circ 9'$

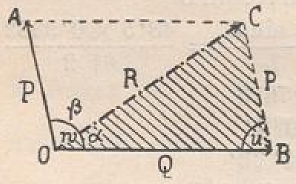


Fig. 33.

9. Eine Kraft R (Fig. 33) ist in zwei gegen R unter den Winkeln β und α geneigte Komponenten P und Q zu zerlegen. Wie groß sind P und Q, wenn:

a)	b)	c)
$R = 325\ kg$	$R = 135\ kg$	$R = 450\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 62^\circ$	$\sphericalangle \alpha = 42^\circ 30'$	$\sphericalangle \alpha = 10^\circ 53'$
$\sphericalangle \beta = 49^\circ$	$\sphericalangle \beta = 26^\circ$	$\sphericalangle \beta = 81^\circ 12'$

ist?

10. Eine Kraft Q wirkt mit einer Kraft $P = 75\ kg$ unter einem Winkel $w = 70^\circ$ zusammen. Wie groß muß Q sein, damit die Resultierende $100\ kg$ betrage?

Anleitung: In Fig. 33 ist $\sphericalangle u = 180^\circ - w$.

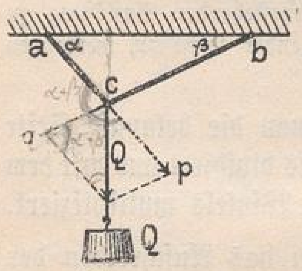
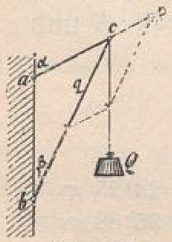


Fig. 34.

11. Wie groß sind die Zugspannungen p und q in den beiden Seilstücken ac und bc (Fig. 34), wenn bei c die vertikale Belastung Q wirkt und die beiden Seilstücke mit der Horizontalen die Winkel α und β einschließen?

a)	b)	c)
$Q = 245\ kg$	$Q = 875\ kg$	$Q = 1275\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 37^\circ$	$\sphericalangle \alpha = 42\tfrac{1}{2}^\circ$	$\sphericalangle \alpha = 36^\circ 15'$
$\sphericalangle \beta = 18^\circ$	$\sphericalangle \beta = 25\tfrac{1}{2}^\circ$	$\sphericalangle \beta = 24^\circ 20'$



12. An dem Punkte c einer Aufzugsvorrichtung (Fig. 35) wirkt vertikal nach abwärts die Last Q. Wie groß sind die Beanspruchungen p und q der beiden Konstruktionsteile ac und bc, wenn diese mit der Vertikalen die Winkel α und β einschließen?

a)	b)	c)
$Q = 2375\ kg$	$Q = 2750\ kg$	$Q = 1950\ kg$
$\sphericalangle \alpha = 81^\circ$	$\sphericalangle \alpha = 48^\circ$	$\sphericalangle \alpha = 53^\circ 30'$
$\sphericalangle \beta = 36^\circ$	$\sphericalangle \beta = 33^\circ$	$\sphericalangle \beta = 28^\circ 30'$

Fig. 35.

13. Wie groß sind die Drücke s_1 und s_2 in den Streben eines einfachen Sprengwerkes (siehe Fig. 23), wenn diese Streben unter den ungleichen Winkeln $\alpha = 48\tfrac{1}{2}^\circ$ und $\beta = 34\tfrac{3}{4}^\circ$ gegen die Horizontale geneigt sind und wenn der vertikale Druck $q = 3250\ kg$ ist?

14. Um die gegenseitige Entfernung $AB = x$ zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 36) zu bestimmen, hat man den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt N und einen zweiten Punkt M festgelegt und sodann gemessen:

$$MN = a = 975{\cdot}6\,m \qquad \sphericalangle AMB = \beta = 58^0$$
$$\sphericalangle AMN = \alpha = 37^0 30' \qquad \sphericalangle ANM = \gamma = 46^0 30'$$

Wie groß ist die Entfernung x?

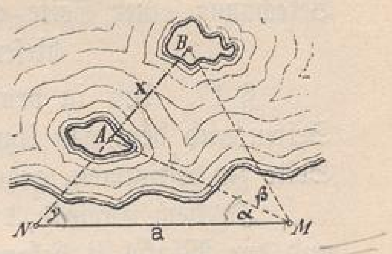


Fig. 36.

Anleitung. Man bestimme zuerst MA und dann x.

Resultate.

1. $a = 262{\cdot}36\ m$
   $b = 188{\cdot}12\ m$

2. $a = 6{\cdot}857\ m$
   $c = 6{\cdot}089\ m$

3. $b = 34{\cdot}328\ cm$
   $c = 23{\cdot}110\ cm$

4. $\sphericalangle A = 27^0\,21{\cdot}5'$
   $\sphericalangle C = 72^0\,38{\cdot}5$
   $c = 72{\cdot}69\ m$

5. $\sphericalangle A = 39^0\,52'$
   $\sphericalangle B = 58^0\,38'$
   $b = 30{\cdot}975\ m$

6. $\sphericalangle B = 40^0\,30'$
   $\sphericalangle A = 43^0$
   $a = 47{\cdot}77\ m$

7. *a)* $AC = 140{\cdot}92\ m$
   $BC = 117{\cdot}44\ m$
   b) $AC = 317{\cdot}2\ m$
   $BC = 218{\cdot}9\ m$
   c) $AC = 182{\cdot}92\ m$
   $BC = 314{\cdot}06\ m$

8. *a)* $\sphericalangle B = 47^0\,18'$
   $c = 131{\cdot}7\ m$
   b) $\sphericalangle B = 42^0\,36'$
   $c = 328{\cdot}2\ m$
   c) $\sphericalangle B = 46^0\,24'$
   $c = 29\ m$

9. *a)* $P = 307{\cdot}4\ kg$
   $Q = 262{\cdot}7\ kg$
   b) $P = 98{\cdot}027\ kg$
   $Q = 63{\cdot}611\ kg$
   c) $P = 85\ kg$
   $Q = 445\ kg$

10. $Q = 45{\cdot}28\ kg$

11. *a)* $p = 284\ kg$
    $q = 239\ kg$
    b) $p = 852\ kg$
    $q = 695\ kg$
    c) $p = 1334\ kg$
    $q = 1180\ kg$

12. *a)* $p = 1974\ kg$
    $q = 3317\ kg$
    b) $p = 5788\ kg$
    $q = 7896\ kg$
    c) $p = 2202\ kg$
    $q = 3709\ kg$

13. $s_1 = 2689\ kg$
    $s_2 = 2168\ kg$

14. $MA = 711{\cdot}6\ m$
    $AB = 980{\cdot}2\ m$
    $NA = 597{\cdot}2\ m$
    $MB = 1149\ m$

Berechnung einer Seite aus den beiden anderen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

§ 17. Um in dem dritten Bestimmungsfalle (§ 15) aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zunächst die dritte Seite zu bestimmen, gehen wir in folgender Weise vor.

In dem Dreiecke A B C (Fig. 37 a, b) seien die Seiten a und c und der Winkel B bekannt, und die Seite b sei zu berechnen.

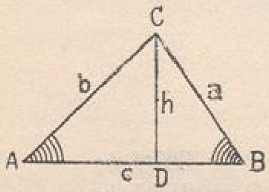


Fig. 37 a

Zieht man

$$CD \perp AB$$

und setzt

$$CD = h, \quad BD = m,$$

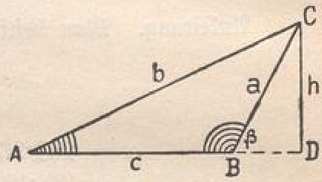


Fig. 37 b.

so ist im $\triangle ADC$ .. $b^2 = h^2 + AD^2$ . . . . (1)

und im $\triangle BDC$ .. $h^2 = a^2 - m^2$, ... (2)

woraus folgt: $b^2 = a^2 - m^2 + AD^2$ . . . . . (3)

In Fig. 37 a ist $AD = c - m$, | In Fig. 37 b ist $AD = c + m$,

daher nach Gleichung (3)

$b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$ | $b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$

woraus nach Ausführung der Quadrierung, nach welcher sich $- m^2$ gegen m^2 hebt, folgt:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c\,m \ldots (4)$ | $b^2 = a^2 + c^2 + 2\,c\,m \ldots (4)'$

Nun ist im $\triangle BCD$ nach § 10:

$m = a \cos B$ | $m = a \cos \beta$

somit, wenn diese Werte von m in die Gleichungen (4) und (4)′ eingesetzt werden,

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B} \qquad \mathbf{b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac \cos \beta}$$

Der in diesen beiden Gleichungen ausgedrückte Satz heißt der Carnot'sche Lehrsatz und läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Das Quadrat einer Dreiecksseite wird gefunden, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seiten addiert und um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus ihres eingeschlossenen Winkels vermindert, oder um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus des von ihnen gebildeten Außenwinkels vermehrt. Das Letztere wird angewendet, wenn der von den bekannten Seiten eingeschlossene Winkel größer ist als 90°.

Zieht man aus dem so bestimmten Werte die Quadratwurzel, so wird die Seite selbst gefunden.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 25\ m$
$c = 36\ m$
$\sphericalangle B = 68^\circ 30'$

Ausführung:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B}$$
$$a^2 = 625$$
$$c^2 = 1296$$
$$2\,ac \cos B = 659{\cdot}7$$
daher $b = \sqrt{1261{\cdot}3}$
$\mathbf{b = 35{\cdot}515}\ m$

2. $b = 42\ m$
$c = 63\ m$
$\sphericalangle A = 115^\circ$

Ausführung:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2\,b\,c \cos(180^\circ - A)}$$
$$b^2 = 1764$$
$$c^2 = 3969$$
$$2\,b\,c \cos 65^\circ = 2236{\cdot}39$$
daher $a = \sqrt{7969{\cdot}39}$
$\mathbf{a = 89{\cdot}271}\ m$

Die noch fehlenden zwei Winkel können nun nach dem Sinus-Satze berechnet werden.

Übungsbeispiele.

Es ist in folgenden Dreiecken die unbekannte Seite zu bestimmen:

1. $a = 24\ cm$, $b = 15\ cm$, $\sphericalangle C = 60^\circ$
2. $b = 7{\cdot}5\ cm$, $c = 3{\cdot}2\ cm$, $\sphericalangle A = 44^\circ 30'$
3. $a = 50{\cdot}2\ m$, $c = 42{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle B = 72^\circ 25'$
4. $a = 6{\cdot}5\ m$, $b = 4{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle C = 108^\circ$
5. $a = 6{\cdot}8\ m$, $c = 10{\cdot}4\ m$, $\sphericalangle B = 97^\circ 30'$
6. $b = 34{\cdot}5\ cm$, $c = 83{\cdot}4\ cm$, $\sphericalangle A = 103^\circ 10'$

7. Man bestimme die gegenseitige Entfernung x der durch ein Gebäude gedeckten Punkte A und B (Fig. 38) aus folgenden, durch direkte Abmessung gefundenen Angaben:

a) $a = 73\ m$, $b = 115\ m$, $\sphericalangle P = 46^\circ 20'$

b) $a = 253{\cdot}8\ m$, $b = 175{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle P = 103^\circ 13'$

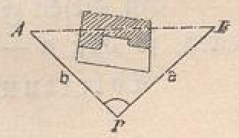


Fig. 38

8. Wie lang sind die Diagonalen d_1 und d_2 eines Parallelogrammes von den Seiten $a = 28\ cm$, $b = 17\ cm$, wenn der Spitzwinkel des Parallelogrammes $62^\circ 15'$ beträgt?

