



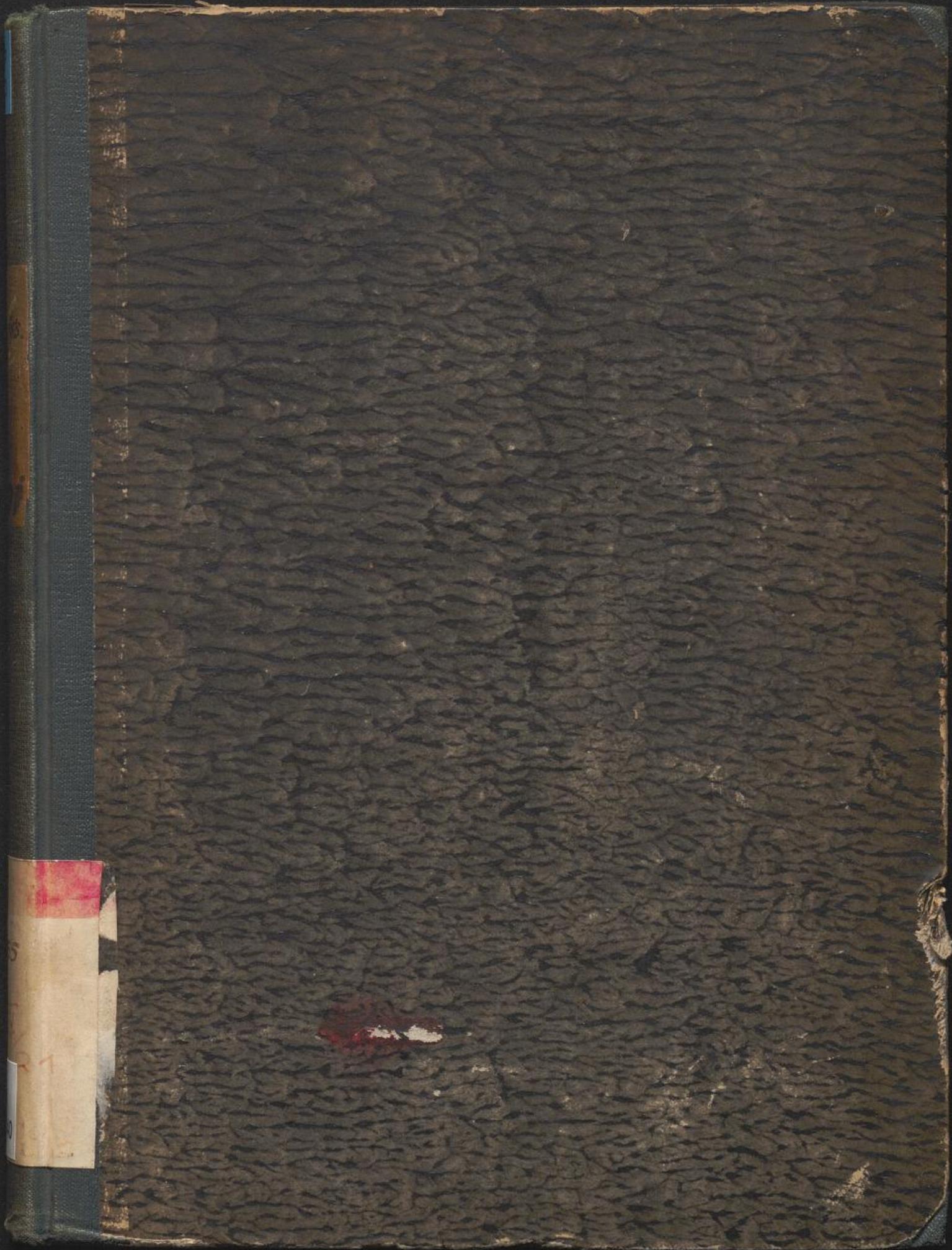
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Schattirungskunde

Riess, Karl

Stuttgart, 1871

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76877](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76877)



Fol.

Fol.





Schattirungskunde.

Anwendung der darstellenden Geometrie

auf die

Bestimmung der Beleuchtung und das Schattiren
regelmässiger Körperflächen.

Herausgegeben

von

Professor C. Riess,

Architekt, Hauptlehrer für architektonische Fächer und angewandte darstellende
Geometrie an der Königlichen Baugewerbeschule zu Stuttgart.

Mit 23 Tafeln.



Stuttgart.

Verlag von Konrad Wittwer.

1871.



Sozialwissenschaftliche

Anwendung der darstellenden Geometrie

Bestimmung der Bedeutung und des Zusammenhangs
rationaler Flächen

Herausgegeben

03

M

36340



III 28 1871

Stuttgart

Druck von Woerner & Comp. in Stuttgart.

1871

INHALTS-VERZEICHNISS.

Einleitung	Seite 7
----------------------	------------

I. Abtheilung.

§. 1. Ueber die Wirkung des Lichtes im Allgemeinen. Richtung der Lichtstrahlen, Lage gegen die Projektions-Ebene.	11
§. 2. Ueber die Helligkeit von Ebenen, welche gegen den Lichtstrahl verschiedene Neigung haben	13
§. 3. Bestimmung der Lage von Ebenen, mit gleichen Hellendifferenzen	14
§. 4. Bestimmung von Kegelflächen mit gleichen Hellen-Differenzen; Curven gleicher Helligkeit auf Flächen im Allgemeinen	14
§. 5. 6. Bestimmung der Curven gleicher Helligkeit auf der Kugel	15

Ueber die Wirkung des reflektirten Lichtes.

§. 7. 8. Von der Intensität und von der Wirkung des Reflexlichtes auf Kugelflächen	17
§. 9. Lage der Curven gleicher Helligkeit auf der unter dem Einfluss des Reflexlichtes stehenden Kugelhälfte	22
§. 10. Atmosphärischer Reflex, atmosphärischer Hauptstrahl	24
§. 11. Ueber den Einfluss des terrestrischen Reflexes	24
§. 12. 13. 14. Intensität und Wirkung des atmosphärischen Reflexlichtes auf den hellsten Punkt im Licht und Selbstschatten und auf die Schattengrenze	25
§. 15. Allgemeines Problem. Bestimmung der Wirkung des atmosphärischen Reflexlichtes auf die Helligkeit irgend eines beliebigen Punktes der Kugeloberfläche	29
§. 16. Zusammenstellung der aus § 12—15 gewonnenen Resultate	32
§. 17. Ueber die Schattirung der Kugel mit Berücksichtigung dieser Resultate	33

Ueber die durch mehrfachen Auftrag eines gleichstarken Tones erzeugte Helligkeit.

§. 18. Verhältniss der Helligkeit zur Anzahl der Tonaufträge a) nach Leroy, b) nach den vom Verfasser angestellten Versuchen.	
---	--

	Seite
Berechnung der Anzahl von Tönen für jede beliebige Helligkeit und umgekehrt	35
§. 19. Darstellung der Resultate des §. 18 auf graphischem Wege. Bestimmung der Curven gleicher Helligkeit auf der Kugel mit Berücksichtigung der gewonnenen Resultate	39
§. 20. Fortsetzung	43

Ueber den Einfluss der Intensität des Lichtes auf die Lage der Hellencurven.

§. 21. Einleitung	44
§. 22. Versuche über den Einfluss verschiedener Lichtstärken auf die Helligkeit von Ebenen, welche gegen die Lichtstrahlen verschiedene Neigung haben	45
§. 23. Resultate	46
§. 24. Die Hellencurven werden mit zunehmender Lichtintensität mehr und mehr gegen die Schattengrenze hingedrängt	47
§. 25. Gleichung zur Berechnung der aus den Versuchen §. 22 gefundenen und in §. 23 zusammengestellten Werthe von X für einfache Lichtintensität	48
§. 26. 27. 28. Entwicklung der Gleichung, zur Bestimmung der Werthe von X für jede beliebige Lichtintensität	49
§. 29. Entwicklung der Gleichung zur Bestimmung der Hellencurven auf der Kugel unter Berücksichtigung des in §. 24 ausgesprochenen Satzes	52
§. 30. Resultate, berechnet aus der Gleichung des §. 29	53
§. 31. Werthe von X für unendlich kleine und unendlich grosse Lichtintensität	54
§. 32. Berechnung der Lichtintensität, welche derjenigen Lage der Hellencurven auf der Kugel entspricht, die man erhält, bei einfacher Annahme des Satzes, dass die Helligkeiten der Hellencurven der Kugel sich verhalten, wie die Abstände der Curven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt	54
§. 33. Theilung des Kugelradius für einfache Lichtintensität	56
§. 34. Desgleichen für 16 fache Lichtintensität	56
§. 35. Desgleichen für die Normal-Kugel, welche für die Construction der im zweiten Theil dieser Abhandlung zu besprechenden Beispiele zu Grunde gelegt wurde	57
§. 36. Aufzeichnung der Normalkugel	59
§. 37. Die concave Normalkugel	61

Ueber die praktische Ausführung der zu schattirenden resp. zu tuschenden Zeichnungen.

§. 38. Tabellarische Uebersicht über die Reihenfolge, in welcher die Aufträge des Grundtones zu machen sind	62
§. 39. Rathschläge für die praktische Ausführung	64

II. Abtheilung.

Anwendung der Normalkugel auf die Bestimmung der Helligkeit jeder beliebigen nach einem mathematischen Gesetze gebildeten ebenen oder krummen Fläche.

	Seite
§. 40. Einleitung	67

A. Beleuchtung von Ebenen

§. 41. a. wenn die Ebenen senkrecht zu einer der beiden Grund-Ebenen sind,	
b. wenn die Ebene beliebige Neigung gegen die Grund-Ebenen haben	68

B. Beleuchtung krummer Flächen.

1) Cylinder und Kegelflächen.

§. 42. Einleitung	70
a. Cylinderflächen.	
§. 43. 44. Cylinder mit kreisförmigem Normalschnitt, Drehungs-Cylinder	70
§. 45. 46. Cylinderfläche mit beliebigem Querschnitt	72
§. 47. Beleuchtung hohler Cylinder	73
b. Kegelflächen.	
§. 48. 49. 50. 51. Beleuchtung von Kegelflächen mit kreisförmigem Normalschnitt, bei verschiedener Richtung der Axe gegen die Grund-Ebene	74
§. 52. Beleuchtung von Kegelflächen mit beliebiger Querschnittsform	76

2) Umdrehungsflächen.

§. 53—57. Construction der Hellencurven auf Umdrehungsflächen, deren Axe senkrecht auf der Horizontal-Ebene steht und deren Erzeugende (Meridian) eine beliebige Curve ist: Convexe und concave Wulstfläche, Wulstflächen, welche aus diesen beiden combinirt sind u. s. f.	77
§. 58. Flächen mit concaver Drehung	80
§. 59. Zusammengesetzte Drehungsflächen	81
§. 60. Beleuchtung einer Drehungsfläche, deren Axe senkrecht zur Vertikal-Ebene	81
§. 61. Wenn die Axe parallel zur Horizontal-Ebene, gegen die Vertikal-Ebene aber geneigt ist	82
§. 62. Wenn die Axe gegen beide Grund-Ebenen geneigt ist	82

3) Schraubenflächen.

	Seite
§. 63. Beleuchtung der Wendelfläche	83
§. 64. Beleuchtung der Schraubenfläche, deren Erzeugende die Schraubenaxe schräg schneidet	84
§. 65. Beleuchtung Schraubenförmig gewundener Flächen	85
§. 66. Beleuchtung der Schraubenförmigen Wulstfläche	86
§. 67. 4) Windschiefe Flächen	87

A n h a n g.

Von der Stetigkeit der Hellencurven.

§. 68. Mathematischer Nachweis über die Stetigkeit der Hellencurven auf Umdrehungsflächen	90
§. 69. Desgleichen auf beliebigen krummen Flächen	93
§. 70. Ist die Axe der Umdrehungsflächen senkrecht zur Horizontal-Ebene, so sind die betreffenden Hellencurven als die Schnitte von Cylinderflächen mit den Umdrehungsflächen zu betrachten, deren Mantellinien parallel zur Horizontal-Ebene und senkrecht zur Richtung der Lichtstrahlen sind	93
§. 71. Allgemeines Problem der Beleuchtungsconstructionen	94
§. 72. Bemerkungen zu dem auf Tafel XVI bis XXIII dargestellten Figuren	96

EINLEITUNG.

