Leitfaden der räumlichen Geometrie für Gewerbebetreibende und gewerbliche Schulen

Hoch, Julius

Leipzig, 1902

urn:nbn:de:hbz:466:1-76720

Dr. jur. Ludwig Huberti's

Praktische Gewerbliche Bibliothek

Räumliche Geometrie für gewerbliche Kreise

von

Julius Hoch

Leipzig
Hilmar Klasing

Praktische gewerbliche Bibliothek

Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner
herausgegeben von
Dr. jur. Ludwig Huberti.

Meistertitel und Meisterprüfung (nach dem 1. Oktober 1901). Laufbahn und Ausbildung des Handwerkers bis zur Meisterstufe. (Für die Hand der Mitglieder der Prüfungskommissionen bestimmt.) Bearbeitet von **Richard Pape**, Sekretär der Handwerkskammer in Insterburg.

Was muss der Handwerker bei der Meisterprüfung von unseren Gesetzen wissen? Eine leichtfassliche Darstellung der für das Handwerk wichtigen Gesetze. Eine Vorbereitung auf die Meisterprüfung, zugleich ein **Leitfaden für den theorethischen Unterricht in den Meisterkursen**, entworfen von **Gustav Koepper**, Sekretär der Handwerkskammer in Coblenz.

Was der Handwerker von kaufmännischen Kenntnissen wissen muss. Die wichtigsten Lehren über gewerbl. Buchführung, Geschäftskorrespondenz, gewerbl. Rechnen und Geschäftsformularien. **Leitfaden für den praktischen Unterricht in den Meisterkursen.** Bearbeitet von Direktor **J. Mertig**, Leiter der Meisterkurse in Halle (Saale).

Die Regelung des Lehrlings- und Gesellenprüfungswesens im Handwerk. (Für die Hand der Mitglieder der Prüfungsausschüsse bestimmt.) Bearbeitet von **Richard Pape**, Sekretär der Handwerkskammer zu Insterburg.

Was man bei der Gesellenprüfung wissen muss. Bearbeitet von **Gustav Koepper**, Sekretär der Handwerkskammer zu Coblenz.

Der Befähigungsnachweis, seine Geschichte und seine Durchführbarkeit. Bearbeitet von Dr. **H. Roehl**, Sekretär der Handwerkskammer in Saarbrücken.

Innungen und Innungsausschüsse. Bearbeitet von Dr. **Neuhaus**, Syndikus der Handwerkskammer zu Berlin.

Die Handwerkskammern, ihre Organisation und ihre Aufgaben. Bearbeitet von Dr. **Neuhaus**, Syndikus der Handwerkskammer zu Berlin.

Praktische Organisation des Arbeitsnachweises. Bearbeitet von **Hermann Eckert**, Sekretär der Handwerkskammer in Freiburg i. Br. und vormals langjähriger Verwalter der städt. Arbeitsnachweis-Anstalt daselbst.

Die gewerbliche Ausbildung durch Fortbildungs- und Fachschulen, Kunstgewerbeschulen und Lehrwerkstätten. Bearbeitet von **K. Weiss**, Kgl. Schulinspektor in Nürnberg.

Allerlei Wissenswertes aus verschiedenen Gebieten. Ein Nachschlagebuch für gewerbliche Stände. Bearbeitet von **Fritz Tisch**, Kommunal- und Gewerbeschullehrer in Wien.

Was soll ich werden? Mitteilungen über die Entstehung des deutschen Handwerks sowie der Art und Leistungsfähigkeit jedes einzelnen Gewerbes als Beitrag zur Berufswahl. Von **J. G. Obst.**

Preis eines jeden Bandes in elegantem Leinenbande 1.50 bis 3.— Mark.

Weitere Bände sind in Vorbereitung und werden sich in rascher Folge anschliessen.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Hilmar Klasing, Verlagsbuchhandlung in Leipzig.

Leitfaden
der räumlichen Geometrie

Dr. iur. Ludwig Huberti's
Praktische gewerbliche Bibliothek

Das Wichtigste aus der Geometrie II

Leitfaden
der
räumlichen Geometrie
für
Gewerbetreibende und gewerbliche Schulen

Mit Rücksicht auf die praktische Anwendung im gewerblichen und technischen Leben

bearbeitet von

Ingenieur **Julius Hoch**
Oberlehrer an der Baugewerkschule in Lübeck

Mit 41 Abbildungen

Leipzig
Verlag von Hilmar Klasing
1902.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.

Vorwort.

Dieselben Grundsätze, welche bei der Bearbeitung des von demselben Verfasser herrührenden Leitfadens der ebenen Geometrie eingehalten wurden, sind auch hier massgebend gewesen, weshalb nur das Allernotwendigste gebracht und stets auf die praktische Anwendung in Handel und Gewerbe gebührend Rücksicht genommen wurde. Die streng mathematische Form wurde auch hier nicht überall eingehalten, sondern das erklärende Wort da zu Hülfe genommen, wo es irgend angängig war.

Aufgaben sind in diesem Leitfaden der räumlichen Geometrie nicht aufgenommen worden, weil ein folgendes Bändchen dieser Sammlung die gewerbliche Flächen- und Körperrechnung bringen soll.

Die Abbildungen mussten alle perspektivisch gezeichnet werden, da alle Gebilde sich ja nicht in einer Ebene befinden; dadurch wird manchmal, besonders bei den ersten Abschnitten, welche von den unbegrenzten räumlichen Gebilden handeln, die Vorstellung erschwert; aber es muss sich jeder, der Körper berechnen will, an die räumliche Vorstellung gewöhnen, welche dadurch erleichtert werden kann, dass man sich Modelle aus Draht anfertigt, deren Verwendung besonders für Unterrichtszwecke sehr empfohlen werden kann.

Lübeck, April 1902.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Die Körperlehre (Stereometrie) ist der Teil der Raumlehre, welcher sich mit denjenigen Gebilden beschäftigt, die nicht nur in einer Ebene, sondern im Raume, liegen. Unter den räumlichen Gebilden sind die allseitig begrenzten (Körper) die wichtigsten, doch hat die Körperlehre auch die Lage und Grösse von Punkten, Linien und Flächen zu untersuchen.

Die Schwierigkeit der Behandlung der räumlichen Gebilde liegt darin, dass dieselben, obwohl sie drei Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Höhe besitzen, in einer Ebene bildlich dargestellt werden sollen, welche bekanntlich nur zwei Ausdehnungen hat.

Derjenige Teil der Raumlehre, welcher sich damit beschäftigt, die räumlichen Gebilde durch Zeichnung richtig darzustellen, heisst die darstellende Geometrie oder Projektionslehre, welche eine besondere Wissenschaft für sich bildet.*)

Eine Ebene ist jene Fläche, bei welcher die gerade Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte stets ganz in die Fläche hineinfällt, woraus sich also ohne weiteres ergiebt, dass eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, ganz in diese Ebene hineinfällt. (Vergleiche: Hoch, Ebene Geometrie für gewerbliche Kreise, Hilmar Klasing, Leipzig 1902.)

Durch eine gerade Linie lassen sich unzählig viele Ebenen legen, welche alle dadurch entstanden sein können, dass die eine erzeugende Ebene sich um die einer gegebenen Geraden dreht.

Ist ausser der gegebenen Geraden noch ein ausserhalb derselben liegender Punkt gegeben, so ist dadurch eine einzige Ebene bestimmt, weshalb sich folgender Satz ergiebt:

Eine Ebene ist unzweideutig bestimmt:

1. Durch eine gerade Linie und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt,
2. durch drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte,

*) Vergleiche Katechismus der Projektionslehre von Ingenieur Julius Hoch, II. Auflage, erschienen 1898 bei J. J. Weber-Leipzig.

3. durch zwei einander schneidende gerade Linien und
4. durch zwei parallele gerade Linien.

Da eine gerade Linie mit einer Ebene entweder nur einen, alle, oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben kann, wie sich aus der Erklärung für eine Ebene ohne weiteres ergiebt, so folgt inbezug auf die gegenseitige Lage dieser beiden Raumgebilde:

Eine gerade Linie kann zu einer Ebene drei verschiedene Lagen haben, nämlich:

1. Die Gerade liegt ganz in der Ebene, d. h. sie hat alle Punkte mit derselben gemeinschaftlich,
2. die Gerade hat mit der Ebene nur einen Punkt gemeinschaftlich oder dieselbe schneidet die Ebene und
3. die Gerade hat mit der Ebene gar keinen Punkt gemeinschaftlich, oder sie ist der Ebene parallel.

Derjenige Punkt, in welchem eine gerade Linie eine Ebene schneidet, heisst ihr Durchstoss- oder Durchschnittspunkt.

Hat eine schneidende gerade Linie eine solche Lage gegen die Ebene, dass alle durch ihren Durchschnittspunkt in der Ebene gezogenen Geraden mit der schneidenden Linie einen rechten Winkel einschliessen, so sagt man, die gerade Linie steht winkelrecht zur Ebene, in allen anderen Fällen ist die schneidende Gerade geneigt gegen die Ebene.

Unter der Projektion eines Punktes (vergleiche Hoch, Ebene Geometrie für gewerbliche Kreise Seite 38, Hilmar Klasing, Leipzig 1902) versteht man den Fusspunkt der Winkelrechten, welche von deren Punkte auf die Ebene gefällt werden kann. Unter der Projektion einer geraden Linie versteht man die Verbindungslinie der Projektionen zweier beliebiger Punkte der Geraden. Der Durchschnittspunkt einer Geraden mit einer Ebene fällt mit seiner eigenen Projektion zusammen, weshalb die Projektion einer jeden geraden Linie durch den Durchstosspunkt mit derjenigen Ebene gehen muss, auf welche die Gerade projiziert worden ist.

Unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man denjenigen Winkel, dem die Gerade mit ihrer Projektion einschliesst.

Zwei Ebenen können folgende Lagen zu einander haben:

1. dieselben haben keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich, d. h. die Ebenen sind parallel,
2. dieselben schneiden einander in einer geraden Linie, welche die Durchschnittslinie der beiden Ebenen heisst.

Zwei gerade Linien können im Raume drei verschiedene Lagen einnehmen, nämlich:

1. die beiden geraden Linien kreuzen miteinander, wenn dieselben nicht in einer Ebene liegen; diese geraden Linien heissen auch windschief,
2. die beiden geraden Linien sind einander parallel, wenn dieselben in einer Ebene liegen und keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich haben, und
3. die beiden geraden Linien schneiden einander, wenn dieselben in einer Ebene liegen und einen Punkt miteinander gemeinschaftlich haben; dieser Punkt heisst dann der Schnittpunkt der beiden geraden Linien.

A) Die geraden Linien und Ebenen in gegenseitiger Beziehung zu einander.

1. Gerade Linie und Ebene.

a) Gerade Linie winkelrecht zur Ebene.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dass eine gerade Linie entweder mit einer Ebene einen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben kann, wenn man von dem Falle absieht, dass die Gerade mit der Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, mithin ganz in dieselbe hineinfällt.

Wenn eine gerade Linie eine Ebene schneidet, d. h. mit derselben einen Punkt gemeinschaftlich hat, so ist vor allem diejenige Lage von Bedeutung, welche entsteht wenn die Gerade auf der Ebene winkelrecht steht, d. h. mit jeder durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschliesst. Zur Feststellung des Winkelrechtstehens einer Geraden zu einer Ebene genügt jedoch der Nachweis, dass die gerade Linie auf zwei durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden winkelrecht steht, weil sich folgender Lehrsatz sehr leicht beweisen lässt:

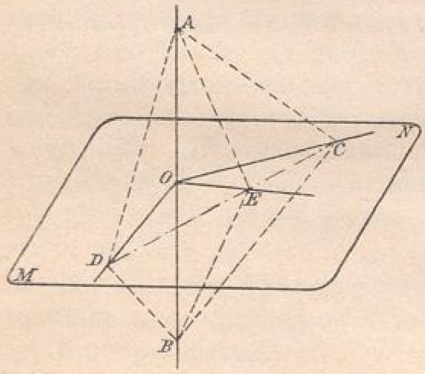

Fig. 1.

Steht eine gerade Linie winkelrecht auf zwei durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so steht sie auch winkelrecht auf jeder dritten durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden.*)

Die Gerade AB (Fig. 1) trifft die Ebene MN in dem Punkte O und hat zu der Ebene eine solche Lage, dass die Gerade mit den beiden durch O hindurch-

*) Bei den bildlichen Darstellungen können die Ebenen sowohl wie die geraden Linien nicht unbegrenzt gezeichnet werden; die Ebenen werden daher gewöhnlich durch ein schiefwinkliges Parallelogramm dargestellt. Besonders ist aber darauf zu achten, dass hier räumliche Figuren vorliegen, welche infolge ihrer perspektivischen Darstellung eigentümliche Verschiebungen und Verzerrungen inbezug auf die Grösse zeigen.

gehenden Strahlen OC und OD je einen rechten Winkel einschliesst; dann muss auch die gerade Linie AB mit dem beliebig durch O in der Ebene MN gezogenen Strahl OE einen rechten Winkel einschliessen. Um dies zu beweisen, trage man von dem Schnittpunkte O aus, auf der Geraden AB nach oben und unten gleiche Stücke ab, sodass $OA = OB$ ist; ferner zeichne man in der Ebene MN eine Gerade DC, welche die drei durch O gehenden Strahlen OC, OD und OE in den Punkten C, D und E schneidet, die mit den Punkten A und B verbunden werden; dann sind die beiden Dreiecke AOD und BOD deckungsgleich, wegen der Übereinstimmung von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($AO = BO$; $OD = OD$; $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = 90^0$), woraus die Gleichheit der Seiten AD und BD folgt. Ganz gleichmässig kann auch die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke AOC und BOC bewiesen werden ($AO = BO$, $OC = OC$, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 90^0$), woraus die Gleichheit der Seiten AC und BC folgt. Infolge der Übereinstimmung in den drei Seiten ($DC = DC$, $AD = BD$ und $AC = BC$) folgt die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke ADC und BDC, woraus die Gleichheit der Winkel ADC und BDC folgt. Infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($DE = DE$, $AD = BD$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDE$) folgt die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke ADE und BDE, woraus sich die Gleichheit der dritten Seiten AE und BE ergiebt. Infolge der Übereinstimmung in den drei Seiten ($OE = OE$, $AE = BE$, $AO = BO$) folgt endlich die Deckungsgleichheit der beiden Dreiecke AOE und BOE, weshalb auch die beiden Winkel AOE und BOE gleich sein müssen; da dieselben aber Nebenwinkel sind, so muss jeder gleich 90^0 sein, woraus aber folgt, dass die Gerade AB mit dem durch O beliebig gezogenen Strahl OE einen rechten Winkel einschliesst.

Aus diesem Satze ergeben sich dann durch Umkehrung bezw. Folgerung ohne weiteres folgendes:

1. Die von einem Punkte ausserhalb einer Ebene nach derselben gezogene Winkelrechte ist die kürzeste Gerade, welche von dem Punkt ausserhalb der Ebene nach irgend einem Punkt in der Ebene gezogen werden kann. Man nennt daher auch die Länge dieser Winkelrechten den **Abstand des Punktes** von der Ebene.

2. Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene lässt sich nur **eine** Winkelrechte nach der Ebene zeichnen.

3 Durch einen Punkt einer Ebene lässt sich nur **eine** Winkelrechte zu dieser Ebene errichten.

4. Steht eine gerade Linie auf drei durch einen Punkt dieser Geraden gehende Strahlen gleichzeitig

winkelrecht, so liegen diese drei Strahlen in einer Ebene.

Steht eine von zwei parallelen Linien winkelrecht auf einer Ebene, so steht auch die zweite parallele Linie winkelrecht.

Steht die eine Gerade Linie CD der beiden Parallelen CD und AB (Fig. 2) auf der Ebene MN winkelrecht, so muss auch die zweite Parallele AB winkelrecht stehen, was dann nachgewiesen ist, wenn diese Gerade auf zwei durch den Fusspunkt B in der Ebene MN liegenden Strahlen winkelrecht steht. Zu diesem Zwecke verbinde man die Fusspunkte D und B der beiden Parallelen miteinander und erhält dann, da diese Parallelen in einer Ebene liegen, zwei Parallele von einer dritten geschnitten, (vergl.*) Ebene Geometrie Seite 8), weshalb die Summe der beiden Gegenwinkel 180° sein muss, d. h.