9. Zwei Kräfte P und Q (Fig. 39) wirken unter einem Winkel w auf einen Punkt O. Wie groß ist ihre Resultierende R, wenn:

a) $P = 13\ kg$, $Q = 19\ kg$, $\sphericalangle w = 50^\circ$

b) $P = 70\ kg$, $Q = 110\ kg$, $\sphericalangle w = 65^\circ$

c) $P = 290\ kg$, $Q = 510\ kg$, $\sphericalangle w = 100^\circ$

d) $P = 48{\cdot}5\ kg$, $Q = 69{\cdot}8\ kg$, $\sphericalangle w = 61^\circ 40'$ ist?

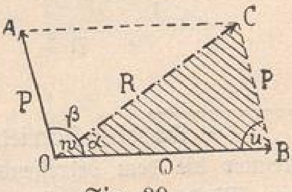


Fig. 39.

10. Zwei Kräfte P und Q wirken unter dem Winkel w zusammen. Wie groß ist ihre Resultierende R, und wie groß sind die Winkel α und β, welche die Resultierende mit den Kräften Q und P einschließt, wenn:

a) $P = 80\ kg$	*b)* $P = 125\ kg$	*c)* $P = 62{\cdot}5\ kg$
$Q = 50\ kg$	$Q = 96\ kg$	$Q = 55\ kg$
$\sphericalangle w = 53^0$	$\sphericalangle w = 65^0$	$\sphericalangle w = 72^0$ ist?

Resultate.

1. $c = 21\ m$
2. $a = 5{\cdot}679\ m$
3. $b = 55{\cdot}115\ m$
4. $c = 8{\cdot}976\ m$
5. $b = 13{\cdot}147\ m$
6. $a = 97{\cdot}25\ cm$
7. *a)* $x = 83{\cdot}43\ m$
   b) $x = 339{\cdot}98\ m$
8. $d_1 = 38{\cdot}94\ cm$
   $d_2 = 25{\cdot}09\ cm$
9. *a)* $R = 29{\cdot}112\ kg$
   b) $R = 153{\cdot}32\ kg$
   c) $R = 541{\cdot}14\ kg$
   d) $R = 102{\cdot}16\ kg$
10. *a)* $R \doteq 117\ kg$
    $\sphericalangle \alpha \doteq 33^0$
    $\sphericalangle \beta \doteq 20^0$
    b) $R = 187{\cdot}04\ kg$
    $\sphericalangle \alpha = 37^0\,17'$
    $\sphericalangle \beta = 27^0\,43'$
    c) $R = 95{\cdot}16\ kg$
    $\sphericalangle \alpha = 38^0\,39'$
    $\sphericalangle \beta = 33^0\,21'$

Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

§ 18. Sind die drei Seiten a, b und c eines Dreieckes gegeben, so kann man die halben Dreieckswinkel nach folgenden Formeln finden:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{a\,c}} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{a\,b}}\,\text{*)}$$

In diesen Formeln bedeutet s den halben Umfang des Dreieckes, so daß $a + b + c = 2\,s$ ist.

Ableitung der Formeln. Macht man in Fig. 40

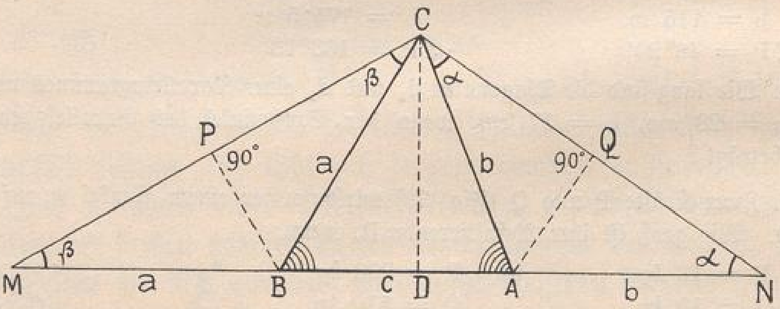


Fig. 40.

*) Um diese Formeln dem Gedächtnisse einzuprägen, merke man sich, daß im Nenner die dem betreffenden Winkel anliegenden Seiten stehen, während die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Zähler vorkommt.

$$BM = BC = a \qquad \text{und} \qquad AN = AC = b,$$

so sind die Dreiecke MBC und NAC gleichschenklig, und es ist als Außenwinkel

$$\sphericalangle B = 2\beta \qquad\qquad \sphericalangle A = 2\alpha,$$

also $$\beta = \frac{B}{2} \qquad\qquad \alpha = \frac{A}{2}$$

Ferner ist $MN = a + c + b = 2s$. Macht man nun $CD \perp AB$,

so ist $$MD + DN = MN$$

oder $$MC \cos\beta + NC \cos\alpha = 2s \tag{1}$$

Nun ist aber (§ 12) $MC = 2 \times MP = 2 \times a \cos\beta$

$NC = 2 \times NQ = 2 \times b \cos\alpha$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) ein, so erhält man $2a\cos^2\beta + 2b\cos^2\alpha = 2s$*) oder $a\cos^2\beta + b\cos^2\alpha = s$ (I)

Analog gelten auch, wenn $\gamma = \frac{C}{2}$ ist, die Gleichungen

$$b\cos^2\gamma + c\cos^2\beta = s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{II}$$
$$c\cos^2\alpha + a\cos^2\gamma = s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{III}$$

Multipliziert man die Gleichungen I, II und III bezw. mit c, — a und b, so erhält man

$$ac\cos^2\beta + bc\cos^2\alpha = cs$$
$$-ab\cos^2\gamma - ac\cos^2\beta = -as$$
$$bc\cos^2\alpha + ab\cos^2\gamma = bs.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich

$$2bc\cos^2\alpha = s\,(c - a + b)$$

Da nun $c - a + b = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$ ist, so erhält man weiter

$$2bc\cos^2\alpha = 2s\,(s - a)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{s\,(s-a)}{bc} \qquad\qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

und da $\sphericalangle \alpha = \frac{A}{2}$ ist, $$\mathbf{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}}$$

*) Statt $(\cos\beta)^2$ schreibt man $\cos^2\beta$.

In derselben Weise lassen sich aus den Gleichungen (I), (II) und (III), wenn man sie mit c, a und — b, beziehungsweise mit — c, a und b multipliziert und dann addiert, die angegebenen Formeln für $\cos\frac{B}{2}$ und $\cos\frac{C}{2}$ ableiten.

Beispiel. Wie groß sind die Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 25$ m, $b = 21$ m, $c = 30$ m?

Ausführung. Es ist der Umfang $u = 76$ m, daher $s = 38$ m und $s - a = 13$ m, $s - b = 17$ m, $s - c = 8$ m.

Somit ist

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 13}{21 \times 30}} \qquad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 17}{25 \times 30}} \qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 8}{25 \times 21}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = 0{\cdot}8855 \qquad \cos\frac{B}{2} = 0{\cdot}9281 \qquad \cos\frac{C}{2} = 0{\cdot}76095$$

$$\sphericalangle\frac{A}{2} = 27^0\,42' \qquad \sphericalangle\frac{B}{2} = 21^0\,52' \qquad \sphericalangle\frac{C}{2} = 40^0\,27'$$

Bevor man die ganzen Winkel berechnet, überzeugt man sich, ob die Summe der halben Winkel 90^0 ergibt. In unserem Beispiele ist diese Summe $= 90^0 01'$. Es ist also ein kleiner Fehler von $1'$ vorhanden, der sich aus der Ungenauigkeit des Tabellen-Rechnens erklärt. Größere Abweichungen würden auf einen Rechenfehler hinweisen.

Multipliziert man die obenstehenden Gleichungen mit 2, so erhält man:

$$\boldsymbol{\sphericalangle A = 55^0\,24'} \qquad \boldsymbol{\sphericalangle B = 43^0\,44'} \qquad \boldsymbol{\sphericalangle C = 80^0\,54'}$$

Zusatz. Auch den Carnotschen Lehrsatz kann man verwenden, um aus den Seiten eines Dreieckes dessen Winkel zu berechnen.

Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ergibt sich $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

daher $$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Ebenso muß $$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

und $$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$ sein.

In diesen Gleichungen spricht sich folgende Regel aus:

Der Cosinus eines Dreieckswinkels wird gefunden, wenn man von der Summe der Quadrate der beiden ihn einschließenden Seiten das Quadrat der gegenüberliegenden Seite subtrahiert und das Ganze durch das doppelte Produkt der ihn einschließenden Seiten dividiert.

Will man bei Anwendung dieser Regel das Auftreten negativer Cosinuswerte vermeiden, so berechne man zuerst die zwei Winkel, welche der größten Seite anliegen. Hierauf findet man den dritten Winkel, indem man die Summe der beiden bereits gefundenen von 180° subtrahiert.*)

Beispiel 1. Man berechne nach der vorstehenden Regel die drei Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 41$ m $b = 52$ m $c = 15$ m.

$$\cos A = \frac{2704 + 225 - 1681}{2 \times 52 \times 15} = 0{\cdot}8000 \quad \ldots \quad \sphericalangle A = 36^\circ\, 52'$$

$$\cos C = \frac{1681 + 2704 - 225}{2 \times 41 \times 52} = 0{\cdot}9756 \quad \ldots \quad \sphericalangle C = 12^\circ\, 43'$$

$$180^\circ - (A + C) \quad \ldots \quad \sphericalangle B = 130^\circ\, 25'$$

Beispiel 2. Wie groß ist in Fig. 39 der Winkel w, wenn $P = 65\,kg$ $Q = 85\,kg$ $R = 100\,kg$ ist?