Soll das Bild eines Gegenstandes auf unser Auge denselben Eindruck machen, als ob wir denselben selbst vor uns sähen, so müssen die von dem Bild ausgehenden Lichtstrahlen unser Auge genau in derselben Richtung und Intensität treffen, wie wenn sie von dem Gegenstand selbst herkämen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn das Bild bezüglich seiner Umrisse und seiner Farbe genau nach den Regeln und Gesetzen der Linear- und Luftperspektive dargestellt ist, sei es durch unmittelbare Nachahmung (Zeichnen nach) der Natur, sei es durch Konstruktion, die freilich nur dann Anwendung finden kann, wenn es sich um die Darstellung regelmässiger nach einem bestimmten mathematischen Gesetz gestalteten Körper oder Körperflächen handelt. Da aber Körper vom mathematischer Gestalt beim technischen Zeichnen hauptsächlich vorkommen, so kann die Methode der Konstruktion hiebei auch vorzugsweise in Anwendung gebracht werden.

Handelt es sich um eine wirklich künstlerische Darstellung eines Gegenstandes, so kann freilich das Studium der Natur niemals entbehrt werden, da so manche Zufälligkeiten, als z. B. die Wirkung des Reflexlichtes, der Einfluss der Luft und der Grad ihrer Feuchtigkeit auf die Schattirung und Färbung mehr oder weniger entfernter Körper u. s. f. bei der mathematischen Konstruktion kaum in Betracht gezogen werden können, und daher stets dem künstlerischen Gefühl und Geschmack überlassen bleiben müssen. Gewiss gibt aber die im Nachstehenden beschriebene Methode die sichersten Fingerzeige über die Schattirung d. h. über die eigenthümliche Vertheilung der verschiedenen Helligkeiten auf Körperflächen und auch mit Vernachlässigung jener obengenannten Zufälligkeiten Bilder von ungemein plastischer Wirkung.

Soll irgend ein Gegenstand z. B. ein architektonisches Detail nach dieser Methode schattirt werden, so muss selbstverständlich der eigentlichen malerischen Ausführung die Construction vorangehen. Diese aber zerfällt in zwei Theile nemlich:

- 1) Die Construction der Schlagschattenumrisse und
- 2) Die Construction der Beleuchtung, d. h. die Bestimmung der in verschiedenen Elementen einer Fläche stattfindenden Helligkeiten.

Den ersten Theil setzen wir als bekannt voraus, und glauben um so mehr auf diesen Gegenstand verzichten zu dürfen, als derselbe bereits in zahlreichen Schriften behandelt ist. Dagegen wird der zweite Theil, die Construction der Beleuchtung der eigentliche Gegenstand vorliegender Abhandlung sein.

In den meisten Werken, welche bis jetzt über die Bestimmung der Beleuchtungs-Erscheinungen erschienen sind, haben sich die Verfasser darauf beschränkt, die Schattengrenze d. h. die Berührungslinie der Lichtstrahlen, die Umrisse der Schlagschatten, etwa auch noch die hellsten Punkte und Linien zu bestimmen. Manche giengen noch einen Schritt weiter und versuchten auch die den einzelnen Flächenelementen zukommenden Helligkeiten zu bestimmen, und durch Verbindung der Punkte von gleicher Helligkeit auf krummen Flächen Curven gleicher Helligkeit zu erhalten, mittelst deren sodann die Schattirung der Körper ohne grosse Schwierigkeit auszuführen war. Die Einen, welche die Construction der Kurven auf dem Wege der deskriptiven Geometrie zu erhalten versuchten, kamen meist auf schwierige und zeitraubende Constructionen; Andere, welche den Weg des Calculs einschlugen, wie Leroy und andere, mussten schliesslich selbst zugestehen, dass die von ihnen gefundenen Resultate wegen der Schwierigkeit der Entwicklung der Integralformen, selbst bei der Anwendung auf die allereinfachsten Flächen, für die Praxis nicht zu gebrauchen seien.

Die erste Schrift, welche diesen Gegenstand behandelt, und in welcher ein wirklich praktisches und sehr einfaches Verfahren dargethan ist, die Beleuchtung von regelmässigen Körperflächen zu construiren, ist die dem Festprogramme der polytechnischen Schule zu Stuttgart am 27. Septemb. 1855 von Professor J. von Egle, jetzt Oberbaurath, königl. Hofbaumeister und Vorstand der königl. Baugewerkeschule, beigefügte vortreffliche Abhandlung, in welcher in gedrängter Kürze das Verfahren beschrieben und die Begründung desselben nachgewiesen ist. Dieses Verfahren, das von Egle in der polytechnischen Schule vor ca. 20 Jahren eingeführt und gelehrt wurde, und dort sowie auch an der Baugewerkeschule bis heute mit dem besten Erfolg angewendet wird, beruht auf der Anwendung der Nor-

normalkugel, d. h. der durch ihre Projektionen dargestellten Kugelfläche, in welchen die Curven gleicher Helligkeit eingezeichnet sind. Diese Normalkugel bildet dann gleichsam den Massstab zur Beurtheilung der Helligkeit jedes beliebigen Flächenelementes.

Auch im vorliegenden Werke ist dieses Verfahren beibehalten: Dagegen hat die Theorie der Beleuchtungsconstructionen eine wesentliche Erweiterung dadurch erfahren, dass die Wirkung des Reflexlichtes namentlich des atmosphärischen Reflexes vom Verfasser einer eingehenden Untersuchung unterworfen, und dass auch der Intensität des Lichtes bei der Beleuchtung der Körper, die bis jetzt ganz ausser Acht blieb, Rechnung getragen wurde. Während man nemlich von dem physikalischen Gesetz ausging, dass die Helligkeiten von Ebenen zu den Cosinussen der Einfallswinkel der Lichtstrahlen im direkten Verhältniss stehen, welchem Satze zufolge die Lichtcurven-Ebenen der Kugel gleiche gegenseitige Abstände erhalten, hat der Verfasser durch photometrische Versuche nachgewiesen, dass dieses Gesetz für die Beleuchtung natürlicher matter Flächen nicht in seinem vollen Umfang gilt, und zugleich eine auf diese Versuche basirte Gleichung gefunden, vermöge deren man im Stande ist, die Abstände der Lichtcurven-Ebenen der Kugel vom Mittelpunkt derselben für jede beliebige Lichtintensität zu bestimmen. Demzufolge findet ein Zurückweichen der Lichtcurven gegen die Schattengrenze statt, wodurch eine der natürlichen Beleuchtung viel näher kommende Schattirung der Körperflächen erzielt wird.

Ein weiteres Werk von F. Tilscher, Wien 1862, das speciell von den Beleuchtungsconstructionen handelt, fasst die Aufgabe zu allgemein, wodurch die Lösungen in den meisten Fällen umständlich, zeitraubend und complicirt werden. Es ist dort nemlich von der Anwendung der Kugel Umgang genommen, und werden, ausgehend von dem allgemeinen Problem: „diejenigen Punkte einer Fläche zu finden, in welchen die Berührungsebenen mit einer gegebenen Linienrichtung (den Lichtstrahlen) gleiche Winkel einschliessen“, eben diese Winkel construirt und die ihnen entsprechenden Helligkeiten gesucht.

Der Vorwurf, der unter anderem von Tilscher der Anwendung der Kugel gemacht wird, ist der, dass dieselbe nur für die eine Richtung des Lichtstrahls, für welche die Hellencurven construirt sind, zu gebrauchen sei. Das ist allerdings wahr. Da jedoch fast ohne Ausnahme, (wie Tilscher in seinem Werke pag. 38 selbst sagt) beim Schattiren technischer Gegenstände den Lichtstrahlen eine bestimmte, conventionelle Richtung zuertheilt wird, so reicht man weitaus in den meisten Fällen mit der einmal für diese Richtung des Lichtes construirte Normalkugel aus. Ausserdem ist die Konstruktion der Hellencurven der Kugel weder schwierig noch zeitraubend, so dass es sich, wenn je eine andere Richtung der Lichtstrahlen nothwendig werden sollte, wohl der Mühe lohnt, eine Normalkugel zu construiren, um so mehr als man, auch wenn die

zu schattirenden Zeichnungen in grossem Massstab aufgetragen sind, mit 4 höchstens 5 Hellencurven ausreicht.

Dass die Beleuchtungsconstruktionen mit Hülfe der Kugel in der That einfach genug sind, um auch von weniger fähigen Schülern verstanden zu werden, davon hat sich der Verfasser vorliegenden Werkchens seit 10 Jahren, während deren er den Unterricht in der angewandten darstellenden Geometrie an der hiesigen Baugewerkeschule ertheilt, hinreichend zu überzeugen Gelegenheit gehabt.

[The following text is extremely faint and largely illegible due to fading and bleed-through from the reverse side of the page. It appears to be a continuation of the author's preface or a technical introduction.]

I. Abtheilung *).

§. 1.

Die Lichtstrahlen verbreiten sich, so lange sie sich in einem Medium von gleicher Dichtigkeit bewegen, bekanntlich in geradliniger Richtung von der Lichtquelle aus nach allen Seiten hin.

Ist demnach die Lichtquelle z. B. ein leuchtender Punkt A (Fig. 1. Tafel I.) so ergibt sich daraus unmittelbar, dass die einen Körper ac erleuchtenden Lichtstrahlen innerhalb eines Kegels liegen, dessen Spitze im Punkt A liegt und dessen Mantellinien den Körper ac berühren. Die Berührungslinie abcd ist die Schattengrenze und der Schnitt a'b'c'd' des Kegelmantels mit der Fläche F ist der Schlagschattenumriss des Körpers ac auf F.

Ist die Lichtquelle ein leuchtender Körper, so ist jedes Element seiner Oberfläche als ein leuchtender Punkt zu betrachten; die Wirkung eines jeden derselben wird die nemliche sein, wie die des Punktes A, nur mit dem Unterschied, dass sich für jeden einzelnen Lichtpunkt die Lage des Schlagschattens auf der Fläche F und die Berührungslinie des betreffenden Lichtkegels am Körper ac also die betreffende Schattengrenze ändert.

*) Für solche Leser, welche den in dieser I. Abtheilung vorkommenden mathematischen Entwicklungen etwa nicht zu folgen im Stande sind, sei hiemit bemerkt, dass sie die betreffenden Paragraphen überschlagen und ohne desshalb dem Zusammenhang des Ganzen zu schaden, folgende Paragraphen verfolgen können:

§. 1—6, §. 7 Eingang, §. 10, 11, 17, 21 (22, 23, 24) 33, §. 35. Schluss, §. 36, 37, 38, 39.

Die Gesamtheit dieser Einzelwirkungen bringt die Erscheinung des Kernschattens und Halbschattens hervor, deren Bestimmung durch Construction zwar nicht unmöglich, aber immerhin sehr umständlich wäre.

Denken wir uns den leuchtenden Körper in sehr bedeutender Entfernung vom beleuchteten Gegenstand befindlich, diesen aber im Verhältniss zu jener Entfernung sehr klein, so wird der Unterschied in der Richtung der Lichtstrahlen sehr klein. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn wir uns irgend einen Gegenstand durch die Sonne beleuchtet denken; denn die Dimensionen der Körper auf unserer Erde sind im Vergleich zu ihrer Entfernung von der Sonne so verschwindend klein, dass wir die einen solchen Körper treffenden Sonnenstrahlen ohne Fehler unter sich parallel annehmen können. Beträgt ja doch derjenige Winkel, den zwei von einem Punkt der Sonne nach den beiden Polen der Erde gehende Lichtstrahlen einschliessen, nur ungefähr 17 Sekunden, ein Winkel von solcher Kleinheit, dass er für das praktische Zeichnen keinen Werth mehr hat.