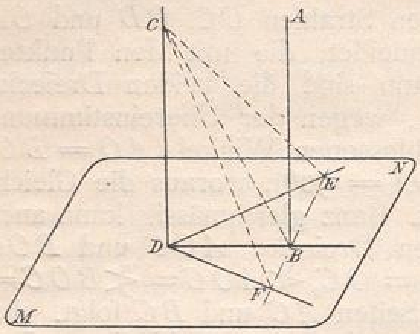

Fig. 2.

$$\sphericalangle CDB + \sphericalangle ABD = 180^0$$

Da aber der eine ($\sphericalangle CDB$) dieser beiden Winkel ein Rechter sein muss, weil die Gerade CD winkelrecht zu der Ebene MN steht, mithin auch winkelrecht zu jeder durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so muss auch der zweite Winkel ABD gleich 90° sein, woraus folgt, dass die Gerade AB auf dem einen durch B hindurch gehenden Strahl BD winkelrecht steht. Als zweiten durch B hindurch gehenden Strahl wähle man eine Gerade EF, welche winkelrecht zu der Verbindungslinie BD der Fusspunkte B und D steht, auf der man dann nach beiden Seiten hin gleiche Stücke von B ausgehend abträgt, so dass $BE = BF$ ist und verbinde die drei Punkte E, B und F mit einem beliebigen Punkt C der Geraden CD. Dann sind infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($BD = BD$; $BF = BE$; $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DBE = 90^0$) die beiden Dreiecke DBF und DBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der Seiten DF und DE folgt; ferner sind ebenfalls infolge der Übereinstimmung von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($DC = DC$, $DF = DE$, $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CDE = 90^0$) die beiden Dreiecke CDF und CDE deckungsgleich, woraus wieder die Gleicheit der dritten Seiten CF und CE folgt; endlich aber sind auch infolge der Übereinstimmung in den

*) Hoch, Ebene Geometrie im gleichen Verlage M. 2.—

drei Seiten ($CB = CB$; $CF = CE$, $BF = BE$) die beiden Dreiecke CBF und CBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der beiden Winkel CBF und CBE folgt, von denen aber jeder, da sie beide Nebenwinkel sind, gleich 90^0 sein muss, d. h. die Gerade FB steht winkelrecht auf dem Strahl CB. Da aber die Gerade FB nicht nur auf dem Strahl BC, sondern auch auf dem Strahl BD (laut Konstruktion) winkelrecht steht, so steht auch diese Gerade auf jedem dritten durch den Fusspunkt B hindurchgehenden Strahl BA winkelrecht, welcher mit den beiden anderen Strahlen BD und BC in einer Ebene liegt; mithin ist der Winkel ABF wirklich gleich 90^0. Da aber die Gerade AB winkelrecht steht auf den beiden durch den Fusspunkt B hindurchgehenden Strahlen BD und BF so muss die Gerade AB auf der Ebene MN winkelrecht stehen. (Vergl. Seite 4.)

Durch folgerichtigen Schluss, bezw. durch Umkehrung ergeben sich folgende Sätze:

1. Stehen zwei gerade Linien auf einer Ebene gleichzeitig winkelrecht, so sind diese beiden geraden Linien parallel.

2. Zwei gerade Linien, welche auf einer Ebene winkelrecht stehen, liegen in **einer** Ebene.

3. Sind zwei gerade Linien einer dritten Geraden parallel, so sind sie untereinander parallel.

b) Die gerade Linie geneigt zur Ebene.

Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der **kleinste** Winkel, den die Gerade mit einem durch den Schnittpunkt in der Ebene gezogenen Strahl einschliesst.

Schneidet die Gerade AB (Fig. 3) die Ebene MN in dem Punkte B und ist BC die Projektion von AB auf MN (vergl. Seite 2) so ist der Winkel ABC der Neigungswinkel der Geraden AB mit der Ebene MN; zeichnet man durch den Fusspunkt B den beliebigen in der Ebene MN liegenden Strahl BD und macht man $BD = BC$, so ergiebt sich nach Ziehung der entsprechenden Verbindungslinien, das rechtwinklige Dreieck ACD, in welchem die Hypotenuse AD grösser sein muss als die eine Kathete AC. Die beiden Dreiecke ABC und ABD stimmen dann in den zwei Seiten ($AB = AB$, $BC = BC$) überein, jedoch nicht in der dritten Seite; dann stimmen dieselben auch nicht in dem von den gleichen Seiten

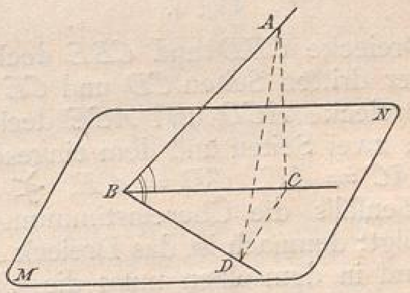

Fig. 3.

eingeschlossenen Winkel überein, sondern es liegt der grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber, d. h. der Winkel ABD muss wirklich grösser sein als der Winkel ABC, oder der Neigungswinkel muss der kleinste Winkel sein.

Daraus ergiebt sich durch folgerichtigen Schluss:

1. Der Nebenwinkel des Neigungswinkels ist der grösste Winkel den eine gerade Linie mit einer durch den Fusspunkt in der Ebene gezogenen Strahl einschliessen kann.

2. Parallele Linien bilden mit ein und derselben Ebene gleiche Neigungswinkel.

3. Bilden mehrere Gerade mit ein und derselben Ebene gleiche Neigungswinkel, so sind dieselben parallel.

Steht eine durch den Durchschnittspunkt einer geneigten Geraden mit einer Ebene gezogenen, in der Ebene liegender Strahl winkelrecht zu der Projektion der geneigten Geraden auf dieser Ebene, so steht dieser Strahl auch winkelrecht zu den geneigten Geraden selbst.

Ist BC (Fig. 4) die Projektion der geneigten Geraden AB auf der Ebene MN, d. h. also ist $AC \perp MN$ und ist ferner der durch B gehende Strahl BD so gezeichnet, dass der Winkel $CBD = 90^0$ ist, so soll auch der Winkel $ABE = 90^0$ sein. Um dies zu beweisen, verlängere man den Strahl BD über B hinaus, trage dann nach beiden Seiten von C ausgehend gleiche Stücke ab, so dass $BD = BE$ ist und verbinde die so erhaltenen Punkte D und E mit A und C, dann sind infolge der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($BC = BC$; $BD = BE$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBE = 90^0$) die beiden Dreiecke CBD und CBE deckungsgleich, woraus die Gleichheit der dritten Seiten CD und CE folgt; ferner sind auch die beiden Dreiecke ACD und ACE deckungsgleich, da dieselben ebenfalls in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen ($AC = AC$, $CD = CE$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACE = 90^0$) woraus ebenfalls die Übereinstimmung der dritten Seiten AD und AE folgt; demnach ist das Dreieck ADE ein gleichschenkliges Dreieck und in demselben muss die Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundseite (vergleiche: Ebene Geometrie Seite 14) winkelrecht zu dieser stehen, d. h. der Winkel ABD ist wirklich ein Rechter.

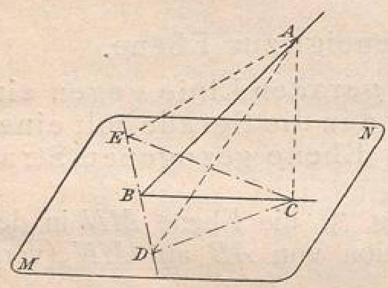

Fig. 4.

Ist eine gerade Linie mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie auch zu der Ebene selbst parallel, denn es ist nicht möglich, dass die ausserhalb der Ebene liegende Gerade mit der Ebene einen Punkt gemeinschaftlich hat, da dieser nur in derjenigen Ebene liegen könnte, die durch die beiden parallelen Geraden gelegt werden kann, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass die beiden ursprünglichen Geraden parallel sind.

1. Ist eine gerade Linie mit einer Ebene parallel, so ist die gerade Linie auch mit jeder Durchschnittslinie parallel, welche man erhält als Schnitt einer durch die gegebene Gerade gelegten Ebene mit der ursprünglichen Ebene selbst.

2. Ist eine von zwei parallelen Geraden einer Ebene parallel, so ist es auch die zweite.

3. Die Durchschnittslinien aller Ebenen mit einer gegebenen Ebene, welche durch eine zu dieser Ebene parallelen Geraden gelegt werden können, sind untereinander parallel.

Alle Winkelrechten, welche sich von den einzelnen Punkten einer mit einer Ebene parallelen Geraden auf diese Ebene fällen lassen, sind untereinander gleich.

Die von den Punkten C, D, E u. s. w. (Fig. 5) auf die Ebene MN gefällten Winkelrechten CF, DG, EH u. s. w. sind untereinander gleich, da dieselben zwischen Parallelen in der durch AB und CF gehenden Ebene liegen. Diese unveränderte Länge der Winkelrechten, welche an den Punkten der parallelen Geraden auf die Ebene gefällt werden können, nennt man die Entfernung der parallelen Geraden von der Ebene.

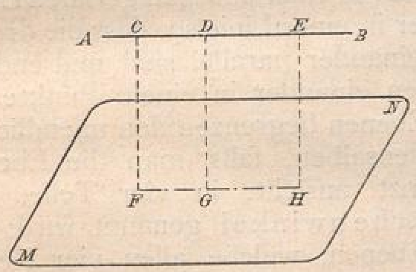

Fig. 5.

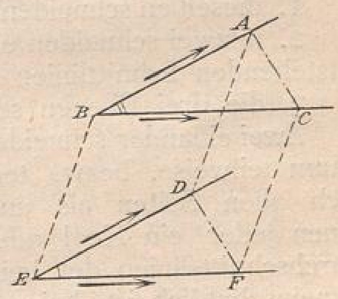

Fig. 6.

Zwei Winkel im Raume mit paarweise gleich gerichteten parallelen Schenkeln sind einander gleich.

Wenn die Schenkel der beiden Winkel ABC und DEF (Fig. 6) in demselben Sinne parallel gerichtet sind (vergleiche: Ebene Geometrie Seite 8 und beachte die hinzugefügten Pfeile), aber in verschiedenen Ebenen liegen, so trage man auf den Schenkeln vom Scheitelpunkt ausgehend gleiche Stücke ab, so dass

$$BA = ED \text{ und } BC = EF$$

ist, und verbinde die so erhaltenen Punkte auf den Schenkeln des einen Winkels mit den gleichliegenden Punkten auf den Schenkeln des anderen Winkels, dann sind die beiden Geraden AD und CF ein und derselben dritten Geraden BE gleich und parallel, weshalb dieselben auch untereinander parallel und gleich sein müssen, woraus aber auch folgt, dass die beiden Geraden AC und DF gleich und parallel sind, da sie in einer einzigen Ebene liegen. Infolge der Übereinstimmung der beiden Dreiecke ABC und DEF in den drei Seiten ($AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$) sind dieselben aber auch deckungsgleich, mithin müssen die beiden Winkel ABC und DEF einander gleich sein.

Unter Bezugnahme auf die gleichen Verhältnisse in der Ebenen Geometrie (vergl. Seite 8) erhält dieser Satz folgende allgemeine Fassung:

Winkel im Raume mit paarweise parallelen Schenkeln sind dann einander gleich, wenn beide Paare Schenkel in derselben oder in entgegengesetzter Richtung parallel laufen; sie ergänzen einander zu 180°, wenn das eine Schenkelpaar in derselben, das andere in entgegengesetzter Richtung parallel läuft.

2. Die Lage der Ebenen gegeneinander.

a) Einander schneidende Ebenen.

Zwei Ebenen, welche einander schneiden, haben immer eine gerade Linie miteinander gemeinschaftlich, welche die Durchschnittslinie heisst.

Drei Ebenen können, abgesehen von dem Falle, dass dieselben untereinander parallel sind, folgende Lagen einnehmen:

1. dieselben schneiden einander in einer einzigen geraden Linie,
2. je zwei schneiden einander in einer Linie so, dass die drei so entstehenden Schnittlinien untereinander parallel sind und endlich
3. die drei Ebenen schneiden einander in einem Punkte.

Zwei einander schneidende Ebenen begrenzen den unendlichen Raum teilweise, bezw. teilen denselben, falls man die Ebenen nach allen Seiten als unbegrenzt ansieht, in vier Teile, von denen jeder ein Keil oder Flächenwinkel genannt wird; die Durchschnittslinien der beiden Ebenen, welche allen vier Keilen gemeinschaftlich ist, heisst Kant- oder Scheitellinie.

Unter dem Neigungswinkel zweier einander schneidender Ebenen versteht man denjenigen Winkel, der von zwei durch einen Punkt der Scheitellinie hindurchgehenden Geraden gebildet wird, von denen jede in einer Ebene liegt und winkelrecht zur gemeinschaftlichen Schnittlinie steht. In welchem Punkte der Durchschnittslinie die Winkelrechten errichtet werden, ist gleichgültig, da Winkel im Raume, mit gleichgerichteten Schenkeln einander gleich sind. (S. 9.)

Wird der auf diese Weise erhaltene Neigungswinkel zweier Ebenen gleich 90°, so sagt man, die Ebenen stehen aufeinander winkelrecht.

Je nachdem der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen ein rechter oder ein schiefer Winkel ist, heissen die Ebenen winkelrecht oder schief zu einander stehend.

Steht eine gerade Linie auf einer Ebene winkelrecht, so steht auch jede durch diese Gerade hindurchgehende Ebene zu der Ebene winkelrecht.

Steht die Gerade AB (Fig. 7) auf der Ebene MN winkelrecht, so muss auch die durch AB hindurchgehende Ebene RS, welche die gegebene Ebene in CD schneidet, auf MN winkelrecht stehen, denn zeichnet man in der Ebene MN den durch B hindurchgehenden Strahl BF winkelrecht zu der Durchschnittslinie CD, so muss der Winkel ABF ein Rechter sein, weil die Gerade AB winkelrecht zu der Ebene MN steht. Dieser Winkel BAF ist jedoch nach der oben gegebenen Erklärung der Neigungswinkel.

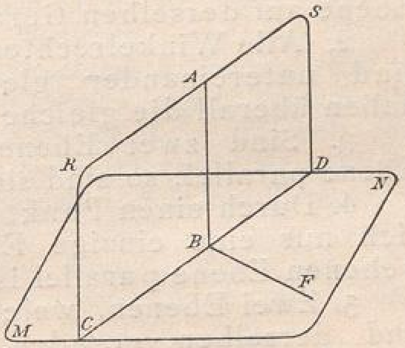

Fig. 7.

Durch folgerichtigen Schluss und Umkehrung ergiebt sich:

1. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und errichtet man in einem beliebigen Punkt der Durchschnittslinie eine Winkelrechte zu dieser in der einen Ebene, so muss dieselbe auch winkelrecht zur zweiten Ebene stehen.

2. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und errichtet man in einem beliebigen Punkte der Durchschnittslinie eine Winkelrechte zu einer Ebene, so muss diese ganz in die zweite Ebene hineinfallen.

3. Stehen zwei Ebenen aufeinander winkelrecht und fällt man an einem beliebigen Punkt der einen Ebene eine Winkelrechte auf die andere Ebene, so muss diese ganz in die erste Ebene hineinfallen.

4. Stehen zwei einander schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene winkelrecht, so steht auch die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen winkelrecht zur dritten Ebene.

5. Steht die Durchschnittslinie zweier Ebenen auf einer dritten Ebene winkelrecht, so stehen auch die beiden Ebenen selbst winkelrecht zur dritten Ebene.

b) Parallele Ebenen.

Steht eine gerade Linie gleichzeitig auf zwei Ebenen winkelrecht, so sind diese parallel, denn würden die beiden Ebenen einander schneiden, so müsste die gemeinschaftliche Winkelrechte mit den Verbindungslinien ihrer Fusspunkte in den beiden Ebenen und irgend einem Punkte der Durchschnittslinie der beiden Ebenen ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden, was unmöglich ist.

Daraus ergeben sich ohne weiteres folgende Sätze:

1. Steht eine von zwei parallelen Ebenen winkelrecht auf einer geraden Linie, so steht auch die zweite Ebene auf derselben Geraden winkelrecht.

2. Alle Winkelrechten zwischen parallelen Ebenen sind untereinander gleich, oder parallele Ebenen haben überall die gleiche Entfernung.

3. Sind zwei Ebenen gleichzeitig einer dritten Ebene parallel, so sind sie untereinander parallel.

4. Durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene lässt sich nur eine einzige Ebene legen, welche der gegebenen Ebene parallel ist.

5. Zwei Ebenen, welche nicht gleichzeitig auf ein- und derselben geraden Linie winkelrecht stehen, können nicht parallel sein.

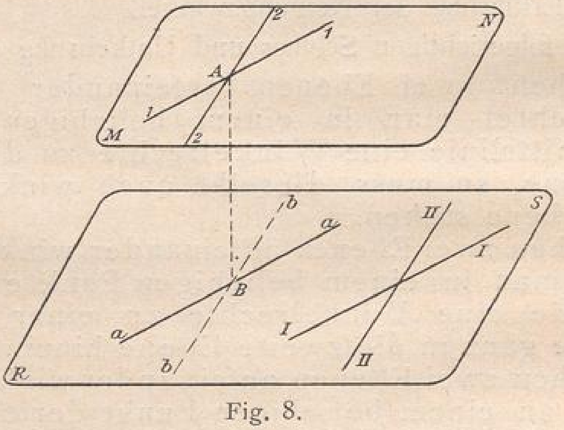

Fig. 8.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnittlinien der Ebenen untereinander parallel, denn jede der beiden Schnittlinien mit der dritten Ebene liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach in je einer der Ebenen, welche aber infolge ihrer Parallelität keinen Punkt miteinander gemein haben können.

Zwei Ebenen, welche je zwei einander schneidende paarweise parallele Gerade enthalten, sind einander parallel.