1. Lösung.

$$\cos \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S - R)}{P\,Q}}$$

$$S = \frac{P + Q + R}{2} = 125$$

$$\cos \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{125 \times 25}{65 \times 85}} = 0{\cdot}7521$$

$$\frac{u}{2} = 41^\circ 14'$$

$$u = 82^\circ 28'$$

2. Lösung.

$$\cos u = \frac{P^2 + Q^2 - R^2}{2\,P\,Q}$$

$$\cos u = \frac{11450 - 10000}{2 \times 65 \times 85}$$

$$\cos u = \frac{1450}{11050}$$

$$\cos u = 0{\cdot}1312$$

$$u = 82^\circ 28'$$

$$\mathbf{w = 180^\circ - u = 97^\circ\, 32'}$$

---

*) Führt die Regel zu einem negativen Cosinuswert, so suche man zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in der Tabelle den zugehörigen Winkel w. Diesen muß man noch von 180° subtrahieren, um den Dreieckswinkel zu erhalten.

z. B. $a = 75\,m$ $b = 43\,m$ $c = 90\,m$

$$\cos C = \frac{75^2 + 43^2 - 90^2}{2 \times 75 \times 43} = \frac{-626}{6450} = -0{\cdot}09705$$

$$w = 84^\circ\, 26' \qquad \sphericalangle C = 180^\circ - w = 95^\circ\, 34'$$

Übungsbeispiele.

Man berechne die Winkel A und B folgender, durch ihre drei Seiten gegebenen Dreiecke:

1.	$a = 17\ m$	3.	$a = 22{\cdot}2\ m$	5.	$a = 20\ m$
	$b = 14\ m$		$b = 14{\cdot}9\ m$		$b = 28\ m$
	$c = 15\ m$		$c = 22{\cdot}1\ m$		$c = 15\ m$
2.	$a = 8{\cdot}2\ m$	4.	$a = 4{\cdot}1\ m$	6.	$a = 71{\cdot}2\ cm$
	$b = 6{\cdot}5\ m$		$b = 1{\cdot}5\ m$		$b = 60{\cdot}1\ cm$
	$c = 7{\cdot}3\ m$		$c = 5{\cdot}2\ m$		$c = 28{\cdot}9\ cm$

7. Von einem Parallelogramm sind die Seiten $a = 10{\cdot}5\ cm$, $b = 16{\cdot}8\ cm$ und die eine Diagonale $d_1 = 14{\cdot}7\ cm$ gegeben. Wie groß sind die Winkel des Parallelogrammes und wie lang ist die zweite Diagonale d_2?

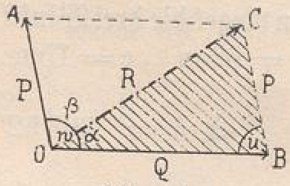


Fig. 41.

8. Zwei Kräfte P und Q wirken so zusammen, daß ihre Resultierende = R wird (Fig. 41). Welchen Winkel schließen die beiden Kräfte ein, wenn:

a)	$P = 70\ kg$	*d)*	$P = 50\ kg$	*g)*	$P = 235\ kg$
	$Q = 80\ kg$		$Q = 80\ kg$		$Q = 175\ kg$
	$R = 90\ kg$		$R = 100\ kg$		$R = 300\ kg$
b)	$P = 85\ kg$	*e)*	$P = 13\ kg$	*h)*	$P = 96{\cdot}6\ kg$
	$Q = 46\ kg$		$Q = 25\ kg$		$Q = 73{\cdot}8\ kg$
	$R = 90\ kg$		$R = 30\ kg$		$R = 140\ kg$
c)	$P = 75\ kg$	*f)*	$P = 42\ kg$	*i)*	$P = 358\ kg$
	$Q = 115\ kg$		$Q = 63\ kg$		$Q = 215\ kg$
	$R = 100\ kg$		$R = 84\ kg$		$R = 450\ kg$ ist?

Anleitung. Es ist $\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S(S-R)}{PQ}}$, worin $S = \frac{1}{2}(P + Q + R)$ ist.

Da nun $u + w = 180^0$ also $\frac{u}{2} + \frac{w}{2} = 90^0$ ist, so ist

nach § 4 $\cos\frac{u}{2} = \sin\frac{w}{2}$

daher $\sin\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{S(S-R)}{PQ}}$

Resultate.

1.	$\sphericalangle A = 71^0\,41'$	4.	$\sphericalangle A = 36^0\,52'$
	$\sphericalangle B = 51^0\,26'$		$\sphericalangle B = 12^0\,41'$
2.	$\sphericalangle A = 72^0\,39'$	5.	$\sphericalangle A = 43^0\,32'$
	$\sphericalangle B = 49^0\,9'$		$\sphericalangle B = 105^0\,22'$
3.	$\sphericalangle A = 70^0\,43'$	6.	$\sphericalangle A = 100^0\,19'$
	$\sphericalangle B = 39^0\,19'$		$\sphericalangle B = 56^0\,10'$

7.	60° und 120°	$d_2 = 23 \cdot 85\ cm$			
8. *a)*	106° 38′	*d)*	82° 06′	*g)*	87° 06′
b)	99° 08′	*e)*	80° 37′	*h)*	70° 14′
c)	120° 50′	*f)*	75° 31′	*i)*	79° 29′

Flächenformeln.

§ 19. I. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes wird gefunden, indem man die Maßzahlen der beiden Katheten multipliziert und das erhaltene Produkt durch 2 dividiert.

$$F = \frac{a.b}{2} \quad \ldots\ (\text{Fig. } 42.)$$

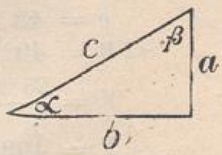


Fig. 42.

Ist nun das Dreieck nicht durch seine beiden Katheten, sondern in anderer Weise bestimmt, so ermittele man zunächst die Katheten und berechne sodann aus diesen den Flächeninhalt.

Beispiele. Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Stücke bestimmten rechtwinkligen Dreiecke:

1. $c = \mathbf{18 \cdot 7}\ m$
$a = \mathbf{8 \cdot 8}\ m$
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$b = 16 \cdot 5\ m$
$F = \frac{16 \cdot 5 \times 8 \cdot 8}{2}$
$F = \mathbf{72 \cdot 6}\ m^2$

2. $c = \mathbf{45}\ cm$
$\sphericalangle A = \mathbf{38^0}$
$a = c \sin A$
$b = c \cos A$
$a = 27 \cdot 71\ cm$
$b = 35 \cdot 46\ cm$
$F = \mathbf{491 \cdot 3}\ cm^2$

3. $a = \mathbf{12 \cdot 5}\ dm$
$\sphericalangle B = \mathbf{54^0\ 30'}$
$b = a \operatorname{tg} B$
$b = 17 \cdot 524\ dm$
$F = \frac{17 \cdot 524 \times 12 \cdot 5}{2}$
$F = \mathbf{109 \cdot 525}\ dm^2$

§ 20. II. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Dreieckes kann gefunden werden, indem man das Produkt aus zwei Seiten und dem sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels bildet und durch 2 dividiert.

NB. Ist der Winkel größer als 90°, so hat man statt seines sinus den sinus des Nebenwinkels zu nehmen.

Nach der angegebenen Regel muß

in Fig. 43 . . $F = \frac{a\,c \sin B}{2}$ und in Fig. 44 . . $F = \frac{a\,c \sin \beta}{2}$ sein.

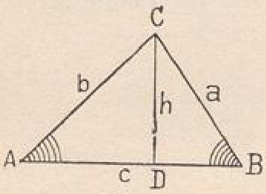


Fig. 43.

Beweis. Bekanntlich ist

$$F = \frac{c.h}{2} \ldots (1)$$

Nun ist aber

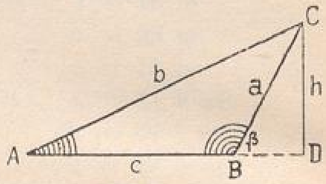


Fig. 44.

$h = a \sin B$ $\qquad$ $h = a \sin \beta$

Setzt man den Wert von h in die Formel (1) ein, so erhält man:

$$\mathbf{F = \frac{a\,c \sin B}{2}} \qquad \mathbf{F = \frac{a\,c \sin \beta}{2}}$$

Beispiele. Man berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes aus folgenden Angaben:

1. $\mathbf{a = 25}\ m$, $\mathbf{c = 48}\ m$, $\mathbf{\sphericalangle B = 43^0}$

$$F = \frac{25 \times 48 \times 0{\cdot}682}{2}$$

$$\mathbf{F = 409{\cdot}2}\ m^2$$

2. $\mathbf{b = 32{\cdot}4}\ cm$, $\mathbf{c = 54{\cdot}2}\ cm$, $\mathbf{\sphericalangle A = 40^0\,10'}$

$$F = \frac{32{\cdot}4 \times 54{\cdot}2 \times 0{\cdot}645}{2}$$

$$\mathbf{F = 566{\cdot}34}\ cm^2$$

3. $\mathbf{a = 7{\cdot}8}\ m$, $\mathbf{b = 3{\cdot}5}\ m$, $\mathbf{\sphericalangle C = 110^0}$

$$F = \frac{a\,b \sin 70^0}{2}$$

$$F = \frac{7{\cdot}8 \times 3{\cdot}5 \times 0{\cdot}9397}{2}$$

$$\mathbf{F = 12\ 827}\ m^2$$

Kennt man von einem Dreiecke bloß eine Seite und die Winkel, so berechne man zunächst (nach dem Sinussatze) noch eine Seite und dann nach obenstehender Regel den Flächeninhalt.

Beispiel. Man berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes aus folgenden Angaben:

$\mathbf{a = 84{\cdot}5}\ cm$
$\mathbf{\sphericalangle B = 72^0}$
$\mathbf{\sphericalangle C = 55^0}$

Ausführung. Es ist $\sphericalangle A = 53^0$

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{84{\cdot}5 \times 0{\cdot}9511}{0{\cdot}7986}$$

$$\mathbf{b = 100{\cdot}64}\ cm$$

Nun ist $F = \frac{a\,b \sin C}{2} = \frac{84{\cdot}5 \times 100{\cdot}64 \times 0{\cdot}8192}{2}$

$$\mathbf{F = 3483}\ cm^2$$

Übungsbeispiele.

Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Angaben bestimmten rechtwinkligen Dreiecke:

1. $c = 8{\cdot}65\ m$ $b = 6{\cdot}92\ m$	4. $b = 4{\cdot}85\ m$ $\sphericalangle A = 51^0\,20'$
2. $a = 40\ cm$ $\sphericalangle B = 45^0$	5. $c = 92{\cdot}5\ cm$ $\sphericalangle A = 26^0\,45'$
3. $a = 25{\cdot}5\ m$ $\sphericalangle A = 32^0\,30'$	6. $c = 13{\cdot}54\ m$ $\sphericalangle A = 61^0\,30'$

Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Stücke bestimmten schiefwinkligen Dreiecke:

7. $a = 75\ cm$ $b = 42\ cm$ $\sphericalangle C = 30^0$	10. $a = 12{\cdot}85\ m$ $b = 20{\cdot}25\ m$ $\sphericalangle C = 101^0\,30'$
8. $a = 112\ cm$ $c = 165\ cm$ $\sphericalangle B = 80^1/_2{}^0$	11. $a = 244\ cm$ $\sphericalangle A = 56^0$ $\sphericalangle B = 42^0$
9. $b = 5{\cdot}37\ m$ $c = 3{\cdot}89\ m$ $\sphericalangle A = 65^0\,15'$	12. $c = 17{\cdot}55\ m$ $\sphericalangle A = 100^0$ $\sphericalangle B = 38^0$

Resultate.