Der scheinbare Durchmesser der Sonnenscheibe beträgt ungefähr 32 Minuten; denken wir uns von dem äussersten Rande der Sonnenscheibe S (Fig. 2. Taf. I.) zwei Lichtstrahlen ac und bd gezogen, welche den sphärischen Körper F in a und b berühren, und ist r der Krümmungshalbmesser in dem Theil ab der Oberfläche, so ist

$$\sphericalangle aob = \sphericalangle cad = 0^{\circ}32'$$

und wegen der Kleinheit dieses Winkels

$$\text{arc. } ab = r \cdot \text{tg. } 0^{\circ}32' = \frac{r}{107}$$

d. h. auf einem auf unserer Erde befindlichen von der Sonne erleuchteten Körper beträgt die Breite der vom Halbschatten eingenommenen Zone den 107. Theil des Krümmungshalbmessers. Auch der Umstand, dass die Sonne kein leuchtender Punkt ist, sondern als eine leuchtende Fläche zu betrachten ist, hat demnach ebensowenig einen wesentlichen Einfluss auf die Richtung der Lichtstrahlen und die Form der Schatten.

Wir werden nun im folgenden für unsere Constructionen stets parallele Lichtstrahlen annehmen, und so in der Beleuchtung von Flächen und Körpern eine Wirkung hervorbringen, die der durch das Sonnenlicht bewirkten ähnlich ist. Diese Annahme hat ausserdem noch den Vortheil, dass die Constructionen wesentlich einfacher und leichter auszuführen sind, als dies bei nicht parallelen, von einem näher liegenden Centrum ausgehenden Lichtstrahlen der Fall ist.

Die Richtung der Lichtstrahlen, beziehungsweise ihre Lage gegen die Projektions-Ebenen, ist zwar ganz beliebig, man nimmt jedoch fast allgemein beim Schattiren architektonischer oder gewerblicher Gegenstände diese Richtung so, dass die Projektionen der Lichtstrahlen mit dem Grundschnitt (Axe) Winkel von 45° einschliessen,

weil man auf diese Weise erfahrungsmässig die schönsten und deutlichsten Bilder erhält. Wir werden im folgenden ebenfalls, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, stets diese Richtung der Lichtstrahlen voraussetzen.

§. 2.

Es sei AB (Fig. 3. Taf. I.) die H. Proj. und das Rechteck $A'B'$ die V. Proj. einer Ebene, die von den Lichtstrahlen L senkrecht getroffen wird; die Masse der auf die Flächeneinheit treffenden Lichtstrahlen sei durch m , und die Intensität des Lichtes durch f ausgedrückt, bezeichnen wir ferner die Höhe des Rechtecks ($AB, A'B'$) mit h , so ist die Gesamtmasse der dieses Rechteck treffenden Lichtstrahlen $= AB \cdot h \cdot m$ und die Helligkeit H ausgedrückt durch

$$H = AB \cdot h \cdot m \cdot f.$$

Bringen wir das Rechteck durch Drehung um die senkrechte Kante ($A, A'A''$) in die Lage AC , so wird es von einer Lichtmasse getroffen, die sich zu der vorigen verhält wie der normale Querschnitt $AC \cdot h$ des betreffenden Lichtprismas zu dem Querschnitt $AB \cdot h$, folglich ist die Helligkeit H' des Rechtecks ($AB, A'B'$) wenn es in die Lage AC gebracht wird

$$H' = Ac \cdot h \cdot m \cdot f.$$

Ebenso ist auch die Helligkeit H'' des Rechtecks in der Lage AD

$$H'' = Ad \cdot h \cdot m \cdot f.$$

Es verhält sich demnach

$$\begin{aligned} H' : H'' &= Ac \cdot h \cdot m \cdot f : Ad \cdot h \cdot m \cdot f \\ &= Ac : Ad. \end{aligned}$$

Nun ist aber $Ac = AC \cdot \cos CAB = AB \cdot \cos CAB$
 $Ad = AD \cdot \cos DAB = AB \cdot \cos DAB$;

folglich

$$\begin{aligned} H' : H'' &= AB \cdot \cos CAB : AB \cdot \cos DAB \\ &= \cos CAB : \cos DAB. \end{aligned}$$

Ist ef parallel zur Richtung der Lichtstrahlen und fg senkrecht auf AC , so ist der Winkel efg der Einfallswinkel des Lichts gegen die Ebene AC ; dieser Winkel, den wir mit φ bezeichnen wollen, ist gleich dem Winkel CAB ; ebenso ist der Einfallswinkel des Lichts gegen die Ebene DA gleich dem Winkel DAB ; bezeichnen wir diesen Winkel mit φ' , so ist

$$H' : H'' = \cos \varphi : \cos \varphi';$$

d. h.: die Helligkeiten von Ebenen, welche gegen die Lichtstrahlen verschiedene Richtungen haben, verhalten sich wie die Cosinusse der Einfallswinkel.

§. 3.

Durch den im §. 2 ausgesprochenen Satz sind wir in den Stand gesetzt die Lagen von Ebenen beliebiger Helligkeit, also auch von Ebenen zu bestimmen, deren Helligkeiten stetig abnehmen, d. h. deren Hellendifferenzen gleich sind. Gesetzt, wir sollten die Lagen von Ebenen angeben, deren Helligkeit je um $\frac{1}{6}$ abnimmt, so hätten wir, wenn AB (Fig. 4. Taf. I.) diejenige Lage einer Ebene ist, in welcher sie von den Lichtstrahlen senkrecht getroffen wird, mit AB einen Kreis zu beschreiben, AB in 6 gleiche Theile zu theilen, durch die Theilpunkte c, d, e, f, g die Linien cC, dD, eE, fF, gG parallel zur Richtung der Lichtstrahlen zu ziehen bis zum Durchschnitt mit dem Kreise und die Schnittpunkte C, D, E, F, G, H mit dem Punkt A zu verbinden. Bringt man nun die Ebene AB nach einander in die Lage AC, AD, AE... so verhalten sich die Helligkeiten derselben in diesen verschiedenen Lagen wie die Längen AB:Ac:Ad:Ae:Af:Ag oder wie $\frac{6}{6} : \frac{5}{6} : \frac{4}{6} : \frac{3}{6} : \frac{2}{6} : \frac{1}{6}$, und die Hellendifferenz ist daher je $\frac{1}{6}$.

Der Einfallswinkel des Lichtstrahls gegen die Ebene AB ist $= 0^\circ$, der gegen die Ebene AH $= 90^\circ$; nun ist aber $\cos 0^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$, folglich die Helligkeit der Ebene AB $= 1$, und die von AH $= 0$. Die Helligkeit $= 1$ ist die grösste, da $\cos \varphi$ niemals grösser als 1 werden kann; es ist diejenige Helligkeit, welche durch senkrecht auffallende Lichtstrahlen erzeugt wird.

§. 4.

Die Helligkeit H' der Ebene AC (Fig. 5. Taf. I.) verhält sich, wie im Vorhergehenden nachgewiesen, zur Helligkeit H'' der Ebene AB.

$$\begin{aligned} H' : H'' &= 1 : \cos CAB \\ &= 1 : \cos dfg \\ &= AB : Ac \end{aligned}$$

Ist daher z. B. $Ac = \frac{2}{3} AB$, so ist auch die Helligkeit der Ebene AC

$\frac{2}{3}$ von der, welche die Ebene AB hat; ebenso ist die Helligkeit der Ebene AG $= \frac{1}{3}$, wenn Ad $= \frac{1}{3} AB$ ist.

Drehen wir die Ebene AC um die mit den Lichtstrahlen parallele Gerade AD als Axe so, dass sie mit dieser stets den Winkel CAD einschliesst, so erzeugt sie bei dieser Drehung eine Kegelfläche CAE, die sie fortwährend berührt, und die daher auch durchweg gleiche Helligkeit nemlich die Helligkeit der Ebene AC haben muss. Ist daher die Helligkeit

der Ebene $AC = \frac{2}{3}$, so ist auch die Helligkeit der Kegelfläche $AEC = \frac{2}{3}$.

Ebenso ist die Helligkeit der durch Drehung der Ebene AD entstandenen Kegelfläche AGF gleich der Helligkeit der Ebene $AD = \frac{1}{3}$ u. s. f. Dass man sich auf diese Weise Kegelflächen von jeder beliebigen Helligkeit verschaffen könnte, ist selbstverständlich.

Berührt eine Ebene eine krumme Fläche, sei es in einem Punkt, sei es in einer geraden oder krummen Linie, so hat die Fläche in dem Berührungspunkt oder längs der Berührungslinie stets dieselbe Helligkeit, wie die Berührungsebene. Dasselbe gilt auch für sich berührende krumme Flächen. Wir sind daher mit Hilfe obiger Kegelflächen im Stande, die Helligkeit eines beliebigen Punktes a einer krummen Fläche zu bestimmen, wenn wir an die Fläche im Punkt a eine Berührungs-Ebene und parallel mit ihr durch die gemeinschaftliche Kegelspitze eine zweite Ebene legen; die von letzterer berührte Kegelfläche, die wir mit K bezeichnen wollen, ergibt, wie leicht einzusehen, die Helligkeit des Punktes a .

Ausser dem Punkt a wird aber auch jeder andere Punkt $b, c, d \dots$ einer krummen Fläche, an welchen eine Berührungs-Ebene gelegt werden kann, die zugleich an der Kegelfläche K eine parallele Berührungs-Ebene zulässt, die gleiche Helligkeit haben. Die Punkte $a, b, c, d \dots$ bilden auf stetig gekrümmten Flächen immer stetige Curven, deren Form und Lage von der Gestalt der Fläche selbst abhängt. Diese Curven, längs deren die Helligkeit einer Fläche durchweg dieselbe ist, nennen wir Curven gleicher Helligkeit oder kurz Helligkeitscurven.

§. 5.

Obgleich nun die Bestimmung der Helligkeitscurven mit Hilfe der im vorigen §. beschriebenen Kegelflächen stets möglich sein wird, macht man von diesem Verfahren doch nur ausnahmsweise Gebrauch, da es in den meisten Fällen zu schwierigen und zeitraubenden Constructionen führt. Man wird zu diesem Zwecke besser eine Kugel wählen, weil auf einer solchen überhaupt jede irgend mögliche Helligkeit vorkommen muss. Sind die Helligkeiten für alle Punkte einer Kugeloberfläche bestimmt, so dient sie uns ebenso als Massstab zur Bestimmung der Helligkeit jedes beliebigen Flächenpunktes, wie ein Längenmassstab für lineare Dimensionen. Es wird sich demnach zunächst darum handeln, zu bestimmen, in welcher Art die Helligkeiten sich auf der Kugel verbreiten und wie die Helligkeitscurven auf derselben zu verzeichnen sind.

Es sei L (Fig. 6. Taf. I.) die Richtung des Lichts, F eine Kugel-
fläche. Der Punkt a der Kugel hat bekanntlich dieselbe Helligkeit wie

die Berührungs-Ebene mn ; diese Helligkeit H ist aber nach §. 2. $H = \cos . eaf$. Der Winkel eaf (der Einfallswinkel des Lichtstrahls) ist aber $= \sphericalangle adb$, folglich ist auch

$$H = \cos . adb.$$

Aus demselben Grund ist auch die Helligkeit H' des Punktes t

$$H' = \cos . tdb$$

und wir können demnach schreiben

$$H : H' = \cos . adb : \cos . tdb$$

oder wenn wir die rechte Seite der Gleichung mit dem Radius R der Kugel multipliciren

$$\begin{aligned} H : H' &= R . \cos . adb : R . \cos . tdb . \\ &= dc : du \end{aligned}$$

Die Berührungs-Ebene mn schneidet in ihrer Erweiterung die mit L parallele Linie dg in r ; drehen wir sie um die Achse dg , so dass sie stets durch den Punkt r geht und zugleich die Kugel berührt, so ändert sie während dieser Drehung ihre Helligkeit nicht; da aber die Berührungspunkte an der Kugel dieselbe Helligkeit haben, wie die berührende Ebene, so ist auch in diesen die Helligkeit durchweg gleich. Alle in diesem Falle möglichen Berührungspunkte liegen aber im Kreis ak , welcher demzufolge eine Curve gleicher Helligkeit ist, dasselbe gilt auch vom Kreis tw . Die Helligkeiten dieser Kreise verhalten sich nun wie die der Punkte a und t , d. h. wie $dc : du$ oder wie die Abstände ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt.