Sind die beiden einander schneidenden Geraden 1,1 und 2,2 in der Ebene MN (Fig. 8) den beiden einander schneidenden Geraden I,I u. II,II in der Ebene RS parallel, so sind die beiden Ebenen MN und RS auch einander parallel, denn errichtet man in dem Durchschnittspunkte A der beiden Geraden 1,1 und 2,2 der Ebene MN die Winkelrechte AB, so schliesst dieselbe mit jeder durch den Fusspunkt A gehenden, in der Ebene liegenden Geraden einen rechten Winkel ein. Zeichnet man durch den Fusspunkt B, in welchem die Winkelrechte AB die zweite Ebene RS trifft, die parallelen Geraden a,a und b,b zu den in dieser Ebene RS liegenden Geraden I,I und II,II, so müssen diese so erhalte en Geraden a,a und b,b auch den in der Ebene MN liegenden Geraden 1,1 und 2,2 parallel sein. Demnach liegen die beiden Geraden 1,1 und a,a mit der Winkelrechten AB in einer Ebene und die Gerade AB muss auch mit a,a einen rechten Winkel einschliessen; aus demselben Grunde aber muss der Winkel, den die Gerade AB mit b,b einschliesst, ein rechter sein; da aber die Gerade AB auf zwei durch den Fusspunkt B in der Ebene RS, liegenden Geraden winkelrecht steht, so steht sie auch auf der Ebene RS winkelrecht; steht aber eine Gerade (vergleiche Seite 12) gleichzeitig auf zwei Ebenen winkelrecht, so sind dieselben parallel.

Eine gerade Linie, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, trifft auch die zweite Ebene und bildet mit beiden Ebenen den gleichen Neigungswinkel, denn zeichnet man durch einen Punkt der Geraden eine Winkelrechte zu der einen Ebene, so muss diese auch auf der zweiten Ebene winkelrecht stehen. Durch diese Winkelrechte und die ursprüngliche gerade Linie lässt sich jedoch eine Ebene legen, welche die beiden parallelen Ebenen in parallelen Linien (vergleiche Seite 12) schneidet; diejenigen Winkel aber, welche die ursprüngliche Gerade mit diesen parallelen Schnittlinien einschliesst, sind die Neigungs winkel der Geraden mit der Ebene und sind als korrespondierende Winkel gleich.

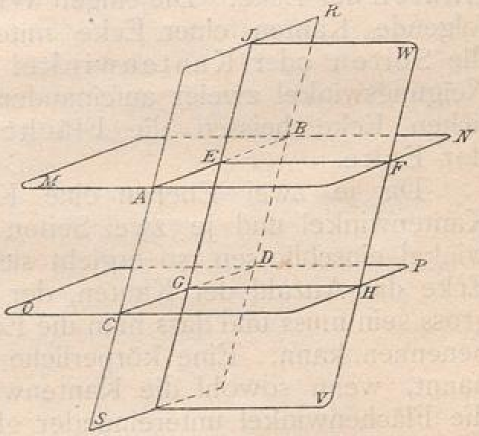

Fig. 9.

Eine Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit beiden gleiche Neigungswinkel.

Werden die beiden parallelen Ebenen MN und OP (Fig. 9) von der Ebene RS in den parallelen Geraden AB und CD geschnitten, so lege man durch einen beliebigen Punkt E der einen Schnittlinie AB eine Ebene WV winkelrecht zu dieser Schnittlinie AB, dann muss diese Ebene auch winkelrecht stehen auf der zweiten Schnittlinie CD (vergleiche Seite 12). Die Winkel IEF und EGH aber sind demnach die Neigungswinkel der Ebenen MN und RS, bezw, PQ und RS; diese Winkel aber sind als korrespondierende Winkel einander gleich.

Durch Umkehrung ergiebt sich ohne weiteres:

Werden zwei Ebenen von einer dritten Ebene so geschnitten, dass die Durchnittslinien parallel sind und die Neigungswinkel nach der gleichen Seite hin einander gleich, so sind die beiden ersten Ebenen einander parallel.

B. Die körperlichen Ecken.

Schneiden mehr als drei Ebenen einander, so dass alle durch einen Punkt hindurchgehen, so schliessen dieselben einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche Ecke oder eine Ecke genannt wird. Derjenige Punkt, in welchem die sämtlichen Ebenen einander schneiden, heisst der Scheitelpunkt oder die Spitze der Ecke, die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Ebenen jedoch heissen die Kanten der Ecke. Diejenigen Winkel, welche zwei aufeinanderfolgende Kanten einer Ecke miteinander einschliessen, heissen die Seiten oder Kantenwinkel der Ecke; endlich aber, die Neigungswinkel zweier aufeinanderfolgender Seiten einer körperlichen Ecke heissen die Flächenwinkel oder die Winkel der Ecke.

Da je zwei Ebenen eine Kante, je zwei Kanten einen Kantenwinkel und je zwei Seiten oder Ebenen einen Flächenwinkel einschliessen, so ergiebt sich, dass bei jeder körperlichen Ecke die Anzahl der Kanten, der Seiten und der Winkel gleich gross sein muss und dass man die Ecke nach der Zahl dieser Stücke benennen kann. Eine körperliche Ecke wird regelmässig genannt, wenn sowohl die Kantenwinkel untereinander, als auch die Flächenwinkel untereinander gleich sind.

Jede körperliche Ecke muss mindestens drei Ecken, bezw. Kanten und Winkel haben.

Denkt man sich die drei Ebenen, welche eine körperliche Ecke bilden können, nach allen Seiten unbegrenzt, so entstehen auf diese Weise acht körperliche Ecken, welche alle einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und den unbegrenzten Raum in acht nur teilweise begrenzte Teile teilen; von diesen acht Ecken sind je zwei am Scheitel einander so gegenübergesetzt, dass die Kantenwinkel der einen Ecke Scheitelwinkel zu dem Kantenwinkel der anderen Ecke sind; man nennt nun zwei solche Ecken **Scheitelecken**.

Aus der Erklärung der Scheitelecken folgt, dass in zwei Scheitelecken die Seiten untereinander und die Winkel untereinander beziehungsweise gleich sind.

Fällt man von irgend einem beliebigen, im Innern einer Ecke liegenden Punkte auf die Seiten der Ecken Winkelrechte und legt durch je zwei benachbarte so erhaltene Strahlen Ebenen, so bilden diese eine neue Ecke, welche ebenso viel Seiten, Kanten und Winkel hat, wie die ursprüngliche Ecke und **Polarecke** genannt wird. Aus dieser Erklärung folgt ohne weiteres:

1. Die Kanten einer Ecke stehen winkelrecht auf den Seiten der Polarecke.

2. Jede körperliche Ecke ist die Polarecke ihrer eigenen Polarecke.

3. Die Seiten einer Ecke ergänzen die dazugehörigen Winkel der Polarecke zu 180^0 und umgekehrt.

In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke ist die Summe zweier Kantenwinkel grösser als der dritte Kantenwinkel, weil nur unter dieser Voraussetzung eine Ecke überhaupt gebildet werden kann, wie ja auch in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten grösser sein muss, als die dritte Seite.

In jeder körperlichen Ecke ist die Summe aller Seiten kleiner als 360^0, weil sonst die Kanten der Ecke entweder in einer Ebene liegen würden, oder aber die Seiten derselben einander teilweise decken würden, wenn die Summe der Seiten grösser als 360^0 wäre.

Für **jede dreiseitige körperliche Ecke** ergeben sich eine Reihe von Sätzen, welche mit dem Lehrsätzen des Dreiecks (vergleiche Ebene Geometrie Seite 13) eine unverkennbare Ähnlichkeit haben und deshalb hier ihren Platz finden sollen, ohne dass aber auf einen Beweis derselben näher eingegangen werden soll.

1. In jeder dreiseitigen Ecke liegen den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber und umgekehrt.

2. In jeder dreiseitigen Ecke liegt dem grösseren Winkel auch eine grössere Seite gegenüber und umgekehrt.

3. Zwei dreiseitige körperliche Ecken sind deckungsgleich (kongruent) d. h. lassen sich ineinander schieben, wenn dieselben übereinstimmen und die Reihenfolge beibehalten wird:

a) in den drei Seiten,

b) in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,

c) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln und

d) in den drei Winkeln.

C. Die Eigenschaften der Körper im allgemeinen.

1. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

Ein allseitig begrenzter Teil des unendlichen Raumes heisst ein Körper.

Wird der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so heisst derselbe ein ebenflächiger Körper oder Polyeder zu dessen Begrenzung mindestens vier Ebenen erforderlich sind.

Bei jedem ebenflächigen Körper unterscheidet man:

a) Die Kanten, als Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender den Körper begrenzender Ebenen;

b) die Seiten oder Flächen, als die einzelnen den Körper begrenzenden ebenen Figuren; die Summe aller Seiten oder Flächen bildet die Oberfläche des Körpers;

c) die Ecken endlich sind die Endpunkte oder Schnittpunkte je zweier Kanten.

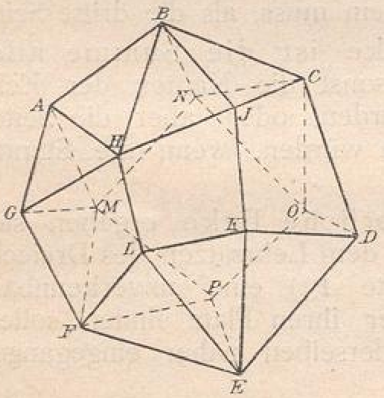

Fig. 10.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl aller Kantenwinkel doppelt so gross als die Anzahl aller Kanten, weil in jeder Seitenfläche die Anzahl der Winkel und die Anzahl der Kanten gleich gross ist und jede Kante als gleichzeitig zwei Begrenzungsflächen angehörend doppelt gezählt wird.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Anzahl der Flächenwinkel ebenso gross wie die Anzahl der Kanten.

In jedem ebenflächigen Körper ist die Summe aus der Anzahl der Ecken und Flächen ebenso gross wie die um zwei vermehrte Anzahl der Kanten.

Dieser Satz ist allgemein bekannt unter dem Namen Euler'scher Lehrsatz, nach dem Mathematiker Leonhard Euler 1707—1783, welcher denselben zuerst aufgestellt hat so benannt. Zum Zweck des Beweises dieses Lehrsatzes, denke man sich einen ebenflächigen Körper (Fig. 10) so auf die Zeichenebene projiziert, dass keine einzige der Brgrenzungsflächen sich als gerade Linie darstellt, also dass man sämtliche Flächen als solche sehen kann, wodurch man erreicht, dass die so erhaltene Projektion des ebenflächigen Körpers ebenso viel Flächen, Kanten und Ecken hat wie der Körper selbst. Um nun eine Beziehung zwischen diesen drei Bestimmungsstücken des ebenflächigen Körpers aufzustellen, berechnet man die Summe sämtlicher Umfangswinkel der Begrenzungsflächen in der Projektion auf doppelte Art und Weise, wobei man bezeichnet mit

E die Anzahl der Ecken des ebenflächigen Körpers,
F „ „ „ Flächen „ „ „
K „ „ „ Kanten „ „ „

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3, \ldots$ die Anzahl der Seiten der einzelnen Begrenzungsfiguren des Körpers, so ist die Summe aller Umfangswinkel (vergl. Ebene Geometrie Seite 20) in einer Fläche gleich $(\mathfrak{n}-2)\ 180^0$ mithin die Summe S sämtlicher Umfangswinkel

$$S = [(\mathfrak{n}_1-2) + (\mathfrak{n}_2-2) + (\mathfrak{n}_3-2) + \ldots\ldots] \cdot 180$$
$$S = (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 + \ldots) \cdot 180 - 2.\ F.\ 180$$

da dieser Körper F Flächen hat, mithin ebenso viel mal die Summe in 2 vorkommt. Da aber bei dieser Art der Aufzählung jede Kante des ebenflächigen Körpers zweimal gezählt wird, so ist

$$\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 + \ldots\ldots = 2K$$

weshalb man durch Einsetzen erhält:

$$S = (2K - 2F) \cdot 180 = (K-F) \cdot 360.$$

Bezeichnet man ferner mit m die Anzahl der Eckpunkte (A, B, C, D, E, F und G) der gemeinschaftlichen Umfangslinie der Projektion dieses Körpers, mit m_1 die Anzahl derjenigen Ecken (H, I, K, L), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der sichtbaren Seite liegen, mit m_2 aber die Anzahl derjenigen Ecken (M, N, O, P), welche innerhalb dieser gemeinschaftlichen Umfangslinie auf der unsichtbaren Seite liegen, so erhält man für die Summe S den Umfangswinkel der Projektion des oberflächlichen Körpers.

$$S = (m-2) \cdot 180 + (m-2) \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die Winkelsumme an der Umfangslinie liegend doppelt gerechnet werden muss, weil die einzelnen Winkel sowohl auf der sichtbaren, als auch auf der unsichtbaren Seite der Projektion liegen, mithin ergiebt sich

$$S = (m+m)\ 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = 2m \cdot 180 - 4 \cdot 180 + m_1 \cdot 360 + m_2 \cdot 360$$
$$S = (m+m_1+m_2-2)\ 360$$

Da aber $m + m_1 + m_2$ nichts anderes ist als die Anzahl der Ecken des oberflächigen Körpers, so erhält man

$$S = (E-2)\,360$$
$$S = (K-F)\,360$$
$$(E-2) \cdot 360 = (K-F)\,360$$
$$E - 2 = K - F$$
$$E + F = K + 2$$

a) Die Pyramide.

Der von einer körperlichen Ecke teilweise begrenzte, nach einer Seite offene Raum, heisst ein pyramidaler Raum; schneidet man denselben durch eine Ebene, welche sämtliche Kanten der körperlichen Ecke schneidet, so entsteht eine Pyramide. Der Scheitelpunkt oder die Spitze der körperlichen Ecke heisst die Spitze der Pyramide, die Kanten der körperlichen Ecke aber die Seitenkanten der Pyramide. Die in der Spitze der Pyramide zusammentreffenden Flächen, welche unter allen Umständen Dreiecke sein müssen, heissen die Seitenflächen der Pyramide und die Summe aller Seitenflächen heisst der Mantel der Pyramide. Die den pyramidalen Raum abschliessende Ebene, soweit dieselbe zwischen den Seitenflächen der Pyramide liegt, heisst die Grundfläche der Pyramide, welche mit dem Mantel derselben zusammen die Oberfläche der Pyramide ergiebt.

Unter der Höhe der Pyramide versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann.

Nach der Anzahl der Seitenflächen einer Pyramide wird dieselbe als drei-, vier- und mehrseitig bezeichnet.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmässiges Vieleck und fällt der Fusspunkt der Höhe mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so nennt man die Pyramide eine regelmässige und gerade. In jeder regelmässigen, geraden Pyramide sind die Seitenkanten untereinander gleich gross und die Seitenflächen sind untereinander deckungsgleiche Dreiecke. Die Höhe eines solchen Seitendreiecks einer geraden regelmässigen Pyramide heisst eine Seitenhöhe.

Schneidet man eine Pyramide durch eine Ebene, welche durch die Spitze der Pyramide geht, so ist der Schnitt immer ein Dreieck.

Wird eine Pyramide durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich oder gestaltgleich und die Flächeninhalte dieser beiden Flächen verhalten sich wie Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Wird die Pyramide $ABCDE$ mit der Spite S (Fig. 11) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, dass die Schnittfigur $abcde$ entsteht, so müssen die an den gleichen Seitenkanten liegenden Winkel dieser beiden Figuren gleich sein, da die Schenkel derselben in derselben Richtung parallel laufen (vergleiche Seite 9). Da aber ferner jede Seitenfläche durch eine zur entsprechenden Grundkante parallele Transversale geschnitten wird, so ergeben sich für zwei benachbarte Seitenflächen folgende Projektionen (vergleiche Ebene Geometrie Seite 58).

$$\begin{array}{c} AE : ae = SE : Se \\ \underline{ED : ed = SE : Se} \\ AE : ae = ED : ed \end{array}$$

Ebenso lässt sich aber für alle gleichliegenden Seiten nachweisen, dass dieselben dasselbe Verhältnis haben, woraus unter Hinzufügung der Bedingung Gleichheit der gleichliegenden Winkel die Ähnlichkeit der beiden Figuren $ABCDE$ und $abcde$ folgt.

Die von der Spitze S auf die grosse Grundfläche gefällte Winkelrechte (Höhe) trifft diese in M, die parallele Schnittfläche aber in O, so dass SM und SO die Abstände der beiden in Frage kommenden Flächen von der Spitze sind. Verbindet man die so erhaltenen Fusspunkte M und O der Höhe mit je einem zugehörigen Eckpunkt, z. B. mit A und a, so ergiebt sich infolge der Gestaltgleichheit der hierdurch entstehenden Dreiecke folgende Proportionen:

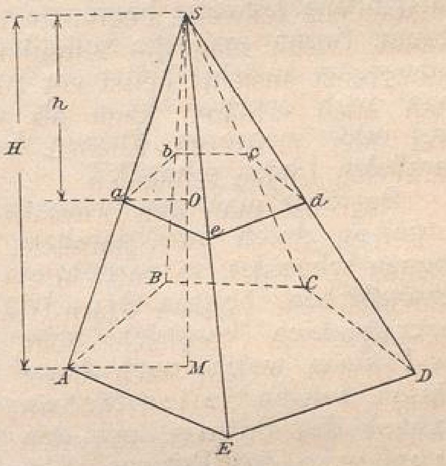

Fig. 11.

$$\begin{array}{c} SM : SO = SA : Sa \\ \underline{SA : Sa = AE : ae} \\ AE : ae = SM : SO \end{array}$$

Da sich aber (vergleiche Ebene Geometrie Seite 66) gestaltgleiche Figuren ihrem Flächeninhalte nach verhalten wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten, so erhält man:

$$\begin{array}{c} ABCDE : abcde = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 \\ \underline{\overline{AE}^2 \;:\; \overline{ae}^2 = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2} \\ ABCDE : abcde = \overline{SM}^2 : \overline{SO}^2 \end{array}$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundebene parallele Ebene geschnitten, so heisst der zwischen den beiden parallelen

Ebene liegende Teil ein Pyramidenstumpf und der zwischen der kleineren Schnittfläche und der Spitze liegende Teil der Pyramide, die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Demnach wird ein Pyramidenstumpf von zwei einander ähnlichen Vielecken als Grundflächen begrenzt, von denen die eine die grosse, die andere die kleine Grundfläche heisst und von so vielen Trapezen, Seitenflächen genannt, als jedes Vieleck Seiten hat. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen eines Pyramidenstumpfes heisst die Höhe desselben.

b) Das Prisma.