1. $17{\cdot}9574\ m^2$	7. $787{\cdot}5\ cm^2$
2. $800\ cm^2$	8. $9113{\cdot}4\ cm^2$
3. $510{\cdot}35\ m^2$	9. $9{\cdot}4848\ cm^2$
4. $14{\cdot}698\ m^2$	10. $127{\cdot}49\ m^2$
5. $1719{\cdot}59\ cm^2$	11. $23792\ cm^2$
6. $38{\cdot}44\ m^2$	12. $139{\cdot}55\ m^2$

§ 21. Durch Anwendung des in § 20 angegebenen Flächensatzes gelangt man leicht zu folgenden Regeln:

Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes wird gefunden, wenn man das halbe Quadrat des Schenkels mit dem sinus des Winkels an der Spitze multipliziert.

Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes wird gefunden, wenn man das Produkt zweier zusammenstoßender Seiten mit dem sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels multipliziert.

§ 22. **Der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke** wird gefunden, indem man zunächst den Flächeninhalt des (gleichschenkligen) „Bestimmungsdreieckes“ AOB (Fig. 45) berechnet und diesen mit der Seitenzahl des Polygons multipliziert.

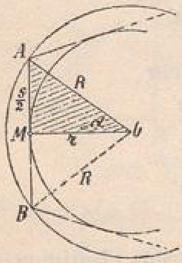


Fig. 45.

1. Aufgabe. Es ist eine Formel aufzustellen, nach welcher der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes aus seiner Seite berechnet werden kann.

Bezeichnet n die Anzahl der Polygonsseiten, so ist im $\triangle$ OMA . . . $\sphericalangle\, \alpha = \frac{180^0}{n}$

$$r = \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

Der Flächeninhalt f des Dreieckes AOB ist:

$$f = \frac{s}{2} \cdot r$$

$$f = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

$$f = \frac{s^2}{4} \operatorname{cotg} \alpha$$

somit der Flächeninhalt F des ganzen Vieleckes

$$\mathbf{F = n \frac{s^2}{4} cotg \frac{180^0}{n}} \; . \; . \; . \; \mathbf{(I)}$$

2. Aufgabe. Es ist eine Formel aufzustellen, nach welcher der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes aus dem Halbmesser R des umschriebenen Kreises berechnet werden kann.

Nach § 21 ergibt sich:

$$f = \frac{R^2}{2} \sin AOB$$

und da $\sphericalangle\, AOB = \frac{360^0}{n}$

und $F = nf$ ist,

so ist $\mathbf{F = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{360^0}{n}} \; . \; . \; . \; \mathbf{(II)}$

Durch Anwendung der Formeln I und II auf das reguläre Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Achteck, Neuneck, Zehneck, Zwölfeck und Fünfzehneck erhält man:

$u = n \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180}{n}$

$F = \dfrac{\frac{u}{2 \sin \frac{180}{n}} \cdot R \sin \frac{360}{n}}{2}$

$F_3 = 0{\cdot}4330\ s^2$	$F_3 = 1{\cdot}2990\ R^2$	
$F_4 = 1{\cdot}0000\ s^2$	$F_4 = 2{\cdot}0000\ R^2$	
$F_5 = 1{\cdot}7205\ s^2$	$F_5 = 2{\cdot}3776\ R^2$	
$F_6 = 2{\cdot}5981\ s^2$ $s = R$	$F_6 = 2{\cdot}5981\ R^2$	$u = 6.R;\ \frac{F}{iw} = 0{,}433.R$
$F_7 = 3{\cdot}6339\ s^2$	$F_7 = 2{\cdot}7364\ R^2$	
$F_8 = 4{\cdot}8284\ s^2$	$F_8 = 2{\cdot}8284\ R^2$	
$F_9 = 6{\cdot}1818\ s^2$	$F_9 = 2{\cdot}8925\ R^2$	
$F_{10} = 7{\cdot}6942\ s^2$	$F_{10} = 2{\cdot}9389\ R^2$	
$F_{12} = 11{\cdot}1962\ s^2$ $s = \frac{R}{\sqrt{3{,}7321}}$	$F_{12} = 3{\cdot}0000\ R^2$	$u = 6{,}2.R;\ \frac{F}{iw} = 0{,}48.R$
$F_{15} = 17{\cdot}6424\ s^2$ $1{,}93$	$F_{15} = 3{\cdot}0505\ R^2$	

Übungsbeispiele.

1. Man berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes, Siebeneckes Neuneckes und Zwölfeckes aus seiner Seite, wenn:

a) $s_5 = 37\ mm$ c) $s_9 = 12{\cdot}5\ cm$
b) $s_7 = 4{\cdot}5\ cm$ d) $s_{12} = 3{\cdot}25\ m$ ist.

2. Man berechne den Flächeninhalt eines regulären Fünfeckes, Achteckes, Zwölfeckes und Fünfzehneckes, welches einem Kreise vom Halbmesser $R = 12{\cdot}7\ cm$ eingeschrieben ist.

3. Eine auf Druck beanspruchte Säule aus Tannenholz hat ein regelmäßiges Sechseck von der Seitenlänge $s = 18{\cdot}5\ cm$ zum Querschnitt. Wie groß ist die zulässige Beanspruchung dieser Säule, wenn per 1 cm^2 Querschnitt 75 kg gerechnet werden dürfen?

4. Eine Säule überträgt auf den Boden einen vertikalen Druck $V = 13600\ kg$ und wird behufs besserer Druckverteilung auf eine regelmäßig-achteckige Platte von der Seitenlänge 25 cm gestellt. Welcher Druck wird durch die Platte auf jedes cm^2 des Bodens übertragen? Ist die Platte genügend groß, wenn die Tragfähigkeit des Bodens per 1 cm^2 4·8 kg beträgt?

5. Wie groß ist die Zug-Querschnittsfläche am Fuße eines achteckigen Fabriksschornsteines, wenn dieselbe ein regelmäßiges Achteck von 65 cm Seitenlänge bildet?

6. Die innere lichte Weite (der senkrechte Abstand zweier paralleler Gegenseiten) am Fuße eines regelmäßig-achteckigen Schornsteines beträgt 1·25 m. Wie groß ist die Zug-Querschnittsfläche?

Anleitung: Man berechne zunächst entweder die Seite des Achteckes oder den Halbmesser des umschriebenen Kreises.

7. Die Zug-Querschnittsfläche F eines regelmäßig-achteckigen Schornsteines soll am Fuße 1·5 m^2 betragen. Wie groß ist die Seite s und die lichte Weite w am Fuße der Schornsteinöffnung?

Anleitung: Es ist $F = 4{\cdot}8284\ s^2$

folglich $s^2 = \frac{F}{4{\cdot}8284}$

und $s = \sqrt{\frac{F}{4{\cdot}8284}}$

8. Der Querschnitt einer Lagerschale besteht aus einem halben regelmäßigen Achtecke von der Seite $s = 42$ *mm*, aus welchem ein Halbkreis vom Durchmesser $d = 80$ *mm* herausgeschnitten ist. Wie groß ist die Querschnittsfläche?

Resultate.

1. *a)* 2355 mm^2
   b) 73·59 cm^2
   c) 965·92 cm^2
   d) 118·26 m^2
2. $F_5 = 383{\cdot}5\ cm^2$
   $F_8 = 456{\cdot}2\ cm^2$
   $F_{12} = 483{\cdot}87\ cm^2$
   $F_{15} = 492\ cm^2$
3. 66682 *kg*
4. 4·506 *kg*
   Die Platte ist genügend groß.
5. 2·04 m^2
6. 1·294 m^2
7. $s = 0{\cdot}557\ m$
   $w = 1{\cdot}345\ m$
8. $f = 1745\ mm^2$

Anhang.

Zusammenhang zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels.

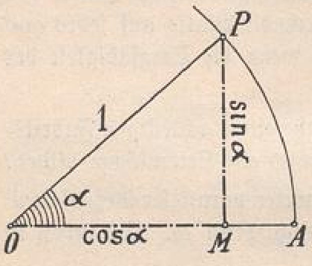


Fig. 46.

Wenn in Fig. 46 der Kreishalbmesser $OA = OP = 1$ ist, so geben die Maßzahlen der Strecken PM und OM nach § 2 unmittelbar den sinus, bezw. cosinus des Winkels α an. Durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck OMP erhält man:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^{*)} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Aus dem Dreiecke OMP folgt ferner:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OM}{PM} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

*) $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$. $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln vermag man, wenn der sinus (cosinus) eines Winkels gegeben ist, zunächst den cosinus (sinus) und hierauf den tangens und cotangens desselben Winkels zu berechnen:

Ist z. B. $\sin\alpha = 0\cdot6$, so ist $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0\cdot6^2} = \sqrt{0\cdot64} = 0\cdot8$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0\cdot6}{0\cdot8} = 0\cdot75 \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{0\cdot8}{0\cdot6} = 1\cdot33333$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme aus den folgenden Angaben cosinus, tangens und cotangens des betreffenden Winkels:

1. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ 2. $\sin 30^0 = 0\cdot5$ 3. $\sin 20^0 = 0\cdot342$

2. $\sin 18^0 = 0\cdot309$ 5. $\sin 56^0 = 0\cdot829$ 6. $\sin 52^0 = 0\cdot788$

Man bestimme aus folgenden Angaben sinus, tangens und cotangens des betreffenden Winkels:

7. $\cos\alpha = \frac{12}{37}$ 8. $\cos 36^0 = 0\cdot809$ 9. $\cos 40^0 = 0\cdot766$

10. $\cos 47^0 = 0\cdot682$ 11. $\cos 63^0 = 0\cdot454$ 12. $\cos 59^0 = 0\cdot515$

Resultate.

1. $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$ 2. 0·8660, 0·5774, 1·732

3. 0·9397, 0·3640, 2·748 4. 0·9511, 0·3249, 3·078

5. 0·5592, 1·483, 0·6745 6. 0·6157, 1·280, 0·7813

7. $\frac{35}{37}$, $\frac{35}{12}$, $\frac{12}{35}$ 8. 0·5878, 0·7265, 1·376

9. 0·6428, 0·8391, 1·192 10. 0·7314, 1·072, 0·9325

11. 0·8910, 1·963, 0·5095 12. 0·8572, 1·664, 0·6009

Goniometrische Gleichungen.

Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine Gleichung zwischen zwei (oder mehreren) seiner Funktionen gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um dieselbe zu lösen, d. h. den Winkel zu berechnen, muß man zunächst die Gleichung so umformen, daß darin nur eine Funktion des Winkels vorkommt.