Dass die Ebenen der Kreise gleicher Helligkeit auf der Kugel stets senkrecht zu dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius stehen, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst.

Im Punkt b , in welchem die Kugel vom Lichtstrahl senkrecht getroffen wird, ist der Einfallswinkel des Lichtstrahls $= 0$, folglich $\cos . \varphi = \cos 0^\circ = 1$ und daher hier die Helligkeit am grössten. Der Punkt a ist der hellste Punkt der Kugel.

Die Berührungs-Ebene am Punkt h der Kugel ist parallel zum Lichtstrahl, der Einfallswinkel φ ist $= 90^\circ$ und da $\cos 90^\circ = 0$, so ist die Helligkeit im Kreis hi , d. in der Schattengrenze $= 0$.

§. 6.

Da die Helligkeiten der Hellencurven auf der Kugel den Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt proportional sind, so müssen nothwendig für gleiche Helligkeitsdifferenzen derselben auch die Differenzen ihrer gegenseitigen Abstände gleich sein.

Theilt man demnach den mit dem Lichtstrahl parallelen Radius ab (Fig. 7.

Taf. I.) (in eine beliebige Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile und legt durch die Theilpunkte a, c, d, e Ebenen senkrecht zu ab, so sind die durch diese Ebenen erzeugten Schnittkreise 1.1, 2.2, 3.3, 4.4 Kreise gleicher Helligkeit, deren Intensitäten sich verhalten wie $ab : ae : ad : ac$ oder wie $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} : \frac{2}{4} : \frac{1}{4}$; die Hellendifferenz beträgt daher je $\frac{1}{4}$.

Wollte man die Schattirung der Kugel wirklich ausführen, so müsste man einen Tushton so wählen, wie er für die Dunkelheit der Schattengrenze geeignet erscheint; lässt man zugleich die Helligkeit des weissen Papiers als diejenige des hellsten Punktes gelten, so müsste jener Ton so verdünnt werden, dass er nach einmaligem Auftrag die Helligkeit $\frac{1}{4}$ u. s. f. und nach viermaligem Auftrag wieder die ursprüngliche Dunkelheit der Schattengrenze gäbe, alsdann die Kugeloberfläche vom Kreis 44 bis zum Kreis 11 einmal, bis zum Kreis 22 zweimal, bis zum Kreis 33 dreimal und bis zum Kreis 44 viermal damit anlegen. Dass die Körper in der Natur auf der vom Licht abgewandten, also auf der Schattenseite bis zur Schattengrenze nicht absolut dunkel oder schwarz sind, ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt. Es ist dies eine Folge der Wirkung des Reflexlichtes, dessen Einfluss auf die Helligkeit der im Selbst- und Schlagschatten befindlichen Theile der Körper in den folgenden Paragraphen speciell nachgewiesen werden soll.

Die scharfen Uebergänge oder Abstufungen von einer Tuschlage zur andern lassen sich theils dadurch vermeiden, dass man sie nach den helleren Stellen hin allmählig verwascht oder dadurch, dass man statt 4 Hellencurven deren mehrere 6, 8 oder 10 und also ebensoviele Tonlagen annimmt. Dass man aber mit 4, höchstens 6 Lichtcurven in den meisten Fällen ausreicht, werden wir später sehen.

Ueber die Wirkung des Reflexlichtes.

§. 7.

Alle Körper, sowohl die festen als auch die tropfbar- oder elastisch-flüssigen: das Wasser, die Wolken, die Luft u. s. f. haben die Eigenschaft, dass sie das von irgend einer Lichtquelle, z. B. von der Sonne empfangene Licht mehr oder weniger vollständig wieder zurück werfen, reflektiren. Ohne die Existenz dieses reflektirten Lichtes müssten nothwendig alle diejenigen Theile einer Fläche oder eines Körpers, welche von den unmittelbar von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen nicht getroffen werden, absolut dunkel, für unser Auge u. s. w. nicht sichtbar sein; durch die reflektirten Lichtstrahlen werden aber auch diese Flächen- und Körpertheile noch hinlänglich beleuchtet, um von unserem Auge deutlich wahrgenommen werden zu können.

Es ist ein bekanntes physikalisches Gesetz, dass der Einfallswinkel eines Lichtstrahls dem Reflexionswinkel gleich ist. Wenn demnach eine Fläche MN (Fig. 8. Taf. I.) von einem Lichtstrahl la im Punkt a getroffen wird, so halbirt die Normale ab den Winkel lab', welchen der einfallende Lichtstrahl l und der reflektirte l' einschliessen.

Betrachten wir (Fig. 9. Taf. I.) den Kreis gafw als einen zur Horizontalebene senkrecht stehenden Cylinder, dessen Oberfläche gaf von den aus der Richtung L herkommenden parallelen Lichtstrahlen beleuchtet wird. Ist die Höhe des Cylinders = h, so ist die Lichtmasse, welche die Fläche abedef des Cylinders trifft = a' f' . h . m = r . h . m (da a' f' = a'' f = r); wenn man mit m die auf die Flächeneinheit treffende Lichtmasse bezeichnet.

Denken wir uns diese Lichtmasse in gleichen Abständen a'b', b'c', c'd', ... = $\frac{r}{p}$ durch die Ebenen bb', cc', dd', ... in gleiche Lichtmassen abgetheilt, so werden offenbar die Cylinderflächenstücke ab, bc, cd ... von gleichen Lichtmassen $\frac{r}{p} . h . m = \frac{M}{p}$ getroffen. Ist nun die Cylinderoberfläche vollkommen polirt, reflektirt sie also alle Lichtstrahlen vollkommen und regelmässig, so wird die auf ab fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum a''abb'', die auf bc fallende der vorigen gleichen Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum b''bcc'', ferner die auf cd fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum c''cdd'' u. s. f. reflektirt. Verlängert man die Linien bb'', cc'', dd'' ... rückwärts, bis sie sich schneiden, so können wir uns die einzelnen reflektirten Lichtbüschel von den Axen h, m, n ... der Cylinderausschnitte a''hb'', b''mc'', c''nd'' ... ausgehend denken. Da aber die in diesen Räumen liegenden Reflexlichtmassen für alle dieselben, nemlich = $\frac{M}{p}$ ist, so müssen die denselben entsprechenden Lichtintensitäten offenbar im umgekehrten Verhältniss zu den in gleichen Abständen von den Axen h, m, n ... genommenen Durchschnitten, oder da die Höhe für alle Cylindersektoren dieselbe ist, im umgekehrten Verhältniss zu den Bögen a''b'', b''c'', c''d'' ... stehen.

Der geometrische Ort für die Axen der Cylindersektoren ist die aus dem gegenseitigen Schnitt der Reflexstrahlen b''b, c''c, d''d ... leicht zu construierende Curve hmnop ... f; schneidet man von den Berührungspunkten aus auf den diese Curve berührenden Strahlen gleiche Stücke (z. B. = a''b) ab, so ist die daraus hervorgehende Curve a''b''c''d''e''f'' als die Spur einer Cylinderfläche zu betrachten, dessen durch die Reflexstrahlen erzeugten Helligkeiten in den einzelnen Theilen sich verhalten, wie die Masse der dieselben treffenden Lichtstrahlen, oder die durch das Reflexlicht erzeugten Helligkeiten stehen in umgekehrtem Verhältniss

zu den Bögen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$... da sie von gleichen Lichtmassen erhellt werden.

Die Lichtintensitäten in den einzelnen Ausschnitten sind daher:

$$\left. \begin{aligned} S' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc. } a''b''} \\ S'' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc. } b''c''} \\ S''' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc. } c''d''} \end{aligned} \right\} \dots 1)$$

und es verhält sich demnach

$$S' : S'' : S''' = \frac{1}{\text{arc. } a''b''} : \frac{1}{\text{arc. } b''c''} : \frac{1}{\text{arc. } c''d''} \dots 2)$$

Die Curve $a''b''c''d''$... nimmt um so mehr die Form eines aus dem Mittelpunkt a beschriebenen Kreises an, je grösser man die Längen $a''h$, $b''m$, $c''n$... macht. Nehmen wir nun die Entfernung $a''h$ u. s. f. sehr gross und den Halbmesser des Cylinders K sehr klein, so wird die Curve $a''b''c''d''e''f''$ ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt in a'' , die Curve $hmnop$... aber wird mit dem Punkt a'' zusammenfallen, und die Reflexstrahlen aa'' , bb'' , cc'' ... von dem Mittelpunkt a'' herzukommen scheinen. Für diesen Fall ist dann aber

$$\text{arc. } a''b'' = 2 \cdot \text{arc. } ab$$

denn es ist $\sphericalangle a''hb'' = b''bb'' = 2 \cdot \varphi = 2 \cdot \sphericalangle a''ab$; ferner

$$\text{arc. } a''c'' = 2 \cdot \text{arc. } ac$$

$$\text{arc. } a''d'' = 2 \cdot \text{arc. } ad$$

oder

$$\text{arc. } a''b'' = 2 \cdot \text{arc. } ab$$

$$\text{arc. } b''c'' = \text{arc. } a''c'' - \text{arc. } a''b'' = 2(\text{arc. } ac - \text{arc. } ab)$$

$$\text{arc. } c''d'' = \text{arc. } a''d'' - \text{arc. } a''c'' = 2(\text{arc. } ad - \text{arc. } ac)$$

Nun ist aber $\text{arc. } ab$ derjenige Bogen, dessen $\sin = a'b'$ folglich

$$\text{arc. } ab = \text{arc. } \sin a'b'$$

$$\text{arc. } ac = \text{arc. } \sin a'e'$$

$$\text{arc. } ad = \text{arc. } \sin a'd'$$

und daher

$$\text{arc. } a''b'' = 2 \cdot \text{arc. } \sin a'b'$$

$$\text{arc. } b''c'' = 2(\text{arcsin } a'e' - \text{arcsin } a'b')$$

$$\text{arc. } c''d'' = 2(\text{arcsin } a'd' - \text{arcsin } a'e')$$

oder, da $a'b' = \frac{1}{p} \cdot r$; $a'e' = \frac{2}{p} \cdot r$; $a'd' = \frac{3}{p} \cdot r$,

so ist: $\text{arc} \cdot a''b'' = 2 \cdot \text{arcsin} \frac{1}{p} \cdot r$

$$\text{arc} \cdot b''e'' = 2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{2}{p} \cdot r - \text{arcsin} \frac{1}{p} \cdot r \right)$$

$$\text{arc} \cdot c''d'' = 2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{3}{p} \cdot r - \text{arcsin} \frac{2}{p} \cdot r \right)$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 1), so ist

$$S' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \text{arcsin} \frac{r}{p}}$$

$$S'' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{2}{p} \cdot r - \text{arcsin} \frac{1}{p} \cdot r \right)}$$

$$S''' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{3}{p} \cdot r - \text{arcsin} \frac{2}{p} \cdot r \right)}$$

oder allgemein

$$S = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{n+1}{p} \cdot r - \text{arcsin} \frac{n}{p} \cdot r \right)}$$

der Coefficient $\frac{M}{p} = \frac{1}{p} \cdot r \cdot h \cdot m$ ist offenbar abhängig von der Intensität

des direkten Lichtes L; setzen wir ihn gleich F und den Radius $r = 1$ so ist

$$S = F \frac{1}{2 \cdot \left(\text{arcsin} \frac{n+1}{p} - \text{arcsin} \frac{n}{p} \right)} \dots 3)$$

worin p jede beliebige ganze Zahl bedeutet und n jeden Werth von 0 bis p annehmen kann. Nimmt man p sehr gross, so nähert sich der

Ausdruck $\left(\arcsin \frac{n+1}{p} - \arcsin \frac{n}{p} \right)$ der Grenze

$$\lim \cdot \frac{\arcsin(x + dx) - \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

wenn man x statt $\frac{n}{p}$ setzt, und die Gleichung 3 nimmt die Form an:

$$S = F \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}} = F \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}{2} \quad (4)$$

$\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}$ ist aber $= \cos \varphi$; folglich ist

$$S = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \quad (5)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun für jeden beliebigen Einfallswinkel φ die erzeugte Reflexwirkung berechnen.