Denkt man sich die Spitze einer Pyramide entferne sich immer mehr und mehr von ihrer Grundfläche, so erhält man, wenn die Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist, ein Prisma, indem die Seitenkanten endlich parallel geworden sind. Der so entstandene teilweise begrenzte nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum, (wenn man die Seitenkanten nach beiden Seiten hin als unbegrenzt ansieht) heisst ein prismatischer Raum, welchen man auch erklären kann als einen Raum, der teilweise von drei oder mehreren Ebenen begrenzt wird, die einander in parallelen Linien schneiden.

Begrenzt man den prismatischen Raum dadurch, dass man denselben durch zwei parallele, sämtliche Kanten schneidende Ebenen schneidet, so entsteht ein Prisma. Die beiden parallelen Schnittflächen, heissen Grundflächen und sind untereinander deckungsgleich (vergleiche Seite 12). Die übrigen Grenzflächen des Prismas, welche nach dieser Erklärung Parallelogramme sein müssen, heissen Seitenflächen; dieselben bilden zusammen den Mantel des Prismas, mit den beiden Grundflächen aber die Oberfläche des Prismas. Die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Seitenflächen eines Prismas heissen die Seitenkanten oder Kanten des Prismas, welche alle untereinander gleich sind. Der Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe des Prismas.

Die Anzahl der Seitenflächen, der Seitenkanten und der Kanten der Grundfläche ist bei ein und demselben Prisma dieselbe; nach der Anzahl dieser Bestimmungsstücke wird das Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges genannt. Stehen die Seitenkanten winkelrecht zur Grundseite, so nennt man das Prisma ein gerades, in jedem anderen Falle ein schiefes. Bei dem geraden Prisma ist die Höhe ebenso gross wie jede Seitenkante; bei einem schiefen Prisma aber ist die Höhe kleiner als jede Seitenkante.

Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm, ist wird ein Parallelepiped genannt, welches ebenso wie jedes Prisma gerade oder schief sein kann. Jedes gerade Pararellepipod heisst auch ein rechtwinkeliges und hat es als Begrenzungsflächen Quadrate, so nennt man dieses Prisma einen Würfel oder einen Kubus.

In jedem Prisma ist jeder zur Grundfläche parallele Schnitt mit dieser Grundfläche deckungsgleich.

Jeder Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu einer Seitenkante ist ein Parallelogramm.

Ist die Grundfläche eines geraden Prismas ein regelmässiges Vieleck, so heisst das Prisma ein regelmässiges.

c) Das Prismatoid.

Jener Körper (Fig. 12) welcher begrenzt wird von zwei beliebigen in parallelen Ebenen liegenden Vielecken als Grundflächen, und von Dreiecken als Seitenflächen, von denen jedes mit einem Vieleck einer Seite, mit dem anderen aber eine Ecke gemeinschaftlich hat, heisst ein Prismatoid. Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen heisst die Höhe des Pramatoides. Die Seiten der beiden Grundflächenvielecke heissen Grundkanten, die Durchschnittslinien zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen heissen Seitenkanten. Im allgemeinen ist die Anzahl der Seitenflächen gleich der Summe aus den Seitenzahlen der beiden Grundflächen, doch kann unter Umständen die Anzahl der Seitenflächen auch kleiner sein, wenn zwei Seiten der beiden Grundflächen einander parallel sind.

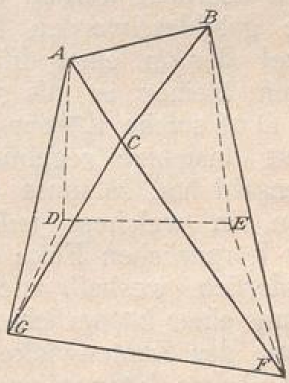

Fig. 12.

Aus der Entstehung eines Prismatoids folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass parallele Ebenen parallele Schnitte haben, dass eine durch die Mitte einer Seitenkante zu den beiden Grundflächen parallele Schnittebene alle übrigen Seitenkanten des Prismatoides sowohl als auch die Höhe desselben halbiert. Die so erhaltene Schnittebene, welche ebensoviel Kanten hat, als das Prismatoid Seitenflächen, heisst der Mittelschnitt des Prismatoides.

Der Mittelschnitt hat im allgemeinen so viel Kanten wie die Anzahl der Kanten der beiden Grundflächen zusammen beträgt, und jede Kante ist halb so gross wie je eine Kante einer Grundfläche.

Verbindet man irgend einen beliebigen Punkt des Mittelschnittes mit sämtlichen Eckpunkten des Prismatoides, so wird dieses in Pyramiden zerlegt, welche alle ihre Spitzen in dem angenommenen Punkte haben, und an denen zwei die beiden

Grundflächen, die anderen aber je eine Seitenfläche des Prismatoides zur Grundfläche haben.

Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoides gleichviel Seiten und sind ausserdem je zwei gegeuüber liegende Seiten pararallel, so heisst dieser Körper ein Obelisk.

d) Die regelmässigen Polyeder.

Ein ebenflächiger Körper oder Polyeder, dessen Begrenzungsflächen regelmässige, untereinander deckungsgleiche Vielecke sind und ausserdem von untereinander deckungsgleichen körperlichen Ebenen gebildet wird, heisst ein regelmässiger Polyeder oder platonischer Körper.

Da die regelmässigen Polyeder nur von regelmässigen Vielecken begrenzt werden sollen und nur dann eine körperliche Ecke gebildet werden kann, wenn die Summe aller Kantenwinkel der in einer Fläche zusammentreffenden Begrenzungsflächen kleiner ist als 360^0 (vergleiche Seite 15), so kann es nur fünf solche Körper geben. Denn berücksichtigt man zunächst dasjenige regelmässige Vieleck, welches die geringste Seitenzahl hat, so muss man vom gleichseitigen Dreieck ausgehen, in welchem jeder Winkel 60^0 beträgt. Zur Bildung einer körperlichen Ecke sind bekanntlich mindestens drei Ebenen erforderlich, weshalb auch drei gleichseitige Dreiecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 60^0 = 180^0$ ist, mithin kleiner als 360^0; ebenso können auch noch vier gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da die Summe der Kantenwinkel $4 \cdot 60^0 = 240^0$, auch noch kleiner ist, als 360^0; auch fünf gleichseitige Dreiecke können noch zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten, da auch hier noch die Summe der Kantenwinkel $5 \cdot 60^0 = 300^0$ noch immer kleiner als 360^0 ist. Nun können aber nicht mehr als fünf gleichseitige Dreiecke eine körperliche Ecke bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre, was unmöglich ist. Demnach kann es nur drei regelmässige Polyeder geben, welche von gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden, und zwar sind es:

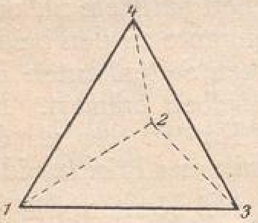

Fig. 13.

1. Das Tetraeder (Fig. 13.), auch Vierflächner genannt, begrenzt von vier gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je drei zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat vier Ecken und sechs Kanten.

2. Das Oktaeder (Fig. 14), auch Achtflächner genannt, begrenzt von acht gleichseitigen Dreiecken, von denen immer

je vier zu einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

3. Das Ikosaeder (Fig. 15), auch Zwanzigflächner genannt, begrenzt von zwanzig gleichseitigen Dreiecken, von denen immer je fünf zu einer körperlichen Ecke zusammentreten· dieser Körper hat zwölf Ecken und dreissig Kanten.

Nach dem gleichseitigen Dreieck folgt das gleichseitige Viereck oder Quadrat, in welchem jeder Winkel 90^0 beträgt, weshalb drei Quadrate zur Bildung einer körperlichen Ecke benutzt werden können, weil die Summe der Kantenwinkel $3.90^0 = 270^0$

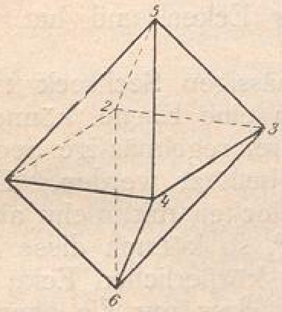

Fig. 14

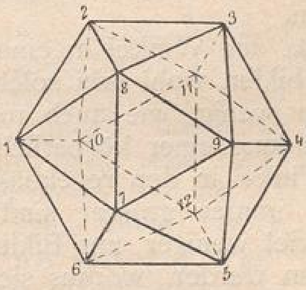

Fig. 15.

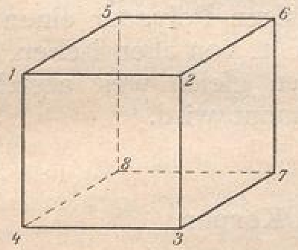

Fig. 16.

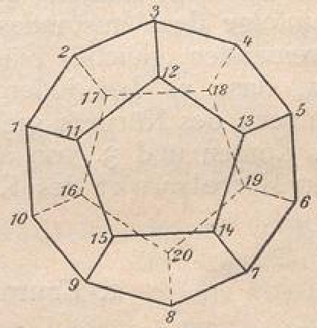

Fig. 17.

kleiner als 360^0, ist. Vier oder mehr Quadrate können keine körperliche Ecke mehr bilden, weil die Summe der Kantenwinkel gleich oder grösser als 360^0 wäre; demnach giebt es nur einen einzigen regelmässigen Polyeder, welcher von Quadraten begrenzt wird, nämlich:

Das Hexander oder der Würfel (Fig. 16), begrenzt von sechs Quadraten, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper hat sechs Ecken und zwölf Kanten.

Nach dem Quadrate folgt das regelmässige Fünfeck, in welchem jeder Winkel 108^0 beträgt, weshalb drei regelmässige Fünfecke wohl zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten können, da die Summe der Kantenwinkel $3 \cdot 108^0 = 324^0$, noch immer kleiner ist als 360^0. Da aber die Summe von vier Umfangswinkeln eines regelmässigen Vierecks $4 \cdot 108^0 = 432^0$, grösser ist als 360^0, so können nur drei regelmässige Fünfecke zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, weshalb es auch hier nur einen einzigen regelmässigen Polyeder giebt, nämlich:

Das Dodekaeder oder den Zwölfflächner (Fig. 17), begrenzt von zwölf regelmässigen Fünfecken, von denen immer je drei zur Bildung einer körperlichen Ecke zusammentreten; dieser Körper wird begrenzt von zwanzig Ecken und hat dreissig Kanten.

Da der Winkel in einem regelmässigen Sechseck 120^0 beträgt, bilden wohl drei solche Figuren eine Ebene, können aber ebenso wenig, wie auch mehr als drei regelmässige Sechsecke, zur Bildung einer körperlichen Ecke benützt werden. Da aber die Winkel in den regelmässigen Vielecken mit mehr als sechs Seiten immer grösser sind als 120^0, so können diese Figuren noch viel weniger zur Bildung einer körperlichen Ecke herangezogen werden, woraus sich ergiebt, dass nur die oben angeführten fünf platonischen Körper gebildet werden können.

Infolge der vollständig gleichmässigen Anordnung der einzelnen Flächen, Kanten und Ecken der regelmässigen Polyeder und infolge des Umstandes, dass die Begrenzungsflächen sämtlich untereinander gleiche Flächenwinkel bilden, ergiebt sich sehr leicht, dass es bei jedem regelmässigen Polyeder einen Punkt im Innern des Körpers giebt, welcher 1. von allen Ecken, 2. von allen Kanten und 3. von allen Flächen gleich weit absteht und daher Mittelpunkt des Körpers genannt wird.

2. Krummflächige Körper.

Diejenigen Körper, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heissen krummflächige Körper. In diesem Leidfaden können nur jene krummflächige Körper behandelt werden, welche eine gewisse Regelmässigkeit zeigen oder deren Entstehung bestimmten Gesetzen unterworfen ist. Die hier in Betracht kommenden Körper sind alle von sogenannten Umdrehungsflächen begrenzt, d. h. von Flächen, welche dadurch entstehen, dass bestimmte Linien sich so um eine gerade Linie, Drehungsachse genannt, bewegen, dass jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt. Diese so gebildeten Kreise, welche alle untereinander parallel sind, heissen Meridiane; die Ebenen der einzelnen Meridiane stehen alle auf der Drehungsachse winkelrecht.

Für den Gewerbetreibenden sind diese Drehkörper deshalb von ganz besonderer Bedeutung, weil sie in der Wirklichkeit auch durch „Drehen" hergestellt werden, indem ein Werkzeug an dem um eine Achse sich drehenden rohen Arbeitsstück so vorbeigeführt wird, dass die vorstehenden Teile des Arbeitsstückes von dem Werkzeug entfernt werden können.

Ausser diesen Umdrehungskörpern giebt es auch noch andere krummflächige Körper, welche jedoch hier nicht weiter berücksichtigt werden sollen.

a) Der Kegel.

Bewegt sich einer von zwei Strahlen so um den anderen, dass jeder Punkt des beweglichen Strahles einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem festliegenden Strahl liegt, so heisst diese so entstandene Fläche, eine Kegelfläche. Der Schnittpunkt oder Scheitelpunkt der beiden Strahlen heisst die Spitze des Kegels; der sich drehende Strahl heisst eine Erzeugende der Kegelfläche, der feststehende aber die Achse die Kegelfläche.

Aus dieser Erklärung ergiebt sich ohne Weiteres, dass jeder Schnitt der Kegelfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Kegelachse eine Kreislinie sein muss.

Wird die Kegelfläche durch eine zur Kegelachse winkelrechte Ebene begrenzt, so entsteht ein gerader Kegel, ist aber die schneidende Ebene gegen die Kegelachse geneigt, so entsteht der schiefe Kegel. Die auf diese Weise gebildete Schnittfläche, welche von der Kegelfläche begrenzt wird, heisst die Grundfläche des Kegels, derjenige Teil der Kegelfläche aber, welcher zwischen der Spitze und der schneidenden Ebene liegt, heisst der Mantel des Kegels. Beide zusammen bilden dessen Oberfläche.

Unter der Höhe des Kegels versteht man die Länge der Winkelrechten, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt werden kann. Bei dem geraden Kegel ist die Kegelachse ebenso gross wie die Höhe, da diese beiden Linien zusammenfallen; bei dem schiefen Kegel ist die Höhe kleiner als die Kegelachse.

Der Kegel kann auch angesehen werden als eine Pyramide, deren Grundfläche unendlich viele, unendlich kleine Seiten hat. Daraus ergiebt sich aber auch, dass sämtliche für die Pyramide geltenden Lehrsätze auch auf den Kegel angewendet werden können, sodass man folgende Sätze erhält:

1. Jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, welche durch die Spitze des Kegels geht, ist ein Dreieck.

2. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Höhe desselben gehen, sind untereinander deckungsgleich.

3. Alle Schnitte eines geraden Kegels mit Ebenen, welche durch die Spitze des Kegels gehen, sind gleichschenklige Dreiecke.

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so verhält sich die Schnittfläche zur Grundfläche wie die Quadrate der Entfernungen der beiden Ebenen von der Spitze.

Jeder Achsenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez und zwar bei einem geraden Kegel ein gleichschenkliges Trapez.

Die Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen haben wegen der Entstehung der verschiedenartigen Schnittfiguren eine so grosse Bedeutung, insbesondere auch für die Gewerbetreibenden, dass es notwendig erscheint, auf diese Aufgabe hier näher einzugehen, obwohl dieselbe teilweise in das Gebiet der Projektionslehre gehört.

Eine Ebene, welche einen Kreiskegel schneidet, kann folgende Lage haben:

1. Die Ebene geht durch die Spitze des Kegels, wodurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, dessen Grundseite um so grösser wird, je näher die Schnittebene dem Mittelpunkte der Grundfläche rückt und am grössten wird, wenn die Schnittebene durch die Kegelachse geht.

2. Die Schnittebene ist parallel zur Grundfläche, dann erhält man als Schnitt einen Kreis, der um so grösser ist, je grösser die Entfernung der Schnittebene von der Spitze ist, und um so kleiner, je kleiner die Entfernung von der Spitze ist, und zwar verhalten sich die Schnittflächen ihrer Grösse nach, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

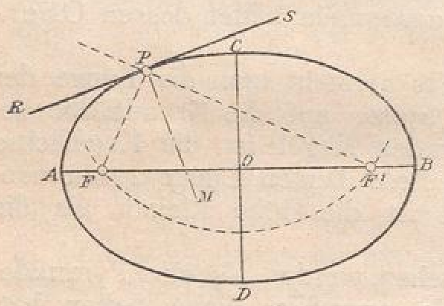

Fig. 18.

3. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche und trifft dieselbe sämtliche Erzeugenden des Kegels, dann ist der Schnitt eine Ellipse, deren Achsenverhältnis sich um so mehr von der Einheit entfernt, je grösser der Neigungswinkel der Schnittebene mit der Grundfläche wird.

4. Ist die Schnittebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu einer Kegelerzeugenden, so ist der Schnitt eine Parabel und endlich

5. Ist die Scheitelebene geneigt gegen die Grundfläche, aber parallel zu zwei Kegelerzeugenden, so ist der Kegel eine Hyperbel.

Eine Ellipse ist jene Linie, bei welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes P von zwei festen Punkten

F und F_1, Brennpunkte genannt, (Fig. 18) gleich einer bestimmten Linie der grossen Achse ist, d. h. $PF + PF_1 = AB$.

Sind die beiden Achsen AB und CD einer Ellipse gegeben, so findet man die beiden Brennpunkte F und F_1, indem man mit der halben grossen Achse AO als Halbmesser einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt der Endpunkt C oder D der kleinen Achse ist; die beiden so erhaltenen Schnittpunkte F und F_1 sind, wie sich aus der oben angegebenen Erklärung für eine Ellipse ergiebt, die Brennpunkte derselben.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ellipse mit den beiden Brennpunkten F und F_1, so steht die Halbierungslinie PM dieses Winkels FPF_1 winkelrecht zu dem durch P hindurchgehenden Teil der Ellipse; mithin erhält man eine Berührungslinie RS in diesem Punkte P, wenn man zu dieser Winkelhalbierenden PM eine Winkelrechte errichtet, oder indem man den Nebenwinkel FPF_1 halbiert.

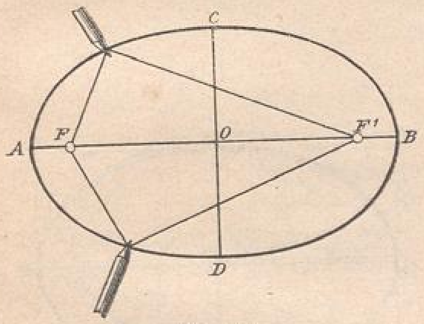

Fig. 19.

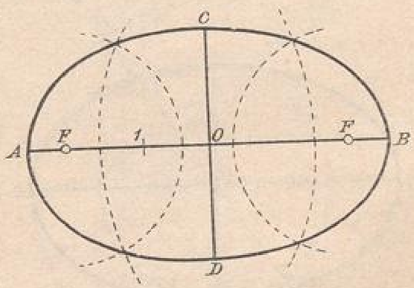

Fig. 20.

Eine Ellipse ist aus den beiden gegebenen Achsen zu zeichnen:

a) Sehr einfach erhält man eine Ellipse, wenn man die Enden eines Fadens von der Länge der grossen Achse AB in den Brennpunkten F und F_1 (Fig. 19) befestigt, und nun mit der Spitze eines Bleistiftes so auf der Zeichenebene hinfährt, dass der Faden stets gespannt erscheint, dann beschreibt die Spitze des Bleistiftes auf der darunter liegenden Papierfläche eine Ellipse. Diese Art der Erzeugung der Ellipse ist bei den Gärtnern besonders beliebt.

b) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 20) gegeben, so bestimme man nach der oben angegebenen Art und Weise zunächst die beiden Brennpunkte F und F_1, wobei bemerkt werden soll, dass man die Entfernung der beiden Brennpunkte Excentrizität nennt. Zur Bestimmung eines beliebigen Punktes der Ellipse nehme man irgendwo zwischen den beiden Brennpunkten einen Punkt 1 an und zeichne je einen Kreis, dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist, mit einem Halbmesser gleich der Entfernung $1A$ des angenommenen Punktes von dem einen Endpunkt A der grossen Achse; diesen so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise, deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, für welche aber der Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 an dem zweiten Endpunkt B der grossen Achse ist. Die so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise sind vier Ellipsenpunkte. Durch verschiedene Wahl der Punkte zwischen den beiden Brennpunkten kann man beliebige Ellipsenpunkte erhalten, durch deren folgerichtige Verbindung man dann die Ellipse zeichnen kann.

c) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 21) der Ellipse gegeben, so zeichne man über denselben als Durchmesser je einen Kreis und lege durch den Mittelpunkt O einen beliebigen Durchmesser EF, welcher den grossen Kreis 1 und 2 und den kleinen Kreis in 3 und 4 schneidet; durch die Schnittpunkte 1 und 2 mit dem grossen Kreise zeichne man je eine Parallele zur kleinen Achse und durch die Schnittpunkte 3 und 4 mit

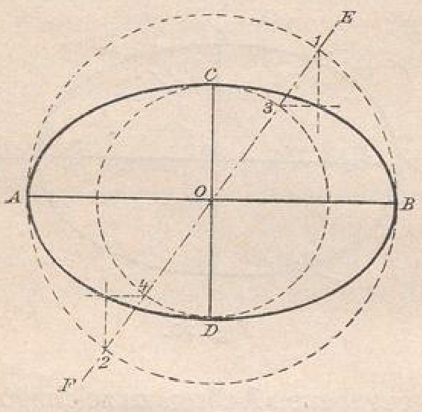

Fig. 21.

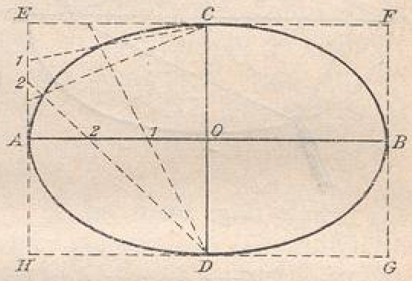

Fig. 22.

dem kleinen Kreise je eine Parallele zur grossen Achse; die Schuittpunkte dieser Parallelen ergeben Ellipsenpunkte. Durch geeignete Wahl der Durchmesser erhält man unter Befolgung der beschriebenen Konstruktion die erforderlichen Punkte, durch deren Verbindung man die Ellipse zeichnen kann.

d) Sind die beiden Achsen AB und CD (Fig. 22) der Ellipse gegeben, so zeichne man ein Rechteck $EFGH$, für welches die Ellipsenachsen die Mittellinien sind und teile die beiden Strecken AO und AE in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; die so erhaltenen Teilpunkte verbinde man mit den Endpunkten C und D der kleinen Achse, wodurch man als Schnittpunkte der zusammengehörigen Linien Ellipsenpunkte des einen Quadranten erhält. Durch symmetrische Übertragung dieser Konstruktion auf die drei anderen Quadranten erhält man auch dort die erforderliche Anzahl von Ellipsenpunkten, die miteinander durch einen fortlaufenden Linienzug verbunden, die Ellipse ergeben.

e) Die Bauhandwerker zeichnen sehr häufig die Ellipse durch Vergatterung, weshalb hier eine der vielen hierhergehörigen Konstruktionen vorgeführt werden soll. Ist AO die halbe grosse Achse der Ellipse (Fig. 23), CD aber die ganze kleine Achse derselben, so zeichne man über der kleinen Achse als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte grosse Achse in E schneidet; die beiden Strecken OA und OE teile man nun in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile und errichte in den Teilpunkten Winkelrechte, welche selbstverständlich parallel zur kleinen Achse gehen. Durch die Schnittpunkte dieser Winkelrechten mit dem Halbkreise zeichne man Parallele zur grossen Achse und bringe dieselben zum Schnitt mit der dazugehörigen Winkelrechten, welche in den Schnittpunkten der grossen Achse errichtet wurden, wodurch man die gesuchten Ellipsenpunkte erhält.

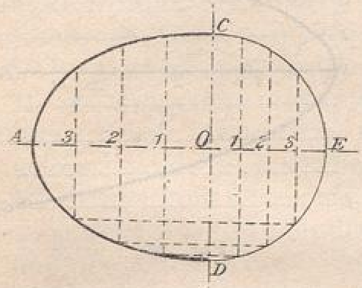

Fig. 23.

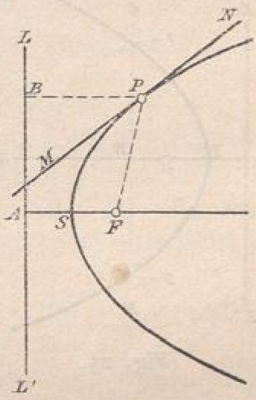

Fig. 24.

Eine Parabel ist jene Linie (Fig. 24) bei welcher jeder Punkt P derselben von einem Punkte F, Brennpunkt genannt, ebenso weit absteht, wie von einer bestimmten Linie LL, Leitlinie genannt, wobei besonders darauf hingewiesen werden soll, dass unter der Entfernung eines Punktes von einer Linie die Länge der Winkelrechten verstanden wird, welche von dem Punkte auf die Linie gefällt werden kann. Der Scheitelpunkt S der Parabel muss mit dem Halbierungspunkte der Entfernung des Brennpunktes F an der Leitlinie LL, zusammenfallen. Die Parabel ist zum Unterschiede von der Ellipse eine unbegrenzte Linie, da sich die beiden Teile bis ins Unendliche erstrecken.

Soll in einem Punkte P der Parabel eine Berührungslinie gezeichnet werden, so verbindet man dieselben mit dem Brennpunkt F, zeichnet die Winkelrechte PB zu der Leitlinie, und halbiert den so gebildeten Winkel BPF, so erhält man die Berührungslinie.

Eine Parabel ist zu zeichnen:

a) Ist die Leitlinie LL, und der Brennpunkt F gegeben (Fig. 25), so zeichnet man nach obigen Angaben zunächst den Scheitelpunkt S der Parabel und jenseits des Scheitelpunktes beliebige Winkelrechte CD zur Achse AH der Parabel; diese Winkelrechte wird durch einen Kreisbogen 1,2 durchschnitten, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt ist, und dessen Halbmesser gleich der Entfernung EA der Winkelrechten von der Leitlinie LL ist; so erhält man zwei Parabelpunkte. Ebenso erhält man weitere Parabelpunkte durch geeignete Wahl der Winkelrechten zur Parabelachse; die folgerichtige Verbindung der erhaltenen Punkte ergiebt die Parabel.

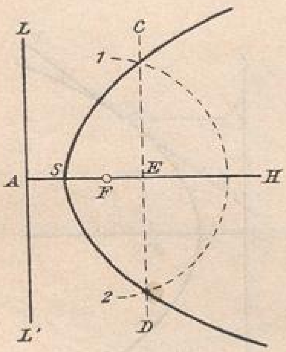

Fig. 25.

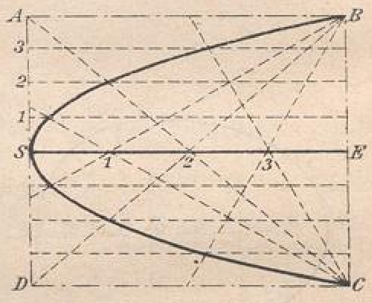

Fig. 26.

b) Soll in das Rechteck $ABCD$ (Fig. 26) eine Parabel so gezeichnet werden, dass der Halbierungspunkt S der Seite AD der Scheitelpunkt derselben ist; aber die Seite AB die Richtung der Achse der Parabel, so teile man die Mittellinie SE und die halbe Rechteckseite SA und SD in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile; durch die Teilpunkte der Rechteckseite AD zieht man zu der Parabelachse Parallele, welche man durch Strahlen durchschneidet, die die Punkte B und C mit den Teilpunkten der Parabelachse verbinden; die so erhaltenen Schnittpunkte ergeben Parabelpunkte, durch deren folgerichtige Verbindung man die Parabel erhält.

c) Sollen die einen Winkel einschliessenden Geraden AH und BY (Fig. 27) durch eine Kurve miteinander so verbunden werden, dass die den Punkten A und B die Anfangspunkte derselben sind, so erfolgt die Überführung der einen Richtung in die andere am zweckmässigsten durch eine Parabel, deren

Zeichnung am einfachsten durch Berührungslinien erfolgt. Zu diesem Zwecke verlängert man die beiden Geraden AX und BY bis zum Schnittpunkt S und teilt die so erhaltenen Strecken AS und BS in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, deren Nummerierung man einerseits bei A, andrerseits bei S beginnt; die Verbindungslinien der mit gleichen Ziffern bezeichneten Teilpunkten ergeben die gesuchten Parabeltangenten, mit deren Hülfe die durch die Punkte A und B hindurchgehende Parabel gezeichnet werden kann.

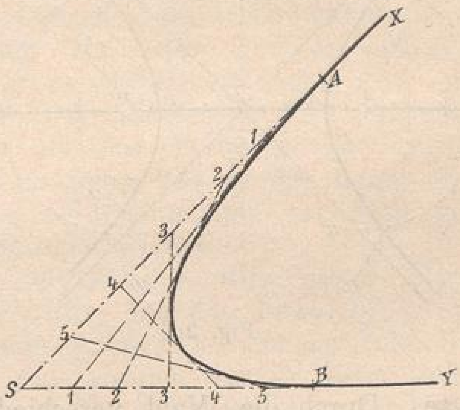

Fig. 27.

Eine Hyperbel ist jene Linie, bei welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes P (Fig. 28) an zwei gegebenen Punkten F und F_1, Brennpunkte genannt, gleich einer bestimmten Linie, der grossen Achse AB ist. Die Hyperbel ist, ebenso wie die Parabel, eine unbegrenzte Linie, welche sich ins Unendliche erstreckt, nur besteht die Hyperbel aus zwei Ästen, welche sowohl nach der grossen Achse, als auch nach der Mittelwinkelrechten MN zu derselben symmetrisch erscheint.

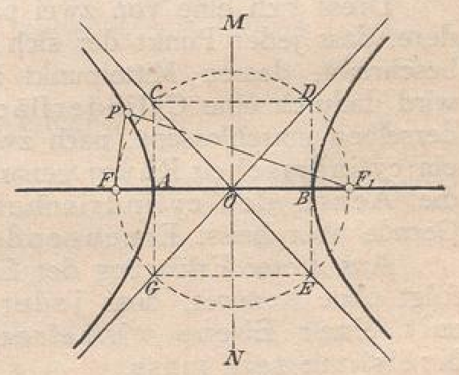

Fig. 28.

Zeichnet man über der Entfernung der beiden Brennpunkte F und F_1 einen Kreis, durch schneidet denselben durch zwei Winkelrechte zu der grossen Achse, welche man in den Scheitelpunkten A und B errichtet, und verbindet man die so erhaltenen Scknittpunkte durch Gerade parallel zur grossen Achse, so erhält man ein Rechteck $CDEF$, dessen beide Diagonalen CE und DG Asymptoten heissen und die Tangenten der Hyperlel in unendlicher Entfernung umgeben, d. h. diesen Linien muss sich die Hyperbel immer mehr und mehr nähern, ohne dieselben jedoch jemals zu erreichen.

Soll eine Hyperbel, deren Brennpunkte F und F_1 und deren Scheitelpunkte A und B gegeben sind gezeichnet werden, so nehme man ausserhalb der Brennpunkte auf der verlängerten grossen Achse irgendwo einen beliebigen Punkt 1 (Fig. 29) vor und beschreibe je einen Kreis *a,a* und *b,b*, dessen Mittelpunkt je ein Brennpunkt ist mit einem Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes 1 von dem einen Hyperbelscheitel *A*; diese so erhaltenen Kreisbogen durchschneide man durch zwei andere Kreise *mn* und *op* deren Mittelpunkte ebenfalls die beiden Brennpunkte sind, deren Halbmesser aber die Entfernung des Punktes 1 von dem zweiten Hyperbelscheitel *B* ist. Diese so erhaltenen vier Schnittpunkte der Kreise ergeben vier Hyperbelpunkte. Durch die Wahl verschiedener Punkte auf der Verlängerung der grossen Achse der Hyperbel, ausserhalb der beiden Brennpunkte, ergiebt die erforderliche Anzahl von Hyperbelpunkte, und durch deren folgerichtige Verbindung man die Hyperbel erhält.

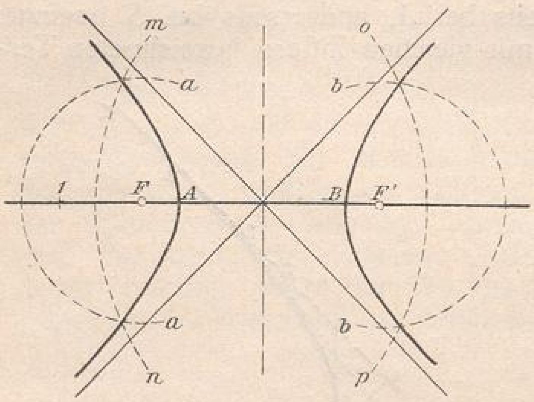

Fig. 29.

b) Der Cylinder.

Dreht sich eine von zwei parallelen Geraden so um die andere, dass jeder Punkt der sich drehenden Geraden einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in der festen Geraden liegt, so wird dadurch eine *Cylinderfläche* gebildet, während der von derselben umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum ein *cylindrischer Raum* genannt wird. Die feste Gerade heisst die *Achse des cylindrischen Raumes*, die sich drehende Gerade aber heisst *Erzeugende*.