Folgende Beispiele sollen dies deutlicher ersichtlich machen.

1. $\mathbf{11 \sin^2 \alpha = 4 + 5 \cos^2 \alpha}$

Da $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ist,

so erhält man:

$$11 \sin^2 \alpha = 4 + 5 - 5 \sin^2 \alpha$$

$$16 \sin^2 \alpha = 9$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4} = 0{\cdot}7500$$

$$\alpha = \mathbf{48^0\, 35'}$$

2. $\mathbf{4 \operatorname{tg} \alpha = 9 \operatorname{cotg} \alpha}$

Da $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ist,

so erhält man:

$$4 \operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{9}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5000$$

$$\alpha = \mathbf{56^0\, 18{\cdot}5'}$$

3. $\mathbf{5 \sin \alpha = 8 \cos \alpha}$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $\cos \alpha$, so erhält man:

$$5 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 8$$

$$5 \operatorname{tg} \alpha = 8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{5} = 1{\cdot}6000$$

$$\alpha = \mathbf{58^0}$$

Hätte man die gegebene Gleichung durch $\sin \alpha$ dividiert, so wäre man auf $\operatorname{cotg} \alpha$ gekommen.

4. $\mathbf{5 \sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha}$

$$5 \sin \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Kürzt man durch $\sin \alpha$,*) so erhält man:

$$5 = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{5} = 0 \cdot 4000$$

$$\alpha = \mathbf{66^0\, 26'}$$

In ähnlicher Weise löst man die Gleichung

$$8 \cos \alpha = 3 \operatorname{cotg} \alpha$$

*) Da man durch $\sin \alpha$ kürzt, so ist $\sin \alpha = 0$ zu setzen, woraus die Lösung folgt: $\sphericalangle \alpha_1 = 0$.

5. $\mathbf{\sin\alpha + \cos\alpha = 1{\cdot}4}$

Es ist

$$\cos\alpha = 1{\cdot}4 - \sin\alpha$$

und

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

folglich

$$\sin^2\alpha + (1{\cdot}4 - \sin\alpha)^2 = 1$$

$$2\sin^2\alpha - 2{\cdot}8\sin\alpha + 1{\cdot}96 = 1$$

$$\sin^2\alpha - 1{\cdot}4\sin\alpha + 0{\cdot}48 = 0^{*)}$$

$$\sin\alpha = 0{\cdot}7 \pm \sqrt{0{\cdot}49 - 0{\cdot}48}$$

$$\sin\alpha = 0{\cdot}7 \pm 0{\cdot}1$$

$$\sin\alpha_1 = 0{\cdot}8 \quad \sin\alpha_2 = 0{\cdot}6$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 53^0\,8' \quad \alpha_2 = 36^0\,52'}$$

6. $\mathbf{20\sin\alpha = 9\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$

$$20\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$20\sin^2\alpha = 9\cos\alpha$$

$$20(1 - \cos^2\alpha) = 9\cos\alpha$$

$$1 - \cos^2\alpha = 0{\cdot}45\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha + 0{\cdot}45\cos\alpha - 1 = 0^{**)}$$

$$\cos\alpha = -0{\cdot}225 \pm \sqrt{0{\cdot}050625 + 1}$$

$$\cos\alpha = -0{\cdot}225 \pm 1{\cdot}025$$

Vernachlässigt man den negativen Wert, so erhält man

$$\cos\alpha = 0{\cdot}8000$$

$$\boldsymbol{\alpha = 36^0\,52'}$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme den Winkel α aus folgenden Gleichungen:

1. $9\sin^2\alpha = 7\cos^2\alpha + 2$
2. $2\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha - 3$
3. $3\,\mathrm{tg}\,\alpha = 5\,\mathrm{cotg}\,\alpha$
4. $8\,\mathrm{cotg}\,\alpha = 13\,\mathrm{tg}\,\alpha$
5. $4\sin\alpha = 9\cos\alpha$
6. $\cos\alpha = 3\sin\alpha$
7. $\mathrm{tg}\,\alpha = 5\sin\alpha$
8. $11\cos\alpha = 4\,\mathrm{cotg}\,\alpha$
9. $13(\sin\alpha - \cos\alpha) = 7$
10. $4\sin\alpha + \cos\alpha = 3$
11. $\sin\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$
12. $5\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$

*) Man setze $\sin\alpha = x$.

**) Man setze $\cos\alpha = x$.

$R = N . f = G . \cos\alpha . f$

$P = G . \sin\alpha$

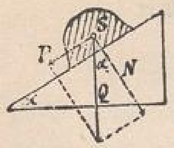


Fig. 47.

13. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 47) vom Neigungswinkel α liegt ein Körper, dessen Reibungskoëffizient gegen die schiefe Ebene f ist. Wie groß darf der Winkel α höchstens sein, damit der Körper durch Reibung festsitze, wenn

(α heißt ≤ γ?)

a) $f = 0 \cdot 12$ *b)* $f = 0 \cdot 24$ *c)* $f = 0 \cdot 48$ ist?

Anleitung. Die Reibung $R = Nf$ muß der Komponente P gleich sein.

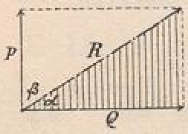


Fig. 48.

14. Eine Kraft $R = 60$ *kg* ist so in zwei zu einander senkrechte Komponenten P und Q zu zerlegen, daß $P + Q = 84$ *kg* ist. Unter welchen Winkeln α und β (Fig. 48) sind die Komponenten gegen die Resultierende geneigt?

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{84}{60}$

Anleitung. Man kann die Winkel unmittelbar bestimmen ($R \sin\alpha + R \cos\alpha = 84$); man kann aber auch aus den Gleichungen

$$P + Q = 84 \text{ und } P^2 + Q^2 = R^2 = 3600$$

zuerst die Komponenten P und Q und dann die Winkel berechnen.

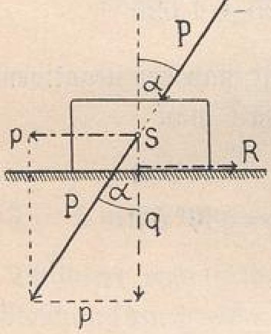


Fig. 49.

15. Ein Körper (Fig. 49) liegt auf einer horizontalen Unterlage, mit welcher er den Reibungskoëffizienten $f = 0 \cdot 4$ besitzt. In der Richtung nach dem Schwerpunkte S, um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt, wirkt auf den Körper eine Kraft $P = 50$ *kg*. Wie groß muß der Winkel α mindestens sein, damit der Körper gleitet, wenn:

a) das Gewicht des Körpers gleich Null gesetzt wird?

b) das Gewicht des Körpers $Q = 60$ *kg* ist?

Anleitung. Für den gesuchten Winkel muß die Reibung $R = p$ sein. Die Reibung ist im Falle *a)* $R = qf$, im Falle *b)* $R = (Q + q) f$.

Resultate.

1. 48° 35′	2. 48° 12′		3. 52° 14′
4. 38° 7′	5. 66° 2′		6. 18° 26′
7. 78° 28′; (0°)	8. 21° 19′; (90°)		9. 67° 23′
10. 32° 39′	11. 65° 32′		12. 64° 50′
13. $\operatorname{tg} \alpha = f$	*a)* 6° 50′	*b)* 13° 30′	*c)* 25° 38′
14. $\sphericalangle \alpha = 53° 8′$	$\sphericalangle \beta = 36° 52′$		
15. *a)* 21° 48′	*b)* 48° 16′		

Tabelle

der

Winkelfunktionen.

$P_1 + P_2 = 150\ \mathrm{kg}$

$P_3 = 105\ \mathrm{kg}$

$P_1 \sin\alpha = P_2 \cos\alpha$

$P_1 + P_2 = 150\ \mathrm{kg}$

$P_3 \cos\alpha + P_3 \sin\alpha = 150$

$P \cos\alpha = (G + P \sin\alpha) \cdot f$

$P(\cos\alpha - \sin\alpha \cdot f) = G \cdot f$

Winkel	sinus	Korr. für 1′	cosinus	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	
0° —	**0·00000**	29·1	**1·00000**	0·1	**0·00000**	29·1	∞	—	**90° —**
0° 30′	0·00873	29·1	0·99996	0·4	0·00873	29·1	114·589	—	89° 30′
1° —	0·01745	29·1	0·99985	0·6	0·01746	29·1	57·290	—	89° —
1° 30′	0·02618	29·1	0·99966	0·9	0·02619	29·1	38·189	—	88° 30′
2° —	0·03490	29·1	0·99939	1·1	0·03492	29·1	28·636	—	88° —
2° 30′	0·04362	29·1	0·99905	1·4	0·04366	29·2	22·904	—	87° 30′
3° —	0·05234	29·0	0·99863	1·7	0·05241	29·2	19·081	91·0	87° —
3° 30′	0·06105	29·0	0·99813	1·9	0·06116	29·2	16·350	67·3	86° 30′
4° —	0·06976	29·0	0·99756	2·1	0·06993	29·2	14·301	53·2	86° —
4° 30′	0·07846	29·0	0·99692	2·4	0·07870	29·3	12·706	42·5	85° 30′
5° —	**0·08716**	29·0	**0·99619**	0·3	**0·08749**	29·3	**11·430**	34·8	**85° —**
5° 30′	0·0959	2·9	0·9954	0·3	0·0963	2·9	10·385	290·2	84° 30′
6° —	0·1045	2·9	0·9945	0·3	0·1051	2·9	9·5144	245·8	84° —
6° 30′	0·1132	2·9	0·9936	0·4	0·1139	3·0	8·7769	210·9	83° 30′
7° —	0·1219	2·9	0·9926	0·4	0·1228	3·0	8·1444	182·8	83° —
7° 30′	0·1305	2·9	0·9914	0·4	0·1317	3·0	7·5958	160·1	82° 30′
8° —	0·1392	2·9	0·9903	0·4	0·1405	3·0	7·1154	141·4	82° —
8° 30′	0·1478	2·9	0·9890	0·5	0·1495	3·0	6·6912	125·8	81° 30′
9° —	0·1564	2·9	0·9877	0·5	0·1584	3·0	6·3138	112·7	81° —
9° 30′	0·1651	2·9	0·9863	0·5	0·1673	3·0	5·9758	101·5	80° 30′
10° —	**0·1737**	2·9	**0·9848**	0·5	**0·1763**	3·0	**5·6713**	91·9	**80° —**
10° 30′	0·1822	2·9	0·9833	0·6	0·1853	3·0	5·3955	83·6	79° 30′
11° —	0·1908	2·9	0·9816	0·6	0·1944	3·0	5·1446	76·5	79° —
11° 30′	0·1994	2·8	0·9799	0·6	0·2035	3·0	4·9152	70·2	78° 30′
12° —	0·2079	2·8	0·9782	0·6	0·2126	3·0	4·7046	64·3	78° —
12° 30′	0·2164	2·8	0·9763	0·7	0·2217	3·1	4·5107	59·7	77° 30′
13° —	0·2250	2·8	0·9744	0·7	0·2309	3·1	4·3315	55·4	77° —
13° 30′	0·2335	2·8	0·9724	0·7	0·2401	3·1	4·1653	51·5	76° 30′
14° —	0·2419	2·8	0·9703	0·7	0·2493	3·1	4·0108	48·0	76° —
14° 30′	0·2504	2·8	0·9682	0·8	0·2586	3·1	3·8667	44·9	75° 30′
15° —	**0·2588**	2·8	**0·9659**	0·8	**0·2680**	3·1	**3·7321**	42·1	**75° —**
15° 30′	0·2672	2·8	0·9636	0·8	0·2773	3·2	3·6059	39·5	74° 30′
16° —	0·2756	2·8	0·9613	0·8	0·2868	3·2	3·4874	37·2	74° —
16° 30′	0·2840	2·8	0·9588	0·8	0·2962	3·2	3·3759	35·0	73° 30′
17° —	0·2924	2·8	0·9563	0·9	0·3057	3·2	3·2709	33·1	73° —
17° 30′	0·3007	2·8	0·9537	0·9	0·3153	3·2	3·1716	31·2	72° 30′
18° —	0·3090	2·8	0·9511	0·9	0·3249	3·2	3·0777	29·7	72° —
18° 30′	0·3173	2·8	0·9483	0·9	0·3346	3·2	2·9887	28·2	71° 30′
19° —	0·3256	2·8	0·9455	1·0	0·3443	3·3	2·9042	26·8	71° —
19° 30′	0·3338	2·7	0·9426	1·0	0·3541	3·3	2·8239	25·5	70° 30′
20° —	**0·3420**	2·7	**0·9397**	1·0	**0·3640**	3·3	**2·7475**	24·3	**70° —**
20° 30′	0·3502	2·7	0·9367	1·0	0·3739	3·3	2·6746	23·2	69° 30′
21° —	0·3584	2·7	0·9336	1·1	0·3839	3·3	2·6051	22·2	69° —
21° 30′	0·3665	2·7	0·9304	1·1	0·3939	3·4	2·5387	21·2	68° 30′
22° —	0·3746	2·7	0·9272	1·1	0·4040	3·4	2·4751	20·3	68° —
22° 30′	0·3827		0·9239		0·4142		2·4142		67° 30′
	cosinus	Korr. für 1′	sinus	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	Winkel