Ist z. B. $\varphi = 0^\circ$, so ist $\cos \varphi = 1$ und daher

$$S = \frac{F}{2}$$

d. h. der vom Lichtstrahl senkrecht getroffene Punkt a reflektirt das Licht mit einer Intensität, die gleich der Hälfte von der des direkten Lichtes ist.

Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $\cos \varphi = 0$ und daher die Intensität des vom Punkt f reflektirten Lichtes $= 0$.

Lässt man den Winkel φ stetig (etwa von 9° zu 9°) wachsen, so erhält man aus Gleichung 5) folgende Intensitäten des Reflexlichtes:

für $\varphi = 0^\circ$	$S = 0,500 \cdot F$
„ $\varphi = 9^\circ$	„ $0,494 \cdot F$
„ $\varphi = 18^\circ$	„ $0,476 \cdot F$
„ $\varphi = 27^\circ$	„ $0,445 \cdot F$
„ $\varphi = 36^\circ$	„ $0,404 \cdot F$
„ $\varphi = 45^\circ$	„ $0,354 \cdot F$
„ $\varphi = 54^\circ$	„ $0,294 \cdot F$
„ $\varphi = 63^\circ$	„ $0,227 \cdot F$
„ $\varphi = 72^\circ$	„ $0,154 \cdot F$
„ $\varphi = 81^\circ$	„ $0,078 \cdot F$
„ $\varphi = 90^\circ$	„ $0,000 \cdot F$

§. 8.

Aus der Vergleichung dieser Zahlenwerthe geht unmittelbar hervor, dass die Intensität des vom Punkt a reflektirten Lichtes am grössten, dass sie von da an erst langsamer und dann rascher gegen den Punkt F hin abnimmt.

Wäre ga eine Kugel, so müsste nothwendig die Reflexion des Lichtes in jedem durch a gehenden grössten Kreis in ganz gleicher Weise stattfinden, wie im Kreis ga . Drehen wir den Kreis $abc\dots f\dots w$ um aw als Axe, so beschreiben sämtliche Punkte desselben Kreise; da aber bei dieser Drehung der Einfallswinkel des Lichtstrahls für die betreffenden Punkte derselbe bleibt, so müssen offenbar die Kreise bb_0 , cc_0 , $dd_0\dots$ Kreise von gleichem Reflexionsvermögen sein.

Betrachten wir den Kreis $a''b''c''d''$ als den Durchschnitt einer concaven Kugel, welche von dem von der Kugel K ausgestrahlten Reflexlicht beleuchtet wird, so muss offenbar der Punkt a'' ein hellster Punkt sein, da er das stärkste Licht empfängt. Von da an nimmt, wie oben nachgewiesen, die Wirkung des Reflexlichtes, d. h. die Reflexhelligkeit bis zur Schattengrenze FF' stetig ab. Da die Kegelfläche Bhb'' durchweg gleiche Helligkeit hat, so muss auch die Beleuchtung des Kreises Bb'' , resp. dessen Helligkeit die nemliche sein, und zwar wird sie sich zur Helligkeit des Punktes a'' verhalten, wie die Lichtintensität des Punktes a zu der des Kreises b_0 , dasselbe gilt von den Kreisen Cc'' , $Dd''\dots$

Ist die Kugel K sehr klein, so können wir uns vorstellen, dass die Reflexstrahlen vom Punkt a'' herkommen, und die die Schattengrenze FF' beleuchtenden Reflexstrahlen kommen von Punkten des Kügelchens K her, für welche $\varphi = 45^\circ$ ist; für $\varphi = 45^\circ$ ist aber $S = 0,354 \cdot F$. Es nimmt daher die Reflexhelle der Kugel $Fa''F'$ vom hellsten Punkt a'' bis

zur Schattengrenze FF' von $0,5 \cdot F$ bis zu $0,354 \cdot F$ oder von $\frac{F}{2} \cdot \cos 0^\circ$ bis $\frac{F}{2} \cdot \cos 45^\circ$ stetig ab.

§. 9.

Um nun auf der Kugel $Fa''F'$ die Lage von Kreisen gleicher Reflexhelle zu erhalten, deren Helligkeit in gleichen Abstufungen vom hellsten Punkt bis zur Schattengrenze abnimmt, wird man aus der

Gleichung $S = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$ diejenigen Winkel zu bestimmen haben, für

welche der Werth von $\cos \varphi$ stetig zunimmt. Da, wie in §. 8 nachgewiesen, die Werthe von S zwischen

$$S = \frac{F}{2} \cdot \cos . 0^\circ = 0,5 \cdot F \text{ und}$$

$$S = \frac{F}{2} \cdot \cos . 45^\circ = 0,3535 \cdot F$$

oder die von $\cos \varphi$ zwischen 1 und 0,707 liegen müssen, so hat man zwischen 1 und 0,707 sovielen Zahlwerthe in gleichen Intervallen zu substituiren, als man Helligkeitscurven auf der Kugel haben will. Nimmt man beispielsweise deren 10 an, so ist die jedesmalige Differenz

$$d = \frac{1}{10} (1 - 0,707) = 0,0293 \text{ und daher}$$

$\cos \varphi = 0,707$	$= 0,707$	folglich $\varphi = 45^\circ$
" $= 0,707 + 1 \cdot 0,0293 = 0,7363$		" $= 42^\circ 35$
" $= 0,707 + 2 \cdot 0,0293 = 0,7656$		" $= 40^\circ$
" $= 0,707 + 3 \cdot 0,0293 = 0,7919$		" $= 37^\circ 40$
" $= 0,707 + 4 \cdot 0,0293 = 0,8242$		" $= 34^\circ 30$
" $= 0,707 + 5 \cdot 0,0293 = 0,8535$		" $= 31^\circ 25$
" $= 0,707 + 6 \cdot 0,0293 = 0,8628$		" $= 28^\circ$
" $= 0,707 + 7 \cdot 0,0293 = 0,9121$		" $= 24^\circ 10$
" $= 0,707 + 8 \cdot 0,0293 = 0,9414$		" $= 19^\circ 45$
" $= 0,707 + 9 \cdot 0,0293 = 0,9707$		" $= 14^\circ$
" $= 0,707 + 10 \cdot 0,0293 = 1,0000$		" $= 0^\circ$

Da die Entfernungen der Helligkeitscurven-Ebenen Bb'' , Cc'' u. s. f. vom Kugelmittelpunkt $= \cos 2 \varphi$, $\cos 2 \varphi'$ u. s. f. sind, so ist

$2 \varphi = 90^\circ$	— und daher $\cos . 2 \varphi = 0,0000$
" $85^\circ 10$	" $0,0843$
" 80°	" $0,1736$
" $75^\circ 20$	" $0,2532$
" 69°	" $0,3584$
" $62^\circ 50$	" $0,4566$
" 56°	" $0,5592$
" $48^\circ 20$	" $0,6648$
" $39^\circ 30$	" $0,7716$
" 28°	" $0,8829$
" 0°	" $1,0000$

Diese Werthe von $\cos 2 \varphi$ verhalten sich aber sehr nahe wie die Zahlen 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4..... 0,9; 1; es theilen demnach die Ebenen der Curven gleicher Reflexhelle unter der Voraussetzung gleicher Helligkeitsdifferenzen den zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius sehr nahe in gleiche Theile.

§. 10.

Die Atmosphäre ist stets mehr oder weniger mit Wasserdampf erfüllt, und dieser ist es hauptsächlich, welcher das atmosphärische Reflexlicht erzeugt. Die einzelnen Dampfbläschen aber sind als unendlich kleine Kügelchen zu betrachten, welche das Licht in der im vorigen §. beschriebenen Weise reflektiren und in ihrer Gesamtwirkung den atmosphärischen Reflex hervorbringen. Da die Intensität desjenigen Lichtes, welches die Dampfbläschen in der dem direkten Licht gerade entgegengesetzten Richtung reflektiren, am stärksten ist, so wird auch die Intensität des atmosphärischen Reflexlichtes in dieser Richtung am grössten sein. Man nennt diese Richtung den atmosphärischen Hauptstrahl.

Das atmosphärische Reflexlicht bewirkt nun auf der Selbstschattenseite der Körper eine ähnliche Abstufung der Helligkeit, wie im vorigen §. für die Kugelfläche $Fa''F'$ nachgewiesen wurde. Allerdings haben wir dort von der Kugelfläche K vorausgesetzt, dass sie das Licht vollkommen reflektire, was für die das Sonnenlicht reflektirenden Dampfbläschen der Atmosphäre nicht ganz zutreffen wird, da sie einen grossen Theil des Lichtes absorbiren und durch sich hindurch lassen. Die Intensität des atmosphärischen Reflexlichtes wird demnach beträchtlich geringer sein, als im §. 7 nachgewiesen wurde. Ueberhaupt wird das Verhältniss der Intensität des direkten zu der des reflektirten atmosphärischen Reflexlichtes nicht leicht zu bestimmen möglich sein, da letztere von so manchen Zufälligkeiten, als z. B. von dem Dichtigkeits- und Feuchtigkeitsgrad der Luft u. s. w. abhängig ist. Selbstverständlich ist das Verhältniss der Helligkeit des hellsten Punktes im Reflexlicht zu der des hellsten Punktes im direkten Licht das nemliche wie das, welches zwischen den Intensitäten des direkten und des reflektirten Lichtes stattfindet.

§. 11.

Stehen die Körper nicht ausschliesslich unter dem Einfluss des atmosphärischen Reflexlichtes, sind sie vielmehr von andern Körpern umgeben, welche das Licht reflektiren (terrestrisches Reflexlicht), so wird dadurch die Wirkung des atmosphärischen Reflexes mannigfach alterirt. Eine genaue Bestimmung jener zufälligen durch beliebige Körper und Flächen erzeugten Reflexwirkung ist kaum oder wenigstens nur im Allgemeinen möglich, da sie von vielen Zufälligkeiten abhängt, als z. B. von der Form, von der Lage, von der Textur der Oberfläche, von der Farbe und

der Entfernung der reflektirenden Fläche u. s. f. Die Berücksichtigung dieses Einflusses muss daher in jedem speciellen Fall bei der Schattirung von Flächen und Körpern dem Ermessen und dem künstlerischen Gefühl des Einzelnen überlassen bleiben. Das Studium der Natur wird für diesen Fall die sichersten Anhaltspunkte geben.

Es wird mit der Wirklichkeit, wenn auch nicht vollkommen, so doch sehr nahe übereinstimmen, wenn wir annehmen, dass von den reflektirenden matten Flächen das Licht ähnlich ausgestrahlt wird, wie von selbstleuchtenden Flächen. Die dadurch erzeugte Helligkeit wird dann namentlich, ausser von der Lage, von der Entfernung der reflektirenden Fläche abhängen, und auch hier das physikalische Gesetz in Anwendung kommen können, dass die Intensität des Lichtes im Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt.

Ist z. B. der mit seiner Grundfläche auf einer Ebene E stehende Cylinder (Fig. 10. Taf. II.) durch das aus der Richtung I herkommende Sonnenlicht beleuchtet, ist ab die Schattengrenze und bfe der Schlagschatten, so wird das von der Ebene E reflektirte Licht namentlich auf den untern Theil des Cylinders seinen Einfluss äussern, während der obere Theil mehr und mehr diesem Einfluss sich entzieht und schliesslich fast nur durch atmosphärisches Reflexlicht beleuchtet wird: der untere Theil des Cylinders muss daher durchweg heller sein als der obere, mit Ausnahme desjenigen Theils, welcher um den Punkt d herum liegt, da derselbe von der Ebene E (wegen des Schlagschattens bef) fast gar keines und jedenfalls nur sehr spärliches atmosphärisches Reflexlicht empfängt.