Aus dieser Erklärung der Entstehung einer *Cylinderfläche* folgt ohne weiteres, dass *jeder Schnitt der Cylinderfläche mit einer Ebene winkelrecht zur Cylinderachse eine Kreislinie sein mnss.*

Alle Schnitte der Cylinderfläche mit Ebenen winkelrecht zur Cylinderachse sind untereinander deckungsgleiche Kreise.

Wird eine cylindrische Fläche durch zwei untereinander parallele Ebenen begrenzt, so heisst der so allseitig begrenzte Körper ein *Cylinder*; die beiden ebenen Schnittflächen heissen die *Grundflächen*, derjenige Teil der Cylinderfläche aber, welcher zwischen den beiden parallelen Schnittflächen liegt, heisst der Mantel des Cylinders. Die beiden Grundflächen und der Mantel des Cylinders zusammen bilden die Oberfläche desselben.

Unter der Höhe des Cylinders versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen.

Stehen die beiden Grundflächen zur Cylinderachse winkelrecht, so nennt man den Cylinder einen geraden, zum Unterschiede von einem schiefen Cylinder, dessen Grundflächen gegen die Cylinderachse geneigt sind. Bei einem geraden Cylinder ist die Höhe desselben ebenso gross wie dessen Achse, bei einem schiefen Cylinder aber ist die Höhe kleiner als die Cylinderachse.

Ebenso wie der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, welche durch die Achse geht, ist ein Parallelogramm, und zwar stimmen dieselben in einem Paare der parallelen Seiten überein. Ist der Cylinder ein gerader, so ist jeder Achsenschnitt ein rechtwinkliges Parallelogramm; ist aber der Cylinder ein schiefer, so ist jeder Achsenschnitt ein schiefwinkliges Parallelogramm.

Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, parallel zur Cylinderachse, ist ein Parallelogramm und zwar ist dasselbe um so breiter, je kleiner die Entfernung der Schnittebene von der Cylinderachse ist.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene geschnitten, welche geneigt zur Cylinderachse steht, so entsteht eine Ellipse.

c) Die Kugel.

Wird ein Halbkreis um seinen Durchmesser so gedreht, dass jeder Punkt der Kreislinie einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dem feststehenden Kreisdurchmesser liegt, so entsteht eine Kugelfläche; derjenige Körper, der von einer Kugelfläche begrenzt wird, heisst eine Kugel.

Jeder Punkt der Kugeloberfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleichweit entfernt, weshalb derselbe auch Mittelpunkt der Kugel heisst. Die Verbindungslinie eines Punktes der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkte derselben heisst Halbmesser; jede gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Kugeloberfläche, welche durch den Kugelmittelpunkt geht, heisst Durchmesser; die Endpunkte des Durchmessers heissen Gegenpunkte.

Alle Halbmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Jeder Durchmesser einer Kugel ist doppelt so gross wie ein Halbmesser derselben.

Alle Durchmesser einer Kugel sind untereinander gleich.

Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem Punkte gleichen Abstand haben, ist die Oberfläche jener Kugel, deren Mittelpunkt der gegebene Punkt ist und deren Halbmesser gleich dem gegebenen Abstande ist.

Ein Punkt liegt ausserhalb, auf oder innerhalb der Oberfläche einer Kugel, je nachdem seine Entfernung grösser, gleich oder kleiner als der Kugelhalbmesser ist.

Jeder Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis.

Eine beliebige Ebene schneide die Kugeloberfläche nach der krummen Linie ABC (Fig. 30). Fällt man von dem Kugelmittelpunkte M auf die Schnittebene eine Winkelrechte MN, so muss diese (vergleiche Seite 4) mit jeder durch den Fusspunkt N in der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschliessen. Verbindet man dann zwei beliebige Punkte A und C der Schnittlinie mit dem Kugelmittelpunkte M und dem Fusspunkte N der Winkelrechten MN, so entstehen zwei deckungsgleiche Dreiecke MNA und MNC, da dieselben in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite übereinstimmen ($MN = MN$; $MA = MC$; $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MNC = 90^0$), woraus die Geichheit der dritten Seiten $NA = NC$ folgt. Daraus folgt, dass jeder Punkt der Schnittlinie ABC von einem Punkte N den gleichen Abstand hat, also die Schnittlinie ein Kreis sein muss, welcher Kugelkreis genannt wird.

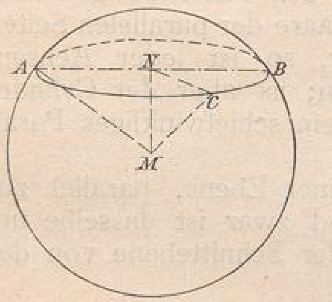

Fig. 30.

Dieser Lehrsatz folgt auch unmittelbar aus der Erzeugung einer Kugel durch Umdrehung in Bezug auf eine zur Drehungsachse winkelrechte Ebene; da man aber jeden beliebigen Kugeldurchmesser als Drehungsachse ansehen kann, so muss jeder ebene Schnitt mit einer Kugel ein Kreis sein.

Infolge der Gleichheit der Erzeugung eines Kreises und einer Kugel lassen sich alle für die Sehnen eines Kreises geltenden Lehrsätze (vergleiche: Hoch, Ebene Geometrie Seite 25) folgerichtig für die Kugel erweitern uud anwenden, so dass man erhält:

1. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte und umgekehrt.

2. Ungleiche Kugelkreise haben ungleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, und zwar sind die Kugelkreise um so grösser, je kleiner ihre Entfernung vom Kugelmittelpunkte ist und umgekehrt.

3. Diejenigen Kugelkreise, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind die grössten aller möglichen Schnittkreise und heissen daher grösste Kugelkreise.

4. Jede Ebene, welche im Endpunkte eines Kugelhalbmessers auf diesem winkelrecht steht, heisst eine Berührungsebene der Kugel, woraus auch umgekehrt folgt, dass der Halbmesser im Berührungspunkte einer Berührungsebene winkelrecht zu dieser steht.

5. Durch einen Punkt einer Kugel lässt sich nur eine einzige Berührungsebene zeichnen.

6. Durch einen Punkt ausserhalb einer Kugel lassen sich unzählig viele Berührungsebenen an dieselbe zeichnen, deren Berührungspunkte alle in dem Umfange eines Kugelkreises liegen.

7. Durch eine Gerade ausserhalb einer Kugel lassen sich an dieselbe nur zwei Berührungsebenen legen.

Jede Ebene, welche eine Kugel schneidet, teilt dieselbe in zwei Teile, welche Kugelabschnitte oder Kugelhauben (Kugelsegmente) genannt werden; der gemeinschaftliche Schnittkreis heisst die Grundfläche jedes Kugelabschnittes, der zu jedem Abschnitt gehörige Teil der Körperoberfläche aber der Mantel des Kugelabschnittes. Der zwischen der Oberfläche der Kugel und der Grundfläche liegende Teil desjenigen Durchmessers, welcher winkelrecht zur Grundfläche steht, heisst die Höhe des Kugelhaube.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher begrenzt wird von einem Kugelabschnitt und einem Kegel, dessen Grundfläche mit derjenigen des Abschnittes übereinstimmt, und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, heisst ein Kugelausschnitt.

Der Kugelabschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisabschnittes um die Mittelwinkelrechte der Sehne, der Kugelausschnitt entsteht durch Umdrehung eines Kreisausschnittes um die Halbierungslinie des Centriwinkels.

Derjenige Teil einer Kugel, welcher von zwei parallelen Kugelkreisen begrenzt wird, heisst eine Kugelzone.

Kugeln mit demselben Mittelpunkt heissen konzentrisch.

Kugeln mit verschiedenem Mittelpunkt heissen exzentrisch.

Die Lage zweier Kugeln (vergleiche Hoch, Ebene Geometrie Seite 32) ist abhängig von der Entfernung ihrer Mittelpunkte voneinander und der Grösse ihrer Halbmesser und zwar können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte grösser als die Summe der Halbmesser, so liegen beide Kugeln ganz ausserhalb einander und haben keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich.

2. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie die Summe der Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander ausschliessend und haben eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welche winkelrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte steht.

3. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als die Summe der beiden Halbmesser und grösser als der Unterschied der beiden Halbmesser, so schneiden die beiden Kugeln einander und haben einen Kugelkreis gemeinschaftlich, dessen Ebene winkelrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

4. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte ebenso gross wie der Unterschied der beiden Halbmesser, so berühren die beiden Kugeln einander einschliessend und haben ebenfalls eine gemeinschaftliche Berührungsebene, welcher winkelrecht auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte steht.

5. Ist die Entfernung der Kugelmittelpunkte kleiner als der Unterschied der beiden Halbmesser, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der grösseren, ohne dass beide Oberflächen auch nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.

6. Ist endlich die Entfernung der Kugelmittelpunkte gleich Null, so heissen die Kugeln konzentrisch.

D. Die Berechnung der Körper.

Bei der Berechnung oder Ausmessung der Körper handelt es sich hauptsächlich um die Bestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes desselben.

Die Oberfäche eines Körpers setzt sich aus einer oder mehreren, teils ebenen, teils krummen Flächen zusammen. Der Flächeninhalt sämtlicher Begrenzungsflächen zusammen genommen ergiebt die Oberfläche des Körpers, die häufig aus den beiden Hauptteilen Mantel und Grundfläche zusammengesetzt ist.

Um den Rauminhalt eines Körpers zu bestimmen, vergleicht man denselben mit einem Würfel, dessen Kante ebenso gross ist wie die Längeneinheit. Die Einheit für die Raummessung ist das Kubik- oder Raummeter, d. i. ein Würfel, dessen Seitenkante ein Meter lang ist. Ein Raummeter hat 1000 Raum- oder Kubikdezimeter; ein Kubikdezimeter hat 1000 Kubikzentimeter; ein Kubikzentimeter hat 1000 Kubikmillimeter.

Nur der Rauminhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedes kann durch unmittelbare Vergleichung mit dem Rauminhalte eines Würfels gefunden werden, da nur ein rechtwinkeliges Parallelepiped sich durch entsprechende Schnitte in Würfel zerlegen lässt.

1. Die eckigen Körper.

a) Das Prisma.

Die Oberfläche eines Prismas setzt sich zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen.

Die Mantelfläche eines Prismas besteht aus so vielen Parallelogrammen als das Prisma Seiten hat. Ist das Prisma ein gerades Prisma, so sind die sämtlichen Seitenflächen Rechtecke mit übereinstimmender Höhe, weshalb man dann die Mantelfläche erhält, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe oder der Seitenkante multipliziert.

Ein schief abgeschnittenes Prisma nennt man jenen prismatischen Raum, der durch zwei nicht parallele Grundflächen begrenzt wird. Die Seitenflächen eines solchen schief abgeschnittenen Prismas sind immer Trapeze, welche einzeln berechnet werden müssen, wenn man die Mantelfläche dieses Körpers bestimmen will.

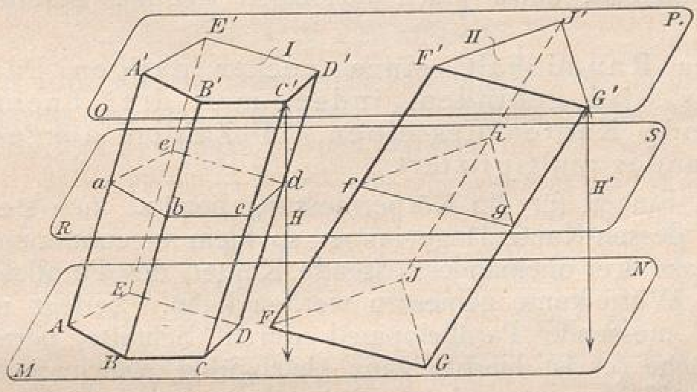

Fig. 31.

Die Oberfläche eines schief abgeschnittenen Prismas setzt sich auch zusammen aus der Mantelfläche und den beiden Grundflächen, nur sind diese beiden nicht gleich, sondern sowohl der Grösse als auch nach der Gestalt verschieden.

Der Rauminhalt zweier Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich (Cavalieri'sches Prinzip).

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Prismen I und II (Fig. 31) gleich, und haben dieselben ausserdem gleiche Höhen H und H^1, so kann man diese beiden Körper so zwischen zwei parallele Ebenen MN und OP so legen, dass ihre Grundflächen in diese Ebenen hineinfallen. Schneidet man nun beide Prismen durch eine Ebene RS parallel zu der Grundrissebene MN, so ist der so entstehende Schnitt $abcde$ in dem Prisma I mit der Grundfläche $ABCDE$ deckungsgleich (vergleiche Seite 20); ebenso ist der entstehende Schnitt fgi in dem Prisma II mit der Grundfläche FGI deckungsgleich; da aber die beiden Grundflächen $ABCDE$ und FGI inhaltsgleich sind, so müssen auch die Schnittfiguren $abcde$ und fgi mit der Ebene RS inhaltsgleich sein. Da für jede beliebige, zur Grundfläche parallele Ebene die Gleichheit der Schnittfiguren folgt, so kann man diese beiden Prismen auch durch zwei Ebenen schneiden, deren Abstand voneinander so klein ist, dass man von der Dicke der so entstehenden Schichte absehen, und diese Schichten gewissermassen als ebene Figuren betrachten kann. Sind aber alle Schichten, welche durch Schnitte mit solchen parallelen Ebenen entstanden sind, untereinander inhaltsgleich, so müssen auch die ganzen Prismen inhaltsgleich sein, welche sich aus einer gleichen Anzahl inhaltsgleicher Schichten zusammensetzen.

Demnach ist es nur nötig, festzustellen, auf welche Weise man den Rauminhalt eines einzigen Prismas bestimmt, um dann den Rauminhalt eines jeden beliebigen Prismas bestimmen zu können.

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedes wird gefunden, indem man drei aneinanderstossende Kanten desselben, in Zahlen ausgedrückt, miteinander multipliziert.

Als Einheit für die Körpermessung benützt man stets einen Würfel, dessen Kantenlänge immer so klein angenommen werden kann, dass drei aneinanderstossende Kanten des Parallelopipedes mit der Würfelkante gemessen werden kann. Zerlegt man nun das zu messende Parallelopiped durch Schnitte parallel zur Grundfläche (es ist hierbei ganz gleichgültig, welche Seitenfläche als Grundfläche angesehen wird, doch muss eine zunächst angenommen werden, wodurch dann die dritte Seitenkante gleich der Höhe wird) in ebenso vielfache Scheiben von der Länge der Würfelkante, als die Würfelkante in der Höhe als dritte Seite des Parallelopiped aus enthalten ist, so sind diese Scheiben nach dem Cavalierischen Prinzipe untereinander inhaltsgleich. Jede dieser Scheiben zerlegt man nun zunächst in so viele parallelopipedische Stäbe, deren Grundfläche gleich einer Würfelfläche ist und deren Höhe gleich der dritten Kante des Parallelopipedons ist; die Anzahl dieser Stäbe ist so gross wie die Grösse der Würfelkante in der zweiten Kante des Parallelopipedas enthalten ist. Auch diese parallelopipedischen Stäbe sind untereinander inhaltsgleich. Jeden prismatischen Stab kann man nun endlich in so viel Würfel zerlegen, als die Würfelkante in der dritten Kante des ursprünglichen Parallelopipedes enthalten ist. Die Würfelkante ist nach der Voraussetzung gleich der Längeneinheit, folglich enthält das Parallelopiped so viel prismatische Stäbe als das Produkt der ersten und zweiten Kante des Parallopipedes angiebt, selbstverständlich beide gemessen mit der Würfelkante als Einheit. Die Anzahl der Einheitswürfel ergiebt sich demnach, wenn man die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten des Parallelopipedes, gemessen mit der Würfelkante, in Zahlen ausgedrückt miteinander multipliziert.

Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz (Kubus) seiner Kante.

Der Rauminhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, wobei jedoch beiden Messungen dieselbe Masseinheit zu Grunde gelegt werden muss.

Da man (vergleiche Seite 37) jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelopiped mit übereinstimmender Grundseite und Höhe verwandeln kann, und da der Inhalt des Parallelopipedes sich aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe ergiebt, so muss jedes Prisma, gleichgültig, ob es gerade oder schief ist, auf genau die gleiche Weise berechnet werden.

b) Die Pyramide.

Die Oberfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus der Mantelfläche und der Grundfläche zusammen, welche einzeln als ebene Flächen berechnet werden müssen.

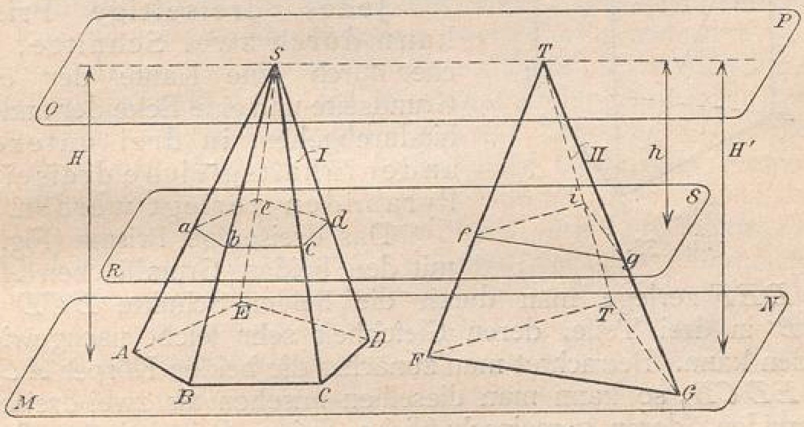

Fig. 32.