67° 30′–90°

Winkelfunktionen. 22° 30′—45°

Winkel	sinus	Korr. für 1′	cosinus	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	
22° 30′	0·3827	2·7	0·9239	1·1	0·4142	3·4	2·4142	19·4	67° 30′
23° —	0·3907	2·7	0·9205	1·1	0·4245	3·4	2·3559	18·7	67° —
23° 30′	0·3988	2·7	0·9171	1·2	0·4348	3·5	2·2998	17·9	66° 30′
24° —	0·4067	2·7	0·9136	1·2	0·4452	3·5	2·2460	17·2	66° —
24° 30′	0·4147	2·6	0·9100	1·2	0·4557	3·5	2·1943	16·6	65° 30′
25° —	**0·4226**	2·6	**0·9063**	1·2	**0·4663**	3·6	**2·1445**	16·0	**65° —**
25° 30′	0·4305	2·6	0·9026	1·3	0·4770	3·6	2·0965	15·4	64° 30′
26° —	0·4384	2·6	0·8988	1·3	0·4877	3·6	2·0503	14·9	64° —
26° 30′	0·4462	2·6	0·8949	1·3	0·4986	3·7	2·0057	14·4	63° 30′
27° —	0·4540	2·6	0·8910	1·3	0·5095	3·7	1·9626	13·9	63° —
27° 30′	0·4618	2·6	0·8870	1·4	0·5206	3·7	1·9210	13·4	62° 30′
28° —	0·4695	2·6	0·8830	1·4	0·5317	3·8	1·8807	13·0	62° —
28° 30′	0·4772	2·5	0·8788	1·4	0·5430	3·8	1·8418	12·6	61° 30′
29° —	0·4848	2·5	0·8746	1·4	0·5543	3·8	1·8041	12·2	61° —
29° 30′	0·4924	2·5	0·8704	1·5	0·5658	3·9	1·7675	11·8	60° 30′
30° —	**0·5000**	2·5	**0·8660**	1·5	**0·5774**	3·9	**1·7321**	11·5	**60° —**
30° 30′	0·5075	2·5	0·8616	1·5	0·5891	3·9	1·6977	11·1	59° 30′
31° —	0·5150	2·5	0·8572	1·5	0·6009	4·0	1·6643	10·8	59° —
31° 30′	0·5225	2·5	0·8526	1·5	0·6128	4·0	1·6319	10·5	58° 30′
32° —	0·5299	2·5	0·8481	1·6	0·6249	4·1	1·6003	10·2	58° —
32° 30′	0·5373	2·4	0·8434	1·6	0·6371	4·1	1·5697	9·9	57° 30′
33° —	0·5446	2·4	0·8387	1·6	0·6494	4·2	1·5399	9·7	57° —
33° 30′	0·5519	2·4	0·8339	1·6	0·6619	4·2	1·5108	9·4	56° 30′
34° —	0·5592	2·4	0·8290	1·6	0·6745	4·3	1·4826	9·2	56° —
34° 30′	0·5664	2·4	0·8241	1·7	0·6873	4·3	1·4550	9·0	55° 30′
35° —	**0·5736**	2·4	**0·8192**	1·7	**0·7002**	4·4	**1·4282**	8·7	**55° —**
35° 30′	0·5807	2·4	0·8141	1·7	0·7133	4·4	1·4020	8·5	54° 30′
36° —	0·5878	2·3	0·8090	1·7	0·7265	4·5	1·3764	8·3	54° —
36° 30′	0·5948	2·3	0·8039	1·7	0·7400	4·5	1·3514	8·1	53° 30′
37° —	0·6018	2·3	0·7986	1·8	0·7536	4·6	1·3270	7·9	53° —
37° 30′	0·6088	2·3	0·7934	1·8	0·7673	4·7	1·3032	7·8	52° 30′
38° —	0·6157	2·3	0·7880	1·8	0·7813	4·7	1·2799	7·6	52° —
38° 30′	0·6225	2·3	0·7826	1·8	0·7954	4·8	1·2572	7·4	51° 30′
39° —	0·6293	2·3	0·7772	1·9	0·8098	4·8	1·2349	7·3	51° —
39° 30′	0·6361	2·2	0·7716	1·9	0·8243	4·9	1·2131	7·1	50° 30′
40° —	**0·6428**	2·2	**0·7660**	1·9	**0·8391**	5·0	**1·1918**	7·0	**50° —**
40° 30′	0·6495	2·2	0·7604	1·9	0·8541	5·1	1·1709	6·8	49° 30′
41° —	0·6561	2·2	0·7547	1·9	0·8693	5·1	1·1504	6·7	49° —
41° 30′	0·6626	2·2	0·7490	1·9	0·8847	5·2	1·1303	6·6	48° 30′
42° —	0·6691	2·2	0·7431	2·0	0·9004	5·3	1·1106	6·4	48° —
42° 30′	0·6756	2·1	0·7373	2·0	0·9163	5·4	1·0913	6·3	47° 30′
43° —	0·6820	2·1	0·7314	2·0	0·9325	5·5	1·0724	6·2	47° —
43° 30′	0·6884	2·1	0·7254	2·0	0·9490	5·6	1·0538	6·1	46° 30′
44° —	0·6947	2·1	0·7193	2·0	0·9657	5·7	1·0355	6·0	46° —
44° 30′	0·7009	2·1	0·7133	2·1	0·9827	5·8	1·0176	5·9	45° 30′
45° —	**0·7071**		**0·7071**		**1·0000**		**1·0000**		**45° —**
	cosinus	Korr. für 1′	sinus	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	Winkel

45°—67° 30′

Winkel	sinus	Korr. für 1'	cosinus	Korr. für 1'	tangens	Korr. für 1'	cotangens	Korr. für 1'	
45° —	**0·7071**	2·1	**0·7071**	2·1	**1·0000**	5·9	**1·0000**	5·8	**45° —**
45° 30'	0·7133	2·0	0·7009	2·1	1·0176	6·0	0·9827	5·7	44° 30'
46° —	0·7193	2·0	0·6947	2·1	1·0355	6·1	0·9657	5·6	44° —
46° 30'	0·7254	2·0	0·6884	2·1	1·0538	6·2	0·9490	5·5	43° 30'
47° —	0·7314	2·0	0·6820	2·1	1·0724	6·3	0·9325	5·4	43° —
47° 30'	0·7373	2·0	0·6756	2·2	1·0913	6·4	0·9163	5·3	42° 30'
48° —	0·7431	1·9	0·6691	2·2	1·1106	6·6	0·9004	5·2	42° —
48° 30	0·7490	1·9	0·6626	2·2	1·1303	6·7	0·8847	5·1	41° 30'
49° —	0·7547	1·9	0·6561	2·2	1·1504	6·8	0·8693	5·1	41° —
49° 30'	0·7604	1·9	0·6495	2·2	1·1709	7·0	0·8541	5·0	40° 30'
50° —	**0·7660**	1·9	**0·6428**	2·2	**1·1918**	7·1	**0·8391**	4·9	**40° —**
50° 30'	0·7716	1·9	0·6361	2·3	1·2131	7·3	0·8243	4·8	39° 30'
51° —	0·7772	1·8	0·6293	2·3	1·2349	7·4	0·8098	4·8	39° —
51° 30'	0·7826	1·8	0·6225	2·3	1·2572	7·6	0·7954	4·7	38° 30'
52° —	0·7880	1·8	0·6157	2·3	1·2799	7·8	0·7813	4·7	38° —
52° 30'	0·7934	1·8	0·6088	2·3	1·3032	7·9	0·7673	4·6	37° 30'
53° —	0·7986	1·7	0·6018	2·3	1·3270	8·1	0·7536	4·5	37° —
53° 30'	0·8039	1·7	0·5948	2·3	1·3514	8·3	0·7400	4·5	36° 30'
54° —	0·8090	1·7	0·5878	2·4	1·3764	8·5	0·7265	4·4	36° —
54° 30'	0·8141	1·7	0·5807	2·4	1·4020	8·7	0·7133	4·4	35° 30'
55° —	**0·8192**	1·7	**0·5736**	2·4	**1·4282**	9·0	**0·7002**	4·3	**35° —**
55° 30'	0·8241	1·6	0·5664	2·4	1·4550	9·2	0·6873	4·3	34° 30'
56° —	0·8290	1·6	0·5592	2·4	1·4826	9·4	0·6745	4·2	34° —
56° 30	0·8339	1·6	0·5519	2·4	1·5108	9·7	0·6619	4·2	33° 30'
57° —	0·8387	1·6	0·5446	2·4	1·5399	9·9	0·6494	4·1	33° —
57° 30'	0·8434	1·6	0·5373	2·5	1·5697	10·2	0·6371	4·1	32° 30'
58° —	0·8481	1·5	0·5299	2·5	1·6003	10·5	0·6249	4·0	32° —
58° 30'	0·8526	1·5	0·5225	2·5	1·6319	10·8	0·6128	4·0	31° 30'
59° —	0·8572	1·5	0·5150	2·5	1·6643	11·1	0·6009	3·9	31° —
59° 30'	0·8616	1·5	0·5075	2·5	1·6977	11·5	0·5891	3·9	30° 30'
60° —	**0·8660**	1·5	**0·5000**	2·5	**1·7321**	11·8	**0·5774**	3·9	**30° —**
60° 30'	0·8704	1·4	0·4924	2·5	1·7675	12·2	0·5658	3·8	29° 30'
61° —	0·8746	1·4	0·4848	2·5	1·8041	12·6	0·5543	3·8	29° —
61° 30'	0·8788	1·4	0·4772	2·6	1·8418	13·0	0·5430	3·8	28° 30'
62° —	0·8830	1·4	0·4695	2·6	1·8807	13·4	0·5317	3·7	28° —
62° 30'	0·8870	1·3	0·4618	2·6	1·9210	13·9	0·5206	3·7	27° 30'
63° —	0·8910	1·2	0·4540	2·6	1·9626	14·4	0·5095	3·7	27° —
63° 30'	0·8949	1·3	0·4462	2·6	2·0057	14·9	0·4986	3·6	26° 30'
64° —	0·8988	1·3	0·4384	2·6	2·0503	15·4	0·4877	3·6	26° —
64° 30'	0·9026	1·2	0·4305	2·6	2·0965	16·0	0·4770	3·6	25° 30'
65° —	**0·9063**	1·2	**0·4226**	2·6	**2·1445**	16·6	**0·4663**	3·5	**25° —**
65° 30'	0·9100	1·2	0·4147	2·7	2·1943	17·2	0·4557	3·5	24° 30'
66° —	0·9136	1·2	0·4067	2·7	2·2460	17·9	0·4452	3·5	24° —
66° 30'	0·9171	1·1	0·3988	2·7	2·2998	18·7	0·4348	3·4	23° 30'
67° —	0·9205	1·1	0·3907	2·7	2·3559	19·4	0·4245	3·4	23° —
67° 30'	0·9239		0·3827		2·4142		0·4142		22° 30'
	cosinus	Korr. für 1'	sinus	Korr. für 1'	cotangens	Korr. für 1'	tangens	Korr. für 1'	Winkel