§. 12.

In den zunächst folgenden Paragraphen soll nunmehr der Einfluss des atmosphärischen Reflexlichtes nachgewiesen werden, welchen dasselbe auf die im Selbstschatten und im Schlagschatten befindlichen Körperflächen ausübt.

Ist b (Fig. 11. Taf. II.) ein sehr kleines Kügelchen (also etwa ein Wassertheilchen oder Dampfbläschen der Atmosphäre), welches vom Sonnenstrahl I unter dem Winkel φ so getroffen wird, dass der reflektirte Strahl i die Kugel K im hellsten Punkt a unter dem Winkel β trifft, so ist die dadurch erzeugte Helligkeit des Punktes a

$$H_a = \left(\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \right) \cdot \cos \alpha$$

denn $\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$ ist die Intensität des Reflexstrahls I (s. §. 7 Gleichung 5) und α der Einfallswinkel dieses Strahls.

Nun ist aber $\alpha = 180 - 2\varphi$ folglich

$$H_a = \left(\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \right) \cdot \cos \cdot 180 - 2\varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (-\cos \cdot 2\varphi) = -\frac{F}{2} \cos \varphi \cdot \cos \cdot 2\varphi \dots 1)$$

Ändert das Kügelchen b seine Lage, so muss nothwendig auch der Winkel φ sich ändern. Wir können uns aber unendlich viele Lagen des Kügelchens b denken, in welchen jedesmal ein von demselben ausgehender Reflexstrahl die Kugel K im Punkt a trifft; alle diese Strahlen zusammen müssen daher eine Helligkeit erzeugen, welche ausgedrückt ist durch

$$H_a = \Sigma \left(-\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \cdot 2\varphi \right)$$

folglich ist

$$H_a = -\frac{F}{2} \int \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \dots 2)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \int \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi &= \int \cos \varphi \cdot (\cos \varphi^2 - \sin \varphi^2) \\ &= \int \cos \varphi (1 - \sin \varphi^2) - \cos \varphi \cdot \sin \varphi^2 \\ &= \int \cos \varphi - 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi^2 \\ &= \sin \varphi - 2 \cdot \frac{\sin \varphi^3}{3} \end{aligned}$$

$$H_a = -\frac{F}{2} \left(\sin \varphi - 2 \frac{\sin \varphi^3}{3} \right) \dots 3)$$

oder

$$H_a = -\frac{F}{2} \sin \varphi \left(1 - \frac{2}{3} \sin \varphi^2 \right) \dots 4)$$

Nimmt das Kügelchen die Lage b'' an, so kann nur derjenige Reflexstrahl die Kugel im Punkt a erreichen, für welche $\varphi = 90^\circ$ ist; seine Intensität ist aber = 0. Desgleichen kann nur derjenige Reflexstrahl b'a die Kugel im Punkt a erreichen, für welchen $\varphi = 45^\circ$ ist. Für diesen Strahl ist aber Winkel $\alpha = 90^\circ$, folglich seine Wirkung = 0. Die Lagen b'' und b' des reflektirenden Kügelchens sind daher zwei Grenzen, innerhalb deren diejenigen Kügelchen liegen müssen, welche einen Reflexstrahl nach a senden können. Nimmt z. B. das reflektirende Kügelchen die Lage b''' an, so kann von hier aus kein Reflexstrahl den Punkt a mehr erreichen. Wir haben daher das Integral Gleich. 2 innerhalb der Grenzen $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ zu nehmen oder in Gleich. 3 für φ diese Werthe einzusetzen, wodurch sich ergibt

$$\begin{aligned}
 H_a &= -\frac{F}{2} \left(\sin 45^\circ - \sin 90^\circ - \frac{2}{3} (\sin 45^\circ - \sin 90^\circ) \right) \\
 &= -F \left(\frac{1}{2} (0,7071 - 1) - \frac{1}{3} (0,3534 - 1) \right) \\
 &= F (0,2159 - 0,1464) \\
 H_a &= 0,0691 \cdot F \quad \dots \dots \dots 5)
 \end{aligned}$$

Dies ist die Helligkeit des Punktes a, erzeugt durch die Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen innerhalb des Raumes b'a b'' herkommen; allein diejenigen Kügelchen, welche innerhalb des Raumes b''ag liegen, werden die gleiche Wirkung auf den Punkt a herzubringen und die Gesamtwirkung wird demnach das Doppelte, also

$$H_a = 0,1382 \cdot F.$$

sein.

Ist also der hellste Punkt a der Kugel im Schlagschatten, so ist die Helligkeit in Folge der Wirkung des Reflexlichtes nicht Null, sondern ca. $\frac{1}{7} F$.

§. 13.

In derselben Weise lässt sich nun auch die Wirkung des Reflexlichtes auf die Schattengrenze bestimmen.

Ist l (Fig. 12. Taf. II.) die Richtung des Lichtstrahls, also ac die Schattengrenze, und sind b, b', b''... verschiedene sehr kleine Kügelchen, Dampfbläschen der Atmosphäre, so wird jedes derselben einen Reflexstrahl nach dem Punkt a der Schattengrenze senden. Für das Kügelchen b z. B.

ist aber offenbar die Intensität des Reflexstrahls ba $S = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$; die dadurch erzeugte Wirkung auf den Punkt a der Kugel

$$H_a = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha.$$

Nun ist aber $\angle \alpha = 90 - \beta$; $\angle \beta = 180 - 2\varphi$, folglich $\angle \alpha = 90 - (180 - 2\varphi) = 2\varphi - 90$. und

$$\cos \alpha = \cos (2\varphi - 90) = \sin 2\varphi.$$

folglich

$$H_a = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi$$

Die Gesamtwirkung aller nach a gerichteten Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen b, b', b''... herkommen wird, daher ausgedrückt sein durch

$$H_a = \Sigma \left(\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2 \varphi \right)$$

oder da für das Kügelchen b' der $\angle \varphi = 90^\circ$ für b^{IV} $\angle \varphi = 0^\circ$ ist, diese beiden Lagen der reflektirenden Kügelchen aber Grenzlagen sind, so ist

$$H_a = \int_{90^\circ}^{0^\circ} \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2 \varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} \int_{90^\circ}^{0^\circ} \cos \varphi \cdot \sin 2 \varphi \quad \dots \quad 1)$$

Es ist aber

$$\int \cos \varphi \cdot \sin 2 \varphi = -\frac{2}{3} \cos \varphi^3$$

folglich

$$H_a = \left[-\frac{F}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \varphi^3 \right]_{\varphi=90^\circ}^{\varphi=0^\circ} \quad \dots \quad 2)$$

Setzt man für φ die Werthe 0° und 90° in diese Gleichung ein, so ist, da $\sin 0^\circ = 0$ und $\sin 90^\circ = 1$

$$H_a = 0 - \left(-\frac{F}{3} \right) = \frac{F}{3} \quad \dots \quad 3)$$

Die durch das atmosphärische Reflexlicht erzeugte Helligkeit ist in der Schattengrenze $= \frac{F}{3}$

§. 14.

Ist wieder l (Fig. 13. Taf. II.) die Richtung des Sonnenlichtes, also der Punkt c der hellste Punkt im Selbstschatten, so können wir auch für diesen Punkt die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit berechnen.

Der von dem Kügelchen bc ausgehende Reflexstrahl bc, dessen Intensität $S = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$ ist, trifft die Kugel im Punkt c, der Einfallswinkel ist α , folglich wieder die dadurch erzeugte Helligkeit

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha$$

Es ist aber $\angle \alpha = 2 \varphi$, folglich

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2 \varphi.$$

b' und b'' sind wieder zwei Grenzlagen, und zwar ist für b' $\varphi = 45^\circ$ und für b'' $\varphi = 0^\circ$; also die Gesamtwirkung aller von den reflektirenden Dampfbläschen der Atmosphäre nach dem Punkt c gerichteten Reflexstrahlen ausgedrückt durch

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \int_{45^\circ}^{0^\circ} \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \dots 1)$$

also mit Rücksicht auf die Grenzen

$$H_c = \frac{F}{2} \left(\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin \varphi^3 \right)_{\varphi=45}^{\varphi=0} \dots 2)$$

setzt man die Gegenwerthe für φ ein, so ist da $\sin 0^\circ = 0$ und $\sin 45^\circ = 0,7071$ ist.

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{F}{2} \left(0,7071 - \frac{2}{3} \cdot 0,7071^3 \right) \\ &= 0,2357 \cdot F \dots 3) \end{aligned}$$

Auch hier werden wir wieder, wie in §. 12, für die Helligkeit des Punktes c das Doppelte von $0,2357 F$ zu nehmen haben, weil die innerhalb des Raumes gcb'' liegenden reflektirenden Kügelchen den Punkt c in gleicher Weise erhellen, wie die innerhalb des Raumes $b''cb'$ liegenden und erhalten demnach als grösste Helligkeit auf der Selbstschattenseite der Kugel, d. h. für die Helligkeit des hellsten Punktes c

$$H_c = 0,4714 \cdot F \dots 4)$$

§. 15.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit in den hellsten Punkten a und c und in der Schattengrenze nachgewiesen haben, soll noch gezeigt werden, wie diese Helligkeit für jeden beliebigen, z. B. für den Punkt e der Kugel berechnet werden kann.

Der von den Kügelchen b (Fig. 14. Taf. II.) ausgehende Reflexstrahl be hat, wie bekannt, eine Intensität $= \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$; er trifft die Kugel unter dem Einfallswinkel α . Die Lage des Punktes e sei gegeben durch die auf dem Bogen gemessene Entfernung ec oder durch den Winkel β .

Es ist nun die Helligkeit des Punktes e , welche durch den Reflexstrahl be hervorgebracht wird

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha$$

Ist $b'b''$ Tangente im Punkt e , so ist offenbar

$$\angle 2\varphi + \varepsilon + \delta + (\gamma + \xi) = 360^\circ$$

es ist aber

$$\angle \varepsilon = 90^\circ; \angle \delta = 90 - \beta; \angle \gamma + \xi = 180 - \alpha$$

folglich

$$2\varphi + 90 + 90 - \beta + 180 - \alpha = 360^\circ$$

oder

$$\alpha = 2\varphi - \beta$$

daher

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) \quad \dots \quad 1)$$

und die Gesamtwirkung aller auf den Punkt e treffenden Reflexstrahlen

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \int \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) \quad \dots \quad 2)$$

Offenbar sind die beiden Kügelchen b' und b'' in einer solchen Lage, dass die von ihnen ausgehenden Reflexstrahlen die Kugel in e eben noch berühren; die Linie $b'b''$ ist daher eine Grenzlinie, d. h. alle Kügelchen unterhalb derselben als: b' , b'' , b''' , b^{IV} senden Reflexstrahlen nach dem Punkt e , während alle oberhalb liegenden z. B. b^{VI} keine Reflexstrahlen nach e mehr senden können.

Es ist

$$\angle \varphi' = \frac{\beta + 90}{2}; \varphi'' = \frac{\beta - 90}{2} \text{ und } \varphi''' = \frac{\beta}{2}$$

da $ck \parallel l'''$; hat also der Winkel φ die Grösse φ' und φ'' erreicht, so ist das Integral (Gleichung 2) an seinen Grenzen angekommen.