Die Mantelfläche einer jeden Pyramide setzt sich aus soviel Dreiecken zusammen, wie die Pyramidengrundfläche Seiten hat. Die Mantelfläche einer geraden regelmässigen Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seitenhöhe. Unter der Seitenhöhe versteht man die Höhe eines der untereinander deckungsgleichen Seitendreiecke.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich.

Sind die Grundflächen $ABCDE$ und FGI der beiden Pyramiden I und II (Fig. 32) gleich, und haben dieselben gleiche

Höhen H und H^1, so lassen sie sich so auf eine Ebene MN stellen, dass ihre Spitzen S und T in einer zu MN parallelen Ebene OP liegen, deren Abstand von der ersten Ebene gleich der Höhe der Pyramide ist. Schneidet man nun beide Pyramiden durch eine zu der Ebene MN parallele Ebene RQ, deren Abstand von der Ebene OP oder von den Spitzen der Pyramiden h ist, so ergiebt sich (vergleiche Seite 19) für diese so erhaltenen Schnittflächen $abcde$ und fgi folgendes:

$$\begin{aligned} ABCDE : abcde &= H^2 : h^2 \\ FGI : fgi &= H^2 : h^2 \\ \hline ABCDE : abcde &= FGI : fgi \\ ABCDE &= FGI \text{ (nach der Vorauss.).} \\ \hline abcde &= fgi \end{aligned}$$

Dies gilt aber für jeden beliebigen Schnitt mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, mithin muss nach dem Cavalierischen Prinzipe, (vergleiche Seite 37) welches für jeden Körper Gültigkeit hat, der Rauminhalt zweier Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen gleich sein.

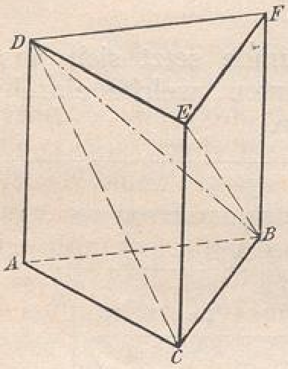

Fig. 33.

Jedes dreiseitige Prisma kann durch zwei Schnitte, welche durch eine Kante der einen Grundseite und eine Ecke der anderen hindurchgehen, in drei untereinander inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Das dreiseitige Prisma (Fig. 33) mit den beiden Grundflächen ABC und DEF zerlege man durch die beiden Schnitte BCD und DEB in drei Teile, deren Gleichheit sehr leicht nachgewiesen werden kann. Betrachtet man zunächst die beiden Körper $ACDB$ und $EDCB$, so kann man dieselben ansehen als zwei dreiseitige Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze B ist, deren Grundflächen ADC und DCE aber in in der einen Begrenzungsfläche $ADEC$ des gegebenen Prismas liegen; mithin haben diese beiden Pyramiden dieselbe Höhe, als Winkelrechte von der Spitze B auf die gemeinschaftliche Grundflächenebene $ADEC$; die beiden Grundflächen ADC und ECD sind aber auch inhaltsgleich, da es die beiden Teildreiecke sind, in welche das Parallelogramm $ADEC$ durch die Diagonale DC geteilt wird, mithin sind diese beiden dreiseitigen Pyramiden (Grundfläche ADC, Spitze in B und Grundfläche DEC, Spitze in B) inhaltsgleich. Vergleicht man nun die beiden Körper $CBED$ und $FEBD$ miteinander, so können dieselben auch als zwei dreiseitige Pyramiden mit ge meinschaftlicher Spitze in D angesehen werden, deren Grundflächen CEB und FBE aber in der Seitenfläche $EFBC$ des gegebenen dreiseitigen Prismas liegen; mithin haben diese beiden dreiseitigen Pyramiden eine gemeinschaftliche Höhe, als Winkelrechte von der Spitze D auf die Grundfläche $EFBC$. Die beiden Grundflächen EBC und BEF aber sind ebenfalls als Teildreiecke des Parallelogramms $CBFE$, bewirkt durch die Diagonale BE inhaltsgleich, woraus auch die Inhaltsgleichheit der beiden Körper $CBED$ und $EFBD$ folgt. Da aber die drei Körper $ABCD$ $CBED$ und $DEFB$ untereinander gleich sind, zusammen aber das gegebene dreiseitige Prisma $ABCDEF$ ausmachen, so muss jeder der drei Körper, infolge seiner Inhaltsgleichheit mit den andern beiden, gleich dem dritten Teil des Rauminhaltes des gegebenen Prismas sein.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Da immer zwei Pyramiden mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen denselben Rauminhalt haben, so ist es nur nötig, den Rauminhalt einer einzigen Pyramide durch Rechnung festzustellen, um dann im stande zu sein, jede beliebige Pyramide zu berechnen. Nach den oben bewiesenen Lehrsätzen kann man jede dreiseitige Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma mit übereinstimmender Grundseite und Höhe ergänzen, dessen Rauminhalt dreimal so gross ist, wie der Rauminhalt der Pyramide selbst. Mithin erhält man den Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide, indem man das Produkt aus Grundfläche und Höhe derselben durch drei dividiert.

Auf die gleiche Weise muss man aber den Rauminhalt einer jeden beliebigen Pyramide erhalten, da zwei solche Körper mit übereinstimmenden Grundflächen und Höhen inhaltsgleich sind, mithin jede in eine dreiseitige Pyramide mit gleicher Grundfläche und übereinstimmender Höhe verwandelt werden kann.

Ein schiefabgeschnittenes, dreiseitiges Prisma ist dem Rauminhalte nach ebenso gross, wie drei Pyramiden mit derselben Grundfläche wie das dreiseitige Prisma und einer Höhe, welche den drei Seitenkanten des Prismas entspricht, wobei vorausgesetzt ist, dass die Seitenkanten des Prismas winkelrecht zur Grundfläche stehen.

Zunächst zerlege man das dreiseitige Prisma (Fig. 34) durch zwei Schnitte in drei dreiseitige Pyramiden, indem man einerseits durch A, E und C eine Ebene legt, und durch D, E und C die zweite Ebene legt, wodurch die drei dreiseitigen Pyramiden $ABCE$, $ADEC$ und $DEFC$ entstehen. Von diesen drei Pyramiden hat die eine $ABCE$, wie aus der Figur ohne weiteres zu ersehen ist, die Grundfläche ABC und in E die Spitze, folglich hat sie die eine Seitenkante BE zur Höhe. Wird die zweite Pyramide $ADEC$ mit einer Pyramide $BACD$ verglichen, welche dadurch entsteht, dass durch die drei Punkte B, C und D eine Ebene gelegt wird, so ergiebt sich deren Inhaltsgleichheit, da dieselben in der Grundfläche ACD übereinstimmen, die beiden Spitzen E und B aber in einer zu der Grundfläche parallelen Geraden EB liegen, mithin auch gleiche Höhe haben; die zweite Teilpyramide $EACD$ ist demnach ebenso gross wie eine Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche ABC und der Höhe AD. Die dritte Teilpyramide $ECDF$ endlich wird mit einer anderen dreiseitigen Pyramide verglichen, welche dadurch entsteht, dass man durch die drei Punkte B, A und F eine Ebene legt; die beiden Dreiecke ECF und BCF sind infolge ihrer Übereinstimmung in der Grundseite FC und der Höhe, als Abstand der beiden Parallelen BE und FC, inhaltsgleich, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ übereinstimmende Grundflächen, wenn man die eben genannten Dreiecke als solche ansieht. Die gegenüberliegenden Spitzen A und D liegen aber in einer zu der Fläche $BCFE$, parallelen Geraden AD, mithin haben die beiden Pyramiden $ECDF$ und $ABCF$ auch übereinstimmende Höhen, als Abstand der Geraden AD von der Ebene $BCFE$, woraus die Inhaltsgleichheit dieser Pyramide folgt. Demnach setzt sich das schiefabgeschnittene Prisma wirklich aus drei Pyramiden zusammen, welche die Grundfläche ABC gemeinschaftlich haben und deren Spitzen in den Eckpunkten D, E und F der oberen Grundfläche liegen, mithin die drei Seitenkanten AD, BE und CF zu Höhen haben.

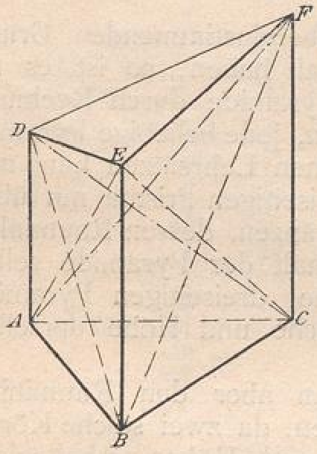

Fig. 34.

c) Der Pyramidenstumpf.

Die Mantelfläche eines Pyramidenstumpfes setzt sich aus so vielen Trapezen zusammen, wie der Stumpf Seiten hat. Ist der Pyramidenstumpf ein regelmässiger, so sind die einzelnen Seitenflächen untereinander gleich, und man hat nur nötig, den Flächeninhalt einer Seitenfläche (Trapez) mit der Anzahl der Seiten zu multiplizieren. Unter Berücksichtigung des Lehrsatzes für die Mittellinie eines Trapezes (vergl. Hoch, Ebene Geometrie Seite 52) ergiebt sich folgende Regel:

Die Mantelfläche eines geraden regelmässigen Pyramidenstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem

Umfange des mittleren Schnittes und der Seitenhöhe des Stumpfes.

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe des Rauminhalts dreier Pyramiden von der Höhe des Stumpfes, an denen die erste die grosse Grundfläche, die zweite die kleine Grundfläche und die dritte die mittlere geometrische Proporzionale aus beiden Grundflächen zur Grundfläche hat.

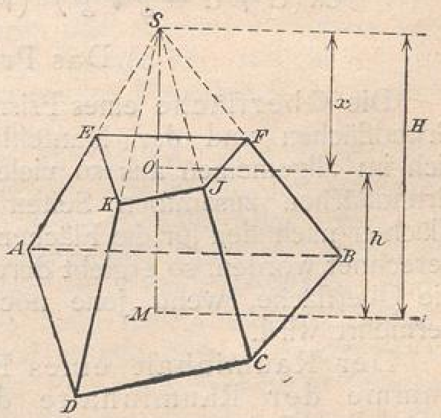

Fig. 35.

Man ergänze zunächst den gegebenen Pyramidenstumpf (Fig. 35) zu einer ganzen Pyramide, deren Höhe H sich zusammensetzt aus der Höhe h des Stumpfes und der Höhe x der Ergänzungspyramide; diese Höhe x der Ergänzungspyramide muss zunächst aus den bekannten Grössen, den beiden Grundflächen $ABCD = G$ und $EFIK = g$, sowie der Höhe h des Stumpfes berechnet werden, indem man berücksichtigt, dass bei jeder Pyramide parallele Schnitte sich verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (vergl. Seite 19).

$$G : g = (h + x)^2 : x^2$$

$$G : g = H^2 : x^2$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + x) : x$$

$$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (h + x - x) : x \text{ (vgl. Hoch, Ebene Geom. S. 55).}$$

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ergiebt sich, wenn man von dem Rauminhalt der ganzen Pyramide, denjenigen der Ergänzungspyramide abzieht, mithin:

$$I_{St} = I_P - I_E$$

$$= \frac{G \cdot H}{3} - \frac{g \cdot x}{3}$$

$$= \frac{G}{3} \cdot (h + x) - \frac{g}{3} \cdot x$$

$$= \frac{G}{3}\left(h + \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{h\sqrt{g}}\right) - \frac{g}{3} \cdot \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$=\frac{G}{3}\cdot\frac{h\cdot\sqrt{G}-h\sqrt{g}+h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}-\frac{g}{3}\cdot\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

$$=\frac{h}{3}\cdot\frac{G\cdot\sqrt{G}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

$$=\frac{h}{3}\cdot(G+\sqrt{Gg}+g)$$

da $(G\sqrt{G}-g\sqrt{g}):(\sqrt{G}-\sqrt{g})=G+\sqrt{Gg}+g$ ist.

b) Das Prismatoid.

Die Oberfläche eines Prismatoides besteht aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche; die Mantelfläche setzt sich im allgemeinen aus so vielen Dreiecken zusammen als beide Grundflächen zusammen Seiten haben. Sind diese sämtlichen Flächen nach den für die Flächenrechnung gültigen Regeln einzeln berechnet worden, so ergiebt deren Summe die Mantelfläche, bezw. die Oberfläche, wenn jene noch um die beiden Grundflächen vermehrt wird.

Der Rauminhalt eines Prismatoides ist gleich der Summe der Rauminhalte dreier Pyramiden von der Höhe des Prismatoides, von denen die erste das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen, jede der beiden anderen aber die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoides zur Grundfläche hat.

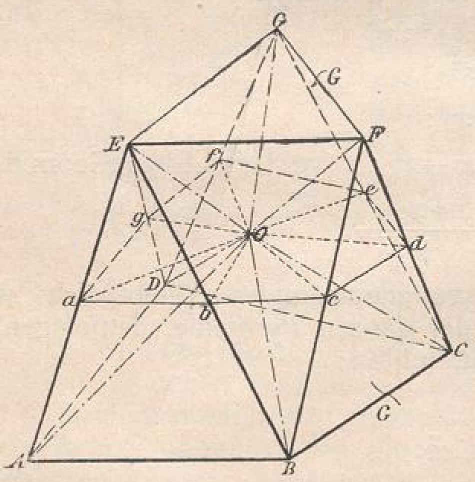

Fig. 36.

Von den beiden Grundflächen des Prismatoides habe die eine drei und die andere vier Kanten, (Fig. 36) so dass die mittlere Durchschnittsfläche M ein Siebeneck ist; die beiden Grundflächen bezeichne man der Einfachheit wegen mit G und g, die Höhe des Prismatoides aber mit h. Um den Inhalt des Prismatoides zu berechnen, wähle man in der mittleren Durchschnittsfläche einen beliebigen Punkt O, der mit sämtlichen Eckpunkten der beiden Grundflächen verbunden wird, um dann durch jede Grundflächen-Kante und den angenommenen Punkt O Ebenen zu legen, wodurch zunächst zwei Pyramiden entstehen, deren Grundflächen die Grundflächen des

Prismatoides sind, und deren Höhe gleich der halben Höhe des Prismatoides ist. Die Inhalte i und i_1 dieser beiden Pyramiden können nach dem obigen (vergleiche Seite 41) berechnet werden

$$i = \frac{G}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{G \cdot h}{6}$$

$$i_1 = \frac{g}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{g \cdot h}{6}.$$

Legt man nun noch durch je eine Seitenkante des Prismatoides und je eine Seitenkante der oberen und unteren Pyramide eine Ebene, so entstehen 7 dreiseitige Pyramiden, welche mit den beiden anderen Pramiden zusammen den Rauminhalt des Prismatoides ergeben.

Jede dieser 7 dreiseitigen Pyramiden wird durch den mittleren Schnitt in zwei Teile zerlegt, von denen der eine viermal so gross ist als der andere; denn berücksichtigt man z. B. die Pyramide $ABEO$, und betrachtet zunächst ABE als Grundfläche und O als Spitze, so wird die Grundfläche durch den mittleren Schnitt ab in zwei Teile $ABba$ und abE so geteilt, dass der erste Teil dreimal so gross ist wie der zweite Teil; mithin muss auch diejenige Pyramide, welche $ABba$ zur Grundfläche und O als Spitze hat, dreimal so gross sein wie diejenige Pyramide, die abE als Grundfläche und O als Spitze hat, oder aber die ganze Pyramide $ABEO$ (Grundfläche ABE, Spitze O) ist viermal so gross wie diejenige Pyramide $abEO$, in welcher man aber auch abO als Grundfläche und den Abstand des Punktes E von dieser Ebene als Höhe ansehen kann; dass dieser Abstand aber gleich der halben Höhe h des Prismatoides ist, ist klar, da Oab ein Teil des mittleren Schnittes ist. Führt man die gleiche Betrachtung für alle 7 dreiseitigen Pyramiden durch, so erhält man den Rauminhalt i_2, für alle zusammen das vierfache einer Pyramide, deren Grundfläche die Grösse des mittleren Schnittes ist, deren Höhe aber die halbe Höhe des Prismatoides ist, mithin

$$i_2 = 4 \cdot \frac{M}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\,Mh}{3}.$$

Durch Zusammenlegen der Rauminhalte i, i_1 und i_2 erhält man den Rauminhalt J des Prismatoides

$$I = i + i_1 + i_2$$

$$I = \frac{G \cdot h}{0} + \frac{gh}{6} + \frac{2\,Hh}{3}$$

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2\,M\right).$$

Ein Keil oder Sphenisk ist jenes Prismatoid, in welchem die eine Grundfläche als gerade Linie erscheint, die man gewöhnlich Schneide nennt; setzt man daher in die obige Formel für den Inhalt eines Prismatoides für $g = 0$ ein, so erhält man die Formel für die Berechnung eines Keiles mit

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{G}{2} + 2\,M\right).$$

2. Die runden Körper.

a) Der Cylinder.

Da jeder Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so werden alle für die Berechnung eines Prismas geltenden Regeln auch für den Cylinder Anwendung finden.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit r, die Höhe desselben aber mit h, so ergiebt sich für die Mantelfläche $M = 2\pi r h$, d. h.

der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und Höhe.