Winkelfunktionen. 67° 30′—90°

Winkel	sinus	Korr. für 1′	cosinus	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	
67° 30′	0·9239	1·1	0·3827	2·7	2·4142	20·3	0·4142	3·4	22° 30′
68° —	0·9272	1·1	0·3746	2·7	2·4751	21·2	0·4040	3·4	22° —
68° 30′	0·9304	1·1	0·3665	2·7	2·5387	22·2	0·3939	3·3	21° 30′
69° —	0·9336	1·0	0·3584	2·7	2·6051	23·2	0·3839	3·3	21° —
69° 30′	0·9367	1·0	0·3502	2·7	2·6746	24·3	0·3739	3·3	20° 30′
70° —	**0·9397**	1·0	**0·3420**	2·7	**2·7475**	25·5	**0·3640**	3·3	**20° —**
70° 30′	0·9426	1·0	0·3338	2·8	2·8239	26·8	0·3541	3·3	19° 30′
71° —	0·9455	0·9	0·3256	2·8	2·9042	28·2	0·3443	3·2	19° —
71° 30′	0·9483	0·9	0·3173	2·8	2·9887	29·7	0·3346	3·2	18° 30′
72° —	0·9511	0·9	0·3090	2·8	3·0777	31·3	0·3249	3·2	18° —
72° 30′	0·9537	0·9	0·3007	2.8	3·1716	33·1	0·3153	3·2	17° 30′
73° —	0·9563	0·8	0·2924	2·8	3·2709	35·0	0·3057	3·2	17° —
73° 30′	0·9588	0·8	0·2840	2·8	3·3759	37·2	0·2962	3·2	16° 30′
74° —	0·9613	0·8	0·2756	2·8	3·4874	39·5	0·2868	3·2	16° —
74° 30′	0·9636	0·8	0·2672	2·8	3·6059	42·1	0·2773	3·1	15° 30′
75° —	**0·9659**	0·8	**0·2588**	2·8	**3·7321**	44·9	**0·2680**	3·1	**15° —**
75° 30′	0·9682	0·7	0·2504	2·8	3·8667	48·0	0·2586	3·1	14° 30′
76° —	0·9703	0·7	0·2419	2·8	4·0108	51·5	0·2493	3·1	14° —
76° 30′	0·9724	0·7	0·2335	2·8	4·1653	55·4	0·2401	3·1	13° 30′
77° —	0·9744	0·7	0·2250	2·8	4·3315	59·7	0·2309	3·1	13° —
77° 30′	0·9763	0·6	0·2164	2·9	4·5107	64·6	0·2217	3·0	12° 30′
78° —	0·9782	0·6	0·2079	2·9	4·7046	70·2	0·2126	3·0	12° —
78° 30′	0·9799	0·6	0·1994	2·9	4·9152	76·5	0·2035	3·0	11° 30′
79° —	0·9816	0·6	0·1908	2·9	5·1446	83·6	0·1944	3·0	11° —
79° 30′	0·9833	0·5	0·1822	2·9	5·3955	91·9	0·1853	3·0	10° 30′
80° —	**0·9848**	0·5	**0·1737**	2·9	**5·6713**	101·5	**0·1763**	3·0	**10° —**
80° 30′	0·9863	0·5	0·1651	2·9	5·9758	112·7	0·1673	3·0	9° 30′
81° —	0·9877	0·5	0·1564	2·9	6·3138	125·8	0·1584	3·0	9° —
81° 30′	0·9890	0·4	0·1478	2·9	6·6912	141·4	0·1495	3·0	8° 30′
82° —	0·9903	0·4	0·1392	2·9	7·1154	160·1	0·1405	3·0	8° —
82° 30′	0·9914	0·4	0·1305	2·9	7·5958	182·8	0·1317	3·0	7° 30′
83° —	0·9926	0·4	0·1219	2·9	8·1444	210·9	0·1228	3·0	7° —
83° 30′	0·9936	0·3	0·1132	2·9	8·7769	245·8	0·1139	2·9	6° 30′
84° —	0·9945	0·3	0·1045	2·9	9·5144	290·2	0·1051	2·9	6° —
84° 30′	0·9954	0·3	0·0959	29·0	10·385	34·8	0·0963	29·3	5° 30′
85° —	**0·99619**	2·4	**0·08716**	29·0	**11·430**	42·5	**0·08749**	29·3	**5° —**
85° 30′	0·99692	2·1	0·07846	29·0	12·706	53·2	0·07870	29·2	4° 30′
86° —	0·99756	1·9	0·06976	29·0	14·301	67·3	0·06993	29·2	4° —
86° 30′	0·99813	1·7	0·06105	29·0	16·350	91·0	0·06116	29·2	3° 30′
87° —	0·99863	1·4	0·05234	29·1	19·081	—	0·05241	29·2	3° —
87° 30′	0·99905	1·1	0·04362	29·1	22·904	—	0·04366	29·1	2° 30′
88° —	0·99939	0·9	0·03490	29·1	28·636	—	0·03492	29·1	2° —
88° 30′	0·99966	0·6	0·02618	29·1	38·189	—	0·02619	29·1	1° 30′
89° —	0·99985	0·4	0·01745	29·1	57·290	—	0·01746	29·1	1° —
89° 30′	0·99996	0·1	0·00873	29·1	114·589	—	0·00873	29·1	0° 30′
90° —	**1·00000**		**0·00000**		∞		**0·00000**		**0° —**
	cosinus	Korr. für 1′	sinus	Korr. für 1′	cotangens	Korr. für 1′	tangens	Korr. für 1′	Winkel

0°—22° 30′

85°—87° 30′ tangens 87° 30′—90°

Winkel	tangens		Winkel	tangens	
85° 0′	**11·430**	5° 0′	87° 30′	22·904	2° 30′
85° 10′	11·826	4° 50′	87° 40′	24·542	2° 20′
85° 20′	12·251	4° 40′	87° 50′	26·432	2° 10′
85° 30′	12·706	4° 30′	**88° 0′**	**28·636**	**2° 0′**
85° 40′	13·197	4° 20′	88° 10′	31·242	1° 50′
85° 50′	13·727	4° 10′	88° 20′	34·368	1° 40′
86° 0′	**14·301**	4° 0′	88° 30′	38·189	1° 30′
86° 10′	14·924	3° 50′	88° 40′	42·964	1° 20′
86° 20′	15·605	3° 40′	88° 50′	49·104	1° 10′
86° 30′	16·350	3° 30′	**89° 0′**	**57·290**	**1° 0′**
86° 40′	17·169	3° 20′	89° 10′	68·750	0° 50′
86° 50′	18·075	3° 10′	89° 20′	85·940	0° 40′
87° 0′	**19·081**	3° 0′	89° 30′	114·589	0° 30′
87° 10′	20·206	2° 50′	89° 40′	171·885	0° 20′
87° 20′	21·470	2° 40′	89° 50′	343·774	0° 10′
87° 30′	22·904	2° 30′	**90° 0′**	∞	**0° 0′**
	cotangens	Winkel		cotangens	Winkel

2°30′—5° cotangens 0°—2°30′

Tafel zur Berechnung einiger regulärer Polygone.*)

Polygone	Es ist zu berechnen:			
	s aus R	s aus r	R aus s	r aus s
Dreieck	s = 1·7321 R	s = 3·4641 r	R = 0·5774 s	r = 0·2887 s
Viereck	s = 1·4142 R	s = 2·0000 r	R = 0·7071 s	r = 0·5000 s
Fünfeck	s = 1·1756 R	s = 1·4531 r	R = 0·8507 s	r = 0·6882 s
Sechseck	s = 1·0000 R	s = 1·1547 r	R = 1·0000 s	r = 0·8660 s
Siebeneck	s = 0·8678 R	s = 0·9633 r	R = 1·1524 s	r = 1·0382 s
Achteck	s = 0·7654 R	s = 0·8284 r	R = 1·3066 s	r = 1 2071 s
Neuneck	s = 0·6840 R	s = 0·7279 r	R = 1·4619 s	r = 1·3737 s
Zehneck	s = 0 6180 R	s = 0·6498 r	R = 1·6180 s	r = 1·5388 s
Zwölfeck	s = 0·5176 R	s = 0·5359 r	R = 1·9319 s	r = 1·8660 s
Fünfzehneck	s = 0·4158 R	s = 0·4251 r	R = 2·4049 s	r = 2·3523 s

* Siehe Seite 19 des Lehrtextes.