Der unterhalb $b'b''$ liegende Raum wird durch kb''' in zwei Theile getheilt; die Wirkung der Reflexstrahlen, welche von den innerhalb des Raumes $b'e b'''$ liegenden Kügelchen ausgehen, ist nur ausgedrückt durch

$$\frac{F}{2} \cdot \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta + 90}{2}} \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) \quad \dots \quad 1)$$

Desgleichen ist die Reflexwirkung der innerhalb des Raumes $b'''e b''$ liegenden Kügelchen ausgedrückt durch

$$\frac{F}{2} \cdot \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta - 90}{2}} \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) \quad \dots \quad 2)$$

folglich die Gesamtwirkung aller auf den Punkt e wirkenden Reflexstrahlen

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \left[\int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta+90}{2}} \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) + \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta-90}{2}} \cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) \right] \quad 3)$$

Der Ausdruck $\cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta)$ lässt sich nun auf die Form bringen
 $\cos \varphi \cdot \cos (2\varphi - \beta) = \cos \beta \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi^2 + 2 \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi^2$,
 und es ist daher

$$\int \cos \beta \cdot \cos (2\varphi - \beta) = \cos \beta \cdot \sin \varphi - 2 \cdot \cos \beta \cdot \frac{\sin \varphi^3}{3} - 2 \cdot \sin \beta \cdot \frac{\cos \varphi^3}{3}$$

$$= \cos \beta \cdot \sin \varphi - \frac{2}{3} (\cos \beta \cdot \sin \varphi^3 - \sin \beta \cdot \cos \varphi^3)$$

folglich:

$$H_e = \frac{F}{2} \left[\cos \beta \cdot \sin \varphi - \frac{2}{3} (\cos \beta \sin \varphi^3 - \sin \beta \cdot \cos \varphi^3) \right]_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta+90}{2}}$$

$$+ \frac{F}{2} \left[\cos \beta \sin \varphi - \frac{2}{3} (\cos \beta \cdot \sin \varphi^3 - \sin \beta \cos \varphi^3) \right]_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta-90}{2}}$$

Setzt man die dem Winkel φ entsprechenden Grenzwerte ein, so erhält man:

$$H_e = \frac{F}{2} \left\{ \left[\cos \beta \cdot \sin \frac{\beta}{2} - \frac{2}{3} \left(\cos \beta \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^3 - \sin \beta \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^3 \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\cos \beta \cdot \sin \frac{\beta+90}{2} - \frac{2}{3} \left(\cos \beta \left(\sin \frac{\beta+90}{2} \right)^3 - \sin \beta \left(\cos \frac{\beta+90}{2} \right)^3 \right) \right] \right\}$$

$$+ \frac{F}{2} \left\{ \left[\cos \beta \cdot \sin \frac{\beta}{2} - \frac{2}{3} \left(\cos \beta \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^3 - \sin \beta \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^3 \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\cos \beta \cdot \sin \frac{\beta-90}{2} - \frac{2}{3} \left(\cos \beta \left(\sin \frac{\beta-90}{2} \right)^3 - \sin \beta \left(\cos \frac{\beta-90}{2} \right)^3 \right) \right] \right\}$$

oder

$$H_e = \frac{F}{2} \left\{ 2 \cdot \left[\cos \beta \left(\sin \frac{\beta}{2} - \frac{2}{3} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^3 \right) + \frac{2}{3} \sin \beta \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \beta \left(\sin \frac{90+\beta}{2} + \sin \frac{\beta-90}{2} - \frac{2}{3} \left(\sin \frac{90+\beta}{2} \right)^3 + \left(\sin \frac{\beta-90}{2} \right)^3 \right) \right]$$

$$\left. - \frac{2}{3} \sin \beta \left[\cos \left(\frac{90+\beta}{2} \right)^3 + \left(\cos \frac{\beta-90}{2} \right)^3 \right] \right\} \quad 5)$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann nun für jeden beliebigen Punkt der Kugel die durch das atmosphärische Reflexlicht erzeugte Helligkeit berechnet werden. So wird man z. B. die oben in §§. 12, 13 und 14 berechneten Reflexhellen a und c der hellsten Punkte und der Schattengrenze bd (Fig. 15. Taf. II.) aus obiger Gleichung erhalten, wenn man $\beta = 0^\circ$, 90° oder 180° setzt.

1) Reflexhelligkeit im Punkt c; $\beta = 0$

$$H_c = \frac{F}{2} \left[\left[0,7071 - \frac{2}{3} \cdot 0,3534 \right] - \left[\frac{2}{3} \cdot 0,3534 - 0,7071 \right] \right]$$

$$= 0,4714 \cdot F \quad (\text{s. §. 12.})$$

2) Reflexhelligkeit der Schattengrenze bd; $\beta = 90^\circ$

$$H_{bd} = \frac{F}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,3534 - \frac{2}{3} \cdot 0,3534 + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot F \quad (\text{s. §. 13.})$$

3) Reflexhelligkeit im Punkt a; $\beta = 180$.

$$H_a = \frac{F}{2} \cdot 2 \left(-\frac{1}{3} + 0,7071 - \frac{2}{3} \cdot 0,3534 \right)$$

$$= 0,1381 \cdot F \quad (\text{s. §. 14.})$$

§. 16.

Wir haben oben bereits erwähnt, das der atmosphärische Reflex nicht ganz die Intensität $f = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$ haben kann, aus den dort angeführten Gründen. Wir werden demnach in den Gleichungen der vorhergehenden Paragraphen für F einen etwas kleineren Coefficienten, den wir mit f bezeichnen wollen, substituiren müssen. Das Verhältniss von f zu F wird jedoch kaum zu bestimmen möglich sein, wenigstens ist es bis jetzt noch nicht gelungen, dasselbe festzustellen. Nehmen wir an, dass derjenige Theil des Lichtes, welcher die atmosphärischen Wasseratome theils absorbiren, theils durch sich hindurchlassen, dem Theil gleich ist, welchen sie reflektiren, so ist $f = \frac{F}{2}$ und daher, wenn die Helligkeit des hellsten Punktes a im Licht = 1 gesetzt wird, die Reflexhelligkeit im hellsten Punkt a, sofern er sich im Schlagschatten befindet

$$H_a = 0,0696 \quad (\text{oder ungefähr} = \frac{1}{14})$$

in der Schattengrenze bd

$$H_{bd} = 0,1666 \text{ (oder ungefähr } = \frac{1}{6}\text{)}$$

im hellsten Punkt c des Selbstschattens

$$H_c = 0,2357 \text{ (oder ungefähr } = \frac{1}{4}\text{)}$$

Nachdem wir oben (§. 5.) nachgewiesen haben, dass die Abstände der Helligkeitsebenen von Kugelmittelpunkt den Helligkeiten einfach proportional sind, dass demnach die Differenzen dieser Abstände für gleiche Hellendifferenzen gleich sind; nachdem wir ferner die Reflexhelligkeit für die hellsten Punkte im Licht- und Selbstschatten und im Schlagschatten festgestellt haben, wird es sich nun darum handeln, zu bestimmen, wie viel Töne die Kugel in den einzelnen Helligkeitsebenen erhalten muss, damit sie die entsprechenden Dunkelheiten und somit die geeignete Schattirung erhält.

Die Helligkeiten sind (s. Fig. 16. Taf. II.)

$$\begin{aligned} \text{im Punkt } a' &= 1 \\ \text{in } bd &= \frac{1}{6} \\ \text{im Punkt } c &= \frac{1}{4} \\ \text{im Punkt } a &= \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Da der Punkt a die geringste Helligkeit, also die grösste Dunkelheit hat, so muss er auch, wenn wir überhaupt grössere oder geringere Dunkelheiten durch mehr oder weniger häufigen Auftrag eines und desselben Tuschtons hervorbringen, die grösste Anzahl von Tönen erhalten. Nehmen wir an, dass die grösste Dunkelheit im Schlagschatten (also im Punkt a) durch 14 Töne erreicht wird, und dass die grösste Helligkeit (also im Punkt a') die des weissen Papieres sei, so erhält offenbar der Punkt c 4 Töne, bd 6 und a' keinen Ton.

Ist der Halbmesser ak der Kugel durch die Ebenen + 1, + 2, + 3 in 4 gleiche Theile getheilt, so nimmt die Helligkeit in den dadurch auf der Kugeloberfläche erzeugten Schnittkreisen von a' bis zu k um je $\frac{1}{4}$ ab. Da nun aber der Punkt a' 0 Ton und + 4 oder die Schattengrenze bd 6 Töne erhält, so muss offenbar

$$\begin{aligned} \text{der Kreis } +1 & \frac{1}{4} \cdot 6 = 1\frac{1}{2} \text{ Töne} \\ \text{„ } +2 & \frac{2}{4} \cdot 6 = 3 \text{ „} \\ \text{„ } +3 & \frac{3}{4} \cdot 6 = 4\frac{1}{2} \text{ „} \\ \text{„ } +4 & \frac{4}{4} \cdot 6 = 6 \text{ „} \end{aligned}$$

erhalten.

Aehnlich verhält sich im Körperschatten der Kugel. Da der Punkt c 4 Töne, die Schattengrenze bd 6 Töne erhält, so muss

der Kreis - 1	$4 + \frac{1}{4}(6 - 4) = 4\frac{1}{2}$	Töne
" " - 2	$4 + \frac{2}{4}(6 - 4) = 5$	"
" " - 3	$4 + \frac{3}{4}(6 - 4) = 5\frac{1}{2}$	"
" " - 4	$4 + \frac{4}{4}(6 - 4) = 6$	"

erhalten.

Ferner erhält die Kugel in bd einen 6fachen, in a einen 14fachen Tonauftrag, folglich werden die Tonaufträge im Schlagschatten folgende sein :

im Kreis + 4	6	Töne
" " + 3	$6 + \frac{1}{4}(14 - 6) = 8$	"
" " + 2	$6 + \frac{2}{4}(14 - 6) = 10$	"
" " + 1	$6 + \frac{3}{4}(14 - 6) = 12$	"
im Punkt a	$6 + \frac{6}{4}(14 - 6) = 14$	"

Da jedoch Bruchtheile von Tönen nicht wohl ausführbar sind, so wird man besser obige Zahlen mit 2 multipliciren und einen Grundton von halber Stärke des vorigen anwenden; demzufolge würden dann die Tonaufträge in den Hellenurven nachstehende sein :

im Licht	}	in a'	0	Ton
		" + 1	3	Töne
		" + 2	6	"
		" + 3	9	"
im Selbstschatten	}	" + 4	12	"
		" + 4	12	"
		" - 3	11	"
		" - 2	10	"
		" - 1	9	"
im Schlagschatten	}	" - c	8	"
		" + 4	12	"
		" + 3	16	"
		" + 2	20	"
		" + 1	24	"
		" + a	28	"

Dabei setzen wir allerdings voraus, dass 0, 1, 2, 3, 4 n maliger Auftrag desselben Tuschtönen den Helligkeiten $\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \frac{n-4}{n} \frac{3}{n}, \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{0}{n}$ entspreche. Es ist dies jedoch nicht der Fall, wie nachstehende Untersuchung zeigen wird.

Ueber die durch mehrfachen Auftrag eines gleich starken Tones erzeugte Helligkeit.

§. 18.

a) Nach Leroy (Stereotomie §. 230) ist „das Gesetz, durch welches das Verhältniss zwischen den Werthen der Helligkeiten c und der Zahl der Tuschlagen n , durch welche jene Helligkeiten erzeugt werden, bestimmt wird, dasjenige, welches zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen für eine nur wenig unter der Einheit genommene Grundzahl besteht.“

b) Nach den vom Verfasser selbst angestellten Versuchen ist dieses Verhältniss zwischen c und n sehr nahe ausgedrückt durch die Gleichung:

$$c = \left(\frac{1}{1 + a \cdot n} \right)^2$$

worin der Coefficient a von der Stärke des einfachen Tones (Grundtones) abhängt, mit derselben in einfachem Verhältniss wächst und für einen Grundton, wie er bei vorliegender Methode gewöhnlich zur Anwendung kommt, zwischen 0,1 und 0,05 liegen mag.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt. Es wurde von 6 ca. 2□ Dm. grossen, mit weissem Papier überzogenen Täfelchen das erste einmal, das zweite zweimal, das dritte dreimal... das sechste sechsmal mit dem gleichen Tushton bemalt und dann nach einander einem Licht in der Entfernung von 0,572 M. gegenübergestellt; alsdann ein zweites mit weissem Papier beklebtes Täfelchen demselben Licht in solche Entfernung gegenüber gebracht, bis es mit den ersteren jedesmal gleiche Dunkelheit zeigte; diese Entfernungen sodann gemessen und notirt.

Bezeichnen wir das weisse Täfelchen mit T_0 (Fig. 17. Taf. II.), die andern der Reihe nach mit $T_1, T_2, T_3 \dots T_6$ die entsprechende Helligkeiten mit $H_1, H_2, H_3 \dots H_6$ und die Entfernungen, welche man dem Täfelchen T_0 geben musste, dass es mit den andern gleiche Dunkelheit zeigte, mit $e_1, e_2, e_3 \dots e_6$ und die Entfernung, in welcher die Täfelchen $T_1, T_2, T_3 \dots T_6$ aufgestellt wurden mit e ($= 0,572$ M.), so ist offenbar z. B. für T_1

$$\begin{aligned} H_1 : H_0 &= \frac{1}{e_1^2} : \frac{1}{e^2} \\ &= e^2 : e_1^2 \end{aligned}$$

folglich

$$H_1 = H_0 \cdot \frac{e^2}{e_1^2}$$

oder wenn man die Helligkeit $H_0 = 1$ setzt:

$$H_0 = \frac{e^2}{e_0^2} = \left(\frac{e}{e_0} \right)^2$$

ebenso ist

$$H_1 = \left(\frac{e}{e_1} \right)^2$$

$$H_2 = \left(\frac{e}{e_2} \right)^2$$

$$H_n = \left(\frac{e}{e_n} \right)^2$$

Die Versuche lieferten nun nachstehende Resultate:

für T_0 betrug die Entfernung $e = 0,572$ Met.

"	T_1	"	"	"	$e_1 = 0,615$	"
"	T_2	"	"	"	$e_2 = 0,658$	"
"	T_3	"	"	"	$e_3 = 0,701$	"
"	T_4	"	"	"	$e_4 = 0,744$	"
"	T_5	"	"	"	$e_5 = 0,787$	"
"	T_6	"	"	"	$e_6 = 0,830$	"

Vergleicht man die Werthe von e mit einander, so findet man, dass die Differenzen δ derselben gleich sind; es ist nemlich $e_1 - e = 0,043 = \delta$; $e_2 - e_1 = 0,043$; $e_3 - e_2 = 0,043$ u. s. f., folglich $e_1 = e + \delta$; $e_2 = e + 2\delta$; $e_3 = e + 3\delta$... $e_n = e + n\delta$, woraus man schliessen muss, dass überhaupt $e_n = e + n\delta$ als allgemeines Glied dieser Reihe (arithmetischen Progression) zu betrachten ist, und da nothwendig $H_n = \left(\frac{e}{e_n} \right)^2$

oder, wenn wir e statt H_n setzen:

$$e = \left(\frac{e}{e + n\delta} \right)^2$$

ist, so erhalten wir, wenn wir mit e dividiren

$$e = \left(\frac{1}{1 + n \cdot \frac{\delta}{e}} \right)^2$$

Nun ist aber $\delta = 0,043$ und $e = 0,572$, folglich

$$e = \left(\frac{1}{1 + n \cdot \frac{0,043}{0,572}} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 + 0,0752 \cdot n} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 + an} \right)^2 \quad \dots 1)$$

oder, wenn wir für eine gegebene Helligkeit c die Anzahl Töne suchen wollen, erhalten wir aus Gleichung 1)

$$n = 13,3 \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right) \dots 2)$$

Aus der Gleichung 1) kann nun für jede beliebige Anzahl von Tönen (n) die entsprechende Helligkeit von c berechnet werden. Man findet z. B.

für $n = 0$ ist $c = 1$	für $n = 13$ ist $c = 0,256$
„ $n = 1$ „ $c = 0,866$	„ $n = 14$ „ $c = 0,237$
„ $n = 2$ „ $c = 0,755$	„ $n = 15$ „ $c = 0,221$
„ $n = 3$ „ $c = 0,666$	„ $n = 16$ „ $c = 0,206$
„ $n = 4$ „ $c = 0,591$	„ $n = 17$ „ $c = 0,193$
„ $n = 5$ „ $c = 0,528$	„ $n = 18$ „ $c = 0,181$
„ $n = 6$ „ $c = 0,475$	„ $n = 19$ „ $c = 0,169$
„ $n = 7$ „ $c = 0,429$	„ $n = 20$ „ $c = 0,160$
„ $n = 8$ „ $c = 0,389$	„ $n = 30$ „ $c = 0,094$
„ $n = 9$ „ $c = 0,355$	„ $n = 40$ „ $c = 0,062$
„ $n = 10$ „ $c = 0,326$	„ $n = 50$ „ $c = 0,044$
„ $n = 11$ „ $c = 0,299$	„ $n = 100$ „ $c = 0,014$
„ $n = 12$ „ $c = 0,276$	„ $n = \infty$ „ $c = 0^*$

Aus der Vergleichung der Werthe von c ergibt sich, dass die Abnahme der Helligkeit oder die Zunahme der Dunkelheit durchaus nicht gleichmässig ist, dass die Dunkelheit nicht in einfachem Verhältniss mit den Tonaufträgen zunimmt, dass die Wirkung je eines weiteren Tones um so schwächer ist, je grösser n genommen wird, d. h. dass, wenn man auf eine sehr helle und auf eine verhältnissmässig dunkle Fläche einen Ton von gleicher Stärke aufträgt, die dadurch erzeugte Abnahme der Helligkeit auf der hellen Fläche ungleich grösser ist als auf der dunkleren Fläche.

Zusatz 1). Wir haben schon oben bemerkt, dass der Werth von δ also auch der des Coefficienten a in der Gleichung 1) von der Stärke des Grundtones abhängt. Aus der obigen Zusammenstellung der Werthe

*) Nach dem oben sub a von Leroy aufgestellten Gesetz ist das Verhältniss zwischen n und c folgendes:

$n = 0,000$ $c = 1$	$n = 6,932$ $c = 0,5$
$n = 1,054$ $c = 0,9$	$n = 9,163$ $c = 0,4$
$n = 2,232$ $c = 0,8$	$n = 12,040$ $c = 0,3$
$n = 3,567$ $c = 0,7$	$n = 16,095$ $c = 0,2$
$n = 5,108$ $c = 0,6$	$n = 23,026$ $c = 0,1$

von c ist ersichtlich, dass der einmalige Auftrag des Grundtones die Helligkeit 0,866 oder die Dunkelheit $\delta = 1 - 0,866 = 0,134$ hervorbrachte, dieser Werth von δ bezeichnet offenbar die Intensität oder die Stärke des Grundtons.*)

Würde man diese Tonstärke $\delta = 0,1$ anstatt 0,134 nehmen, so müsste offenbar $c_1 = 1 - 0,1 = 0,9$ und der Coefficient $a = 0,054$ werden. Denn aus

$$c = 0,9 = \frac{1}{(1 + n \cdot a)^2}$$

oder weil für den vorliegenden Fall $n = 1$ ist,

$$0,9 = \frac{1}{(1 + a)^2}$$

ergibt sich unmittelbar

$$a = \frac{1}{\sqrt{0,9}} - 1 = 0,054.$$

Die Gleichung 1) nimmt daher für diesen Fall die Form an

$$c = \frac{1}{(1 + 0,054 \cdot n)^2} \quad \dots \quad 1^a)$$

Dieselbe liefert für $n = 0$ $c = 1$ für $n = 5$ $c = 0,621$

$n = 1$ $c = 0,9$ $n = 6$ $c = 0,570$

$n = 2$ $c = 0,814$ $n = 7$ $c = 0,527$

$n = 3$ $c = 0,741$ $n = 8$ $c = 0,488$

$n = 4$ $c = 0,676$ $n = 9$ $c = 0,453$

$n = 10$ $c = 0,422$

Da der Coefficient $a = \frac{\delta}{e}$ oder $\delta = a \cdot e$, so ist da $a = 0,054$ und $e = 0,572$; $\delta = 0,054 \cdot 0,572 = 0,031$ Met.

Zusatz 2. Würde man den Coefficienten $a = 0,01$ setzen, so erhielte man für δ den Werth $\delta = a \cdot e = 0,01 \cdot 0,572 = 0,0057$ Met. und demnach für c die Gleichung:

$$c = \frac{1}{(1 + 0,0057 \cdot n)^2} \quad \dots \quad 1^b)$$

*) Der Werth von δ kann auch unmittelbar aus Gleichung 1) berechnet werden, denn die durch einmaligen Tonauftrag erzeugte Helligkeit ist

$$c = \frac{1}{(1 + a)^2} \quad (\text{da } n = 1)$$

folglich

$$\delta = 1 - c = 1 - \frac{1}{(1 + a)^2}$$

Dieselbe liefert:

für $n = 1$	$c = 0,980$	für $n = 6$	$c = 0,892$
" $n = 2$	$c = 0,962$	" $n = 7$	$c = 0,875$
" $n = 3$	$c = 0,944$	" $n = 8$	$c = 0,859$
" $n = 4$	$c = 0,926$	" $n = 9$	$c = 0,843$
" $n = 5$	$c = 0,909$	" $n = 10$	$c = 0,827$

Die durch die Tonaufträge erzeugten Helligkeiten c nehmen im vorliegenden Fall (wenigstens für die ersten 10 Tonaufträge) fast ganz gleichmässig ab, wie die Differenzen der Werthe von c zeigen; welche durchschnittlich = 0,017 ist.

Zusatz 3. Die aus Gleichung 1 §. 18 berechneten Werthe von c ergaben eine Tonstärke $\delta = 0,1344 \left(= \frac{1}{7} \right)$

Gleichung 1^a Zusatz 1. $\delta = 0,1000 \left(= \frac{1}{10} \right)$

Gleichung 1^b Zusatz 2. $\delta = 1 - 0,980 = 0,0200 \left(= \frac{1}{50} \right)$

Die zuletzt angenommene Tonstärke war also die schwächste, ergab aber eine mit den Tonaufträgen fast ganz gleichmässige Abnahme der Helligkeiten. Daraus geht hervor, dass die Helligkeiten mit den Tonaufträgen um so gleichmässiger abnehmen, je schwächer die verwendete Tonstärke und je geringer die Anzahl der Tonaufträge ist.

§. 19.

Trägt man die der Gleichung 1 §. 18 genügenden Werthe von c und n als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf (Fig. 18. Taf. II.) und zeichnet die sich hieraus ergebende Curve $m n o p \dots$, so gibt dieselbe ein anschauliches Bild von der durch mehrfachen Tonauftrag erzeugten ungleichförmigen Abnahme der Helligkeiten, gibt aber auch, wenn man bei der praktischen Anwendung dieser Theorie jene ungleichförmige Wirkung berücksichtigen wollte, ein einfaches Hilfsmittel an die Hand, die Lage derjenigen Helligkeitscurven auf der Kugel zu bestimmen, in welchen die Töne in einfacher Progression aufgetragen werden dürfen.

Wir haben in §. 16 die Helligkeit der Schattengrenze zu $\frac{1}{6}$, die des hellsten Punktes im Selbstschatten zu $\frac{1}{4}$, die des dunkelsten Punktes im Schlagschatten zu $\frac{1}{14}$, wenn die des hellsten Punktes im Licht = 1 ist, festgestellt; diese Helligkeiten entsprechen aber, wie sich aus der Gleichung 1 §. 18 leicht berechnen oder aus den dort berechneten Werthen von c unmittelbar ablesen lässt, folgenden Tonaufträgen:

Die Helligkeit $\frac{1}{5}$ wird erzeugt durch 20 Töne

"	"	$\frac{1}{4}$	"	"	"	13	"
"	"	$\frac{1}{14}$	"	"	"	41	"
"	"	1	"	"	"	0	"

a) Da die Ordinate ($c = K 20$) (Fig. 18. Taf. II.) die Helligkeit der Schattengrenze und $PR = 1$ die des hellsten Punktes a' der Kugel repräsentirt, so verlegen wir die n -Axe nach eK , beschreiben mit KA' den Kreis $A'B$ und betrachten