Die Oberfläche O erhält man, wenn zu der Mantelfläche die doppelte Grundfläche $G = \pi r^2$ hinzugezählt wird, d. h.

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Der Rauminhalt I eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe oder

$$I = \pi r^2 h.$$

b) Der Kegel.

Ebenso wie der Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, ebenso kann auch ein Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seiten angesehen werden, weshalb alle für eine Pyramide gültigen Regeln auch hier Anwendung finden können.

Für jeden geraden Kreiskegel besteht zwischen den drei Grössen: Halbmesser r der Grundfläche, Höhe h und Länge s der Seitenkante oder Erzeugenden des Kegels folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + r^2$$

da diese drei geraden Linien für jeden Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem der Pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet.

Um den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen, denke man sich denselben längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgerollt, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser ebenso gross ist als die Kegelkante s, während die Länge des Kreisbogens mit dem Umfange $2\pi r$ der Grundfläche übereinstimmt. Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes wird ebenso wie der Inhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $2\pi r$ und der Höhe s berechnet,

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi r s.$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist gleich dem Produkte aus Grundflächen-Halbmesser und Seite, multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dessen Mantelfläche M und Grundfläche $G = \pi r^2$ zusammen, weshalb man erhält

$$O = \pi r s \cdot + \pi^2 = \pi r (s + r) \text{ dh.}$$

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist ebenso gross wie die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit derselben Grundfläche, dessen Seitenkante gleich ist der um den Halbmesser der Grundfläche vermehrten Seitenkante des Kegels.

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe; bezeichnet man daher den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h so erhält man:

$$I = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

c) Der Kegelstumpf.

Auch für den Kegelstumpf gelten dieselben Regeln wie für den Pyramidenstrumpf unter Einführung der runden Grundflächen.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, die Höhe des geraden Kegelstumpfes mit h, die Seitenkante aber mit s, so ergiebt sich für diese vier Grössen folgende wichtige Beziehung

$$s^2 = h^2 + (R - r)^2$$

denn jeder Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten mit den Durchmessern der beiden Grundflächen übereinstimmen, während die nicht parallelen Seiten gleich den Seitenkanten sind; fällt man von dem Endpunkt der kleineren parallelen Seite in diesem gleichschenkligen Trapeze eine Winkelrechte auf die grössere parallele Seite, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seitenkante des Kegelstumpfes, dessen eine Kathete die Höhe desselben und dessen zweite Kathete der Unterschied $R - r$ der beiden Grundflächenhalbmesser ist, woraus sich unter Benutzung des Pythagoräischen Lehrsatzes obige Beziehung ergiebt.

Um die Mantelfläche eines geraden kreisförmigen Kegelstumpfes mit den Grundflächen-Halbmessern R und r und der Seitenkante s zu bestimmen, denke man sich den Kegelstumpf nach einer Seite aufgeschnitten und in eine Ebene ausgerollt, wodurch man einen Teil eines Kreisringes oder ein Bogentrapez erhält, für welches der Abstand ber beiden Kreisbogen mit der Seitenkante des Kegelstumpfes übereinstimmt und die beiden Kreisbogen ebenso gross sind, wie die Umfänge der beiden Grundflächen. Der Flächeninhalt des Bogentrapezes wird ebenso berechnet, wie der Flächeninhalt eines geradlinigen Trapezes, weshalb man erhält

$$M = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi (R + r) s$$

d. h. der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Seite des Stumpfes multipliziert mit der Ludolphschen Zahl.

Statt dem Produkte aus der Summe der beiden Grundflächenhalbmesser und der Ludolphschen Zahl kann man auch den Umfang des mittleren Schnittes setzen, sodass man auch folgende Regel erhält: der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittes multipliziert mit der Seitenkante des Stumpfes.

Die Oberfläche O des Kegelstumpfes erhält man, wenn man die Mantelfläche M und die beiden Grundflächen vermehrt d. h.

$$O = \pi (R + r) s + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Setzt man die Formel den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, die besonderen Worte für die Grundflächen eines Kegelstumpfes ein, so erhält man den Rauminhalt I desselben wie folgt:

$$I = \frac{h}{3} (G + g = \sqrt{Gg})$$

$$I = \frac{h}{3} \left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$I = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$I = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R r).$$

d) Die Kugel und deren Teile.

Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe durch Umdrehung eines regelmässigen Vieleckes um einen Durchmesser desselben entstanden. Die Oberfläche dieses so entstandenen Umdrehungskörpers wird um so mehr sich der Kugeloberfläche nähern, je grösser die Anzahl der Seiten des regelmässigen Vielecks ist, also je kleiner die Seiten selbst sind. Infolge der Umdrehung des regelmässigen Vielecks entsteht ein Umdrehungskörper, dessen Oberfläche sich aus den Mantelflächen von Kugelstumpfen zusammensetzt. Um eine Beziehung für diese Mantelflächen der Kugelstumpfe mit den Abmessungen der Kugel zu finden, greife man einen der Kugelstumpfe heraus und untersuche denselben genauer. Der halbe Achsenschnitt eines solchen Kegelstumpfes (Fig. 37) ist ein Trapez $ABED$ mit zwei rechten Winkeln. Bezeichnet man den Mantel des Kegelstumpfes, der durch Umdrehung der geraden Berührungslinie oder Vielecksseite AB gebildet wird mit m, so erhält man (vergleiche Seite 48)

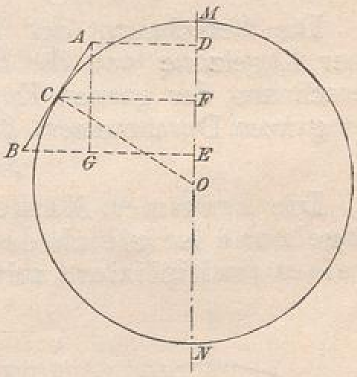

Fig. 37.

$$m = 2\pi CF \cdot AB$$

wobei CF der Halbmesser des mittleren Schnittes ist. Fällt man von A auf BE die Winkelrechte AG und verbindet C mit O, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke ABG und CFO infolge der Übereinstimmung in zwei Winkeln; deshalb haben die zugehörigen Seiten dasselbe Verhältnis.

$$AB : AG = CO : CF$$
$$AB : DE = CO : CF$$
$$AB \cdot CF = CO \cdot DE$$
$$AB \cdot CF = \;r\; \cdot DE.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel für den Mantel m ein, so erhält man

$$m = 2\pi r \cdot DE.$$

d. h. der Mantel eines solchen Teilkegelstumpfes ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der Projektion der Kegelstumpfseite auf die Umdrehungsachse. Wie aus der Betrachtung der Figur ohne weiteres hervorgeht hat man den Durchmesser $2\,r$ der Kugel für die eben erwähnte Projektion einzusetzen, wenn der Mantel m des einen Kegelstumpfes erweitert wird zu der Oberfläche O der Kugel

$$O = 2\pi r \cdot 2r \cdot = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so gross wie der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

Um den Rauminhalt I einer Kugel zu berechnen, denke man sich dieselbe in eine sehr grossen Anzahl von Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen in der Kugeloberfläche, deren Spitzen aber im Kugelmittelpunkte liegen. Diese Pyramiden haben dann alle den Halbmesser der Kugel zur Höhe, wenn man die Teilchen der Kugeloberfläche möglichst klein gewählt hat.

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil aus dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, weshalb man für die Berechnung des Rauminhaltes der ganzen Kugel nur die Kugeloberfläche O einzusetzen hat,

$$I = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Die Berechnung der Mantelfläche einer Kugelhaube oder einer Kugelzone von der Höhe h erfolgt ganz ähnlich wie die Berechnung der ganzen Kugeloberfläche, nur hat man an Stelle des ganzen Durchmessers der Kugel nur die Höhe h einzuführen.

$$M = 2\pi r \cdot h.$$

Die krummen Mantelstriche einer Kugelhaube oder Kugelzone ist gleich dem Umfange des grössten Kugelkreises multipliziert mit der Höhe.

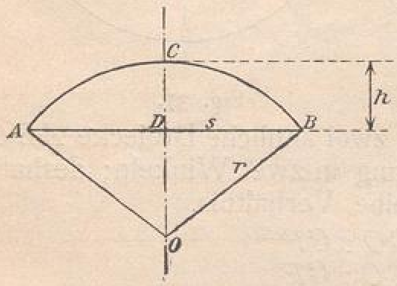

Fig. 38.

Ergänzt man eine Kugelhaube von der Höhe h durch einen Kegel (Fig. 38) dessen Grundfläche die Schnittfläche der Kugel und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so erhält man einen Kugelausschnitt. Bezeichnet man den Halbmesser desjenigen Kreises mit welchem die Kegel und die Kugelhaube zusammensetzen mit s, so besteht zwischen den drei Grössen r, h und s folgende Beziehung

$$s^2 + (r-h)^2 = r^2$$
$$s^2 + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$
$$s^2 = 2rh - h^2.$$

Soll die Oberfläche eines Kugelausschnittes berechnet werden, so muss die Mantelfläche der Kugelhaube um die Mantelfläche des Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser s und der Seitenkante r vergrössert werden.

$$O = 2\pi rh + \pi rs = \pi r\,(2h + s).$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist ähnlich zu berechnen wie der Rauminhalt einer Kugel, nur hat an die Stelle der ganzen Kugeloberfläche nur die krumme Mantelfläche M der zugehörigen Kugelhaube zu treten.

$$I = M \cdot \frac{r}{3} = 2\pi r \cdot h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes ist gleich dem Flächeninhalte des grössten Kugelkreises, multipliziert mit der zweidrittelfachen Höhe der dazugehörigen Kugelhaube.

Der **Rauminhalt** einer **Kugelhaube** (Fig. 38) ergiebt sich als Unterschied der Rauminhalte eines Kugelausschnittes und des zugehörigen Kegels mit der Höhe $r-h$.

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi s^2(r-h)}{3}$$

$$s^2=2rh-h^2$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi}{3}(2rh-h^2)(r-h)$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{\pi}{3}(2r^2h-3rh^2+h^3)$$

$$I=\frac{2}{3}\pi r^2 h-\frac{2}{3}\pi r^2 h+\pi r h^2-\frac{\pi h^3}{3}$$

$$I=\pi r h^2-\frac{\pi h^3}{3}$$

$$I=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h).$$

Der Rauminhalt einer **Kugelzone** (Fig. 39) von der Höhe h mit den Grundflächenhalbmessern s und s_1 herausgeschnitten aus einer Kugel mit dem Halbmesser r ergiebt sich als Unterschied zweier Kugelhauben mit den Höhen H und h mit

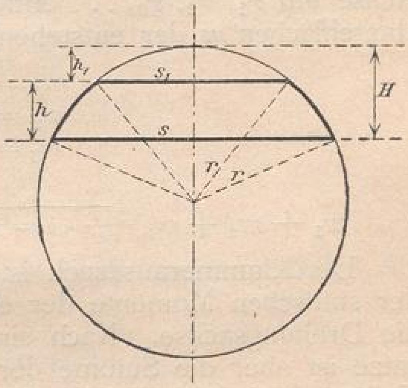

Fig. 39.

$$I=\frac{\pi H^2}{3}(3r-H)-\frac{\pi h_1^2}{3}(3r-h_1)$$

wobei zwischen den einzelnen hier in Betracht kommenden Grössen folgende Beziehungen bestehen, welche unter Berücksichtigung eines Achsenschnittes sich aus der Figur ergeben:

$$h=H-h_1$$

$$r^2=s^2-(r-H)^2$$

$$r^2=s_1^2-(r-h_1)^2$$

$$r^2=s^2-(r-H)^2=s_1^2-(r-h_1)^2$$

$$s^2-r^2+2rH-H^2=s_1^2-r^2+2rh_1-h_1^2$$

$$2r(H-h_1)=s_1^2-s^2+H^2-h_1^2$$

$$H=h+h_1$$

$$2r\cdot h=s_1^2-s^2+h^2+2hh_1.$$

e) Die Umdrehungskörper.

Wenn auch der Cylinder, Kugel, Kugelstumpf, die Kugel und einzelne Teile derselben als Umdrehungskörper angesehen werden können, so soll hier besonders der allgemeinen Umdrehungskörper gedacht werden, um die Oberfläche und den Rauminhalt derselben zu bestimmen. Bemerkt muss jedoch werden, dass eine genaue Abteilung der Formeln hier nicht stattfinden kann, weil die nötigen Unterlagen fehlen.

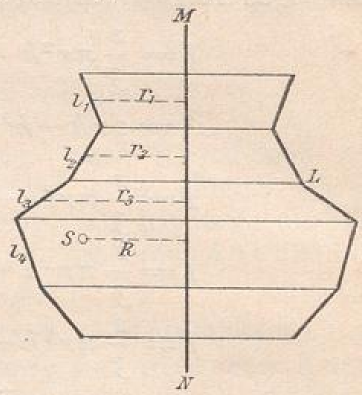

Fig. 40.

Entsteht durch Umdrehung des gebrochenen Linienzuges L, (Fig. 40) welcher aus den kleinen Teilstrecken l_1, l_2, l_3, . . . besteht um die Umdrehungsachse MN ein Körper in der Weise, dass die Mitten der einzelnen Teilstrecken von der Achse um r_1, r_2, r_3, . . . entfernt sind, so erhält man für die Mantelflächen m der entstehenden Kegelstumpfe (vergl. Seite 48)

$$m_1 = 2\pi r_1 \cdot l_1$$
$$m_2 = 2\pi r_2 \cdot l_2$$
$$m_3 = 2\pi r_3 \cdot l_3$$
$$\ldots\ \ldots$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = 2\pi\,(r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \cdots\cdot).$$

Der Klammerausdruck ist aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken, bezogen auf die Drehungsachse. Nach einem bekannten mechanischen Lehrsatze ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Teilstrecken gleich dem statischen Moment des ganzen Linienzuges L bezogen auf dieselbe Achse, weshalb man als Umdrehungshalbmesser den Abstand R des Schwerpunktes S des ganzen Linienzuges von der Umdrehungsachse zu nehmen hat.

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_2 + \cdots\cdots = LR$$
$$O = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$
$$O = 2\pi R \cdot L.$$

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich der Länge des sich drehenden Linienzuges multipliziert mit dem Umfange desjenigen Kreises den der Schwerpunkt beschreibt (I. Guldini'sche Regel.).

Um den Rauminhalt eines durch Umdrehung eines Linienzuges entstehenden Körpers zu bestimmen, versuche man zunächst die oben gegebene Regel für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes in Beziehung zu bringen zu dem Umfange desjenigen fange desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt des halben Achsenschnitt bei der Umdrehung beschreibt.

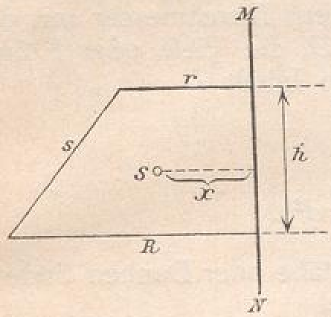

Fig. 41.

Der Rauminhalt i eines Kegelstumpfes (Fig. 41) mit den Grundflächenhalbmessern R und r und der Höhe h ist

$$i = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes S von der Umdrehungsachse MN mit x so ergiebt sich nach einem bekannten mechanischen Satze über die Lage des Schwerpunktes

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}.$$

Bezeichnet man endlich mit F den Flächeninhalt des Halbachsenschnittes, so ergiebt sich derselbe mit

$$F = \frac{R + r}{2} \cdot h$$

oder durch Einsetzung in den Wert für

$$x = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\, h}{3 \cdot 2F}$$

woraus folgt

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{6Fx}{h}$$

mithin durch Einsetzung in die Formel i für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$i = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{6Fx}{h} = 2\pi x \cdot F.$$

Der Rauminhalt dieses Kegelstumpfes wird also auch gefunden, wenn man den Flächeninhalt seines halben Achsenschnittes mit dem Umfange jenes Kreises multipliziert, den der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche beschreibt.

Erweitert man diesen Satz sinngemäss unter Anwendung entsprechender Lehrsätze aus der Mechanik, so erhält man die II. Guldini'sche Regel: Der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der erzeugenden Fläche und dem Umfange jenes Kreises, den der Schwerpunkt beschreibt.

Der Vollständigkeit wegen seien hier noch die Regeln für die Bestimmung des Rauminhaltes eines Fasses angegeben, ohne auf eine Ableitung derselben näher einzugehen. Bemerkt soll nur werden, dass je nach der Form der Mantelfläche, bezw. je nachdem dieselbe durch Umdrehung eines Kreisbogens, eines

Ellipsenbogens oder eines Parabelbogens entstanden gedacht, und eine grössere oder geringere Genauigkeit gewünscht worden ist, sich die untenstehenden verschiedenen Werte ergeben haben.

Bezeichnet man den kleinsten (Boden) Durchmesser mit d, dem grössten (Bauch) Durchmesser mit *D*, die Tiefe oder Höhe des Fasses mit *h*, so ergiebt sich für den Inhalt *I*

$$I = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$$

$$I = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2).$$

Bei sehr starken Krümmungen der Fassstäbe oder Dauben findet man den Inhalt genauer nach der Formel

$$I = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{2D + d}{3}\right)^2.$$

Räumliche Geometrie für Gewerbliche Kreise