Fortsetzung des Verzeichnisses der Lehrbücher für kommerzielle Lehranstalten und für Gewerbeschulen.

Gleisberg, Dr. E., Allgemeine Handelskunde. Preis gebunden 3 K 80 h.

Haberer, Karl, Direktor der Handelsakademie in Innsbruck, **Lehrbuch der Handelskorrespondenz** für den Unterricht an zweikl. Handelsschulen. Preis gebunden 3 K.

— — **Lehrbuch der Handels- und Wechselkunde** für zweiklassige Handelsschulen. 5. Auflage. Preis gebunden 3 K 28 h.

Haymerles Deutsches Lesebuch für kommerzielle Lehranstalten (zweiklassige Handels- und verwandte Schulen). 4. Auflage, bearbeitet und herausgegeben von **Prof. Ignaz Pölzl.** Preis gebunden 2 K 60 h.

Krcek, Ladislaus, Sekretär und Lehrer an der deutschen Handelsakademie in Olmütz, staatlich geprüft für das Lehramt in Stenographie an Mittelschulen. **Lehrbuch der Stenographischen Korrespondenzschrift.** (System Gabelsberger nach den Beschlüssen des Wiener Stenographentages vom Jahre 1895.) Für Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. Preis geheftet 1 K, gebunden 1 K 30 h.

Kreibig, Dr. Josef Klemens, Direktor der k. k. Handelsakademie in Graz, **Leitfaden des kaufmännischen Rechnens** für zweikl. Handelsschulen. 6. Aufl. Preis geb. 3 K.

Norman, Frederick Bryon, Lektor an der k. k. Hochschule f. Bodenkultur, Professor an der Gremial-Handelsfachschule, **Theoretische und praktische englische Konversationsgrammatik.** 5., verbesserte u. vermehrte Aufl. Preis geb. 3 K 40 h.

Odenthal, Josef, Professor an der Prager Handelsakademie, **Leitfaden der kaufmännischen einfachen Buchhaltung.** Zum Gebrauche für Handelsschulen und zum Selbstunterricht. Preis gebunden 2 K 40 h.

Pölzl, Ignaz, Leitfaden für den deutschen Unterricht an Handelsschulen. I. Teil: Der Sprachunterricht. 2. Auflage. Preis gebunden 88 h. — II. Teil: Einführung in die Literatur. 2. Auflage. Preis gebunden 1 K 40 h.

Porges, Karl, Inhaber einer Privathandelsschule in Wien, **Lehrbuch der französischen Handelskorrespondenz** (Traité de la correspondance française) für zweiklassige Handelsschulen. Preis gebunden 3 K 40 h. — Preis des dazugehörigen **Wörterbuches** gebunden 1 K.

Rothaug, Joh. Georg, Grundriß der Handels- und Verkehrsgeographie f. zweikl. Handelsschulen, kommerzielle Fachschulen u. verwandte Anstalten sowie zum Selbstunterrichte für den Handelsstand. 3., umgearbeitete Aufl. Preis gebunden 2 K 22 h.

Schigut, Eugen, Hauptlehrer an der Handelsschule Allina, Lehrer der Buchführung an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien, **Lehrbuch der Handelskorrespondenz** für zweiklassige Handelsschulen. Preis gebunden 4 K.

— — und **Bruno Großmann, Lehr- und Übungsbuch des kaufmännischen Rechnens** für zweiklassige Handelsschulen. 2. Auflage, durchgesehen und verbessert von Eugen Schigut. Preis gebunden 2 K 96 h.

Seibert, Prof. A. E., Mitglied der k. k. Prüfungskommission für zweikl. Handelsschulen in Wien, **Grundzüge der allgemeinen Geographie** für zweikl. Handelsschulen. Vorstufe zur Handels- und Verkehrsgeographie. 2., im wesentlichen unveränderte Auflage. Mit 16 Kartenskizzen. Preis gebunden 1 K 30 h.

Tutschek, Rudolf, Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule und beeideter Buchsachverständiger beim k. k. Landesgerichte in Czernowitz, **Das Musterkontor.** Praktischer Geschäftsgang, angewendet auf den zweimonatlichen Betrieb eines Kompagnie-Engros- und Detailgeschäftes im Warenfache. Preis gebunden 72 h.

Voigt, Dr. Ludwig, früher Direktor der städtischen Handelsschule in Gablonz a. N., jetzt Direktor d. städtischen Handelslehranstalt in Frankfurt a. M., **Kleine französische Grammatik** f. Handelsschulen. 2., im wesentl. unveränderte Aufl. Preis geb. 1 K 36 h.

— — **Übungsbuch zur französischen Grammatik** für Handelsschulen. I. Teil (Unterstufe). 2., verbesserte Auflage. Preis geb. 1 K 32 h. — II. Teil (Oberstufe; Einführung in die französische Handelskorrespondenz). Preis gebunden 1 K 20 h.

— — **Hilfsbüchlein für den deutschen Unterricht,** enthaltend das Wichtigste aus der Literaturgeschichte, Metrik und Poetik. Preis 40 h.

Zehden, Dr. Karl, weil. k. k. Hofrat und Inspektor für den kommerziellen Unterricht, **Leitfaden der Handels- und Verkehrsgeographie** für zweikl. Handelsschulen. 6. Aufl., durchgesehen von **Dr. Theodor Cicalek,** Prof. an der Wiener Handelsakademie. Mit einer Karte des Weltverkehrs. Preis gebunden 2 K 40 h.

Ziegler, Julius, a. o. Professor an der Exportakademie des k. k. österr. Handelsmuseums, wirklicher Lehrer an der staatl. subvent. Handelsschule des Wiener kaufmännischen Vereines, **Lehr- und Übungsbuch der Buchhaltung** für zweiklassige Handelsschulen. 4. Auflage. Preis gebunden 3 K 30 h.

Ziegler, Julius, a. o. Professor an der Exportakademie des k. k. österr. Handelsmuseums, wirklicher Lehrer an der staatl. subvent. Handelsschule des Wiener kaufm. Vereines, **Die amerikanische Buchhaltung** nebst einer Sammlung von Buchhaltungsaufgaben. Supplement zur 3. Auflage des Lehr- und Übungsbuches der Buchhaltung für zweiklassige Handelsschulen. Preis gebunden 1 K 30 h.

D. Lehrbücher für kaufmännische Fortbildungsschulen.

Berger, J., Direktor der Handelsakademie in Graz, **Einführung in die kaufmännische (einfache und doppelte) Buchhaltung** für kaufmännische Fortbildungsschulen. 2. Auflage. Preis gebunden 1 K 28 h.

Frucht, Adolf, Prof. a. d. Handelsakademie in Graz, **Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik** für kaufmännische Fortbildungsschulen. Preis gebunden 1 K 36 h.

Haberer, Karl, Direktor der Handelsakademie in Innsbruck, **Leitfaden der Handelskorrespondenz.** Für den Unterricht an kaufmännischen Fortbildungsschulen. 4., verbesserte Auflage. Preis gebunden 1 K 60 h.

— — **Leitfaden der Handels- und Wechselkunde** für kaufmännische Fortbildungsschulen. 4. Auflage. Preis gebunden 1 K 64 h.

— — **Rechenbuch** für kaufm. Fortbildungsschulen u. einkl. Handelsschulen f. Mädchen. I. Teil. Preis geb. 84 h. — II. Teil. Preis geb. 80 h. — III. Teil. Preis geb. 64 h.

Haymerles Deutsches Lesebuch für kaufmännische Fortbildungsschulen. 2. Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von **Dr. Karl Preißler,** Professor an der Grazer Handelsakademie. Preis gebunden 1 K 36 h.

Holzinger, F. S., Professor der öffentlichen Handelsakademie in Linz. **Leitfaden des kaufmännischen Rechnens** für kaufmännische Fortbildungsschulen. I. Teil. Preis gebunden 1 K 20 h. — II. Teil. Preis gebunden 90 h.

Kreibig, Dr. Josef Klemens, Direktor der k. k Handelsakademie in Graz, **Hilfsbuch für das kaufmännische Rechnen** an kaufmännischen Fortbildungsschulen. I. Bändchen. Preis gebunden 84 h. — II. Bändchen. Preis gebunden 1 K. — III. Bändchen. Preis gebunden 96 h.

Mahner, A., Professor an der k. k. Staatshandwerkerschule in Tetschen a. E., **Leitfaden für den Unterricht in der Warenkunde** an kaufmännischen Fortbildungsschulen. 2., verbesserte Auflage. Preis gebunden 1 K 30 h.

Odenthal, Josef, Professor an der Prager Handelsakademie, **Die kaufmännische Buchhaltung,** mit Rücksicht auf den Gebrauch für kaufmännischen Fortbildungsschulen. Preis gebunden 1 K 48 h.

Ottel, Klemens, Direktor der deutschen Handelsakademie in Olmütz, **Handels- und Wechselkunde** für kaufmännische Fortbildungsschulen, Mädchen-Handelsschulen und zum Selbstunterrichte. Preis gebunden 1 K 44 h.

Seibert, A. E., Professor, **Grundzüge der allgemeinen Geographie** für kaufmännische Fortbildungsschulen. (Erster Jahrgang.) Vorstufe zur Handels- und Verkehrsgeographie. 2., durchgesehene Auflage. Preis gebunden 56 h.

Voigt, Dr. Ludwig, Hilfsbuch für den deutschen Unterricht in kaufmännischen und anderen Fortbildungsschulen. Aufgaben aus der Rechtschreibung, Satzzeichenlehre und Grammatik. Preis 40 h.

Voigt, Dr. Ludwig, Direktor, und **Julius Weyde,** Professor der städt. Handelsakademie in Gablonz a. N., **Einführung in die deutsche Handelskorrespondenz.** Ein Leitfaden für kaufmännische Fortbildungsschulen. I. Teil. (Erstes Unterrichtsjahr.) Preis gebunden 84 h. — II. Teil. (Zweites Unterrichtsjahr.) Preis gebunden 84 h.

Zehden, Dr. Karl, weil. k. k. Hofrat und Inspektor für den kommerziellen Unterricht, **Leitfaden der Handels- und Verkehrsgeographie** für kaufmännische Fortbildungsschulen. 6. Auflage, durchgesehen von **Dr. Theodor Cicalek,** Professor an der Wiener Handelsakademie. Mit einer Karte des Weltverkehrs. Preis geb. 1 K 40 h.

E. Lehrbücher für Gewerbeschulen.

Di Gaspero, M., k. k. Professor, **Materialienkunde** auf naturgesch. Grundlage. Lehrtext für den Unterricht an allgemeinen Handwerkerschulen. Preis geb. 1 K 20 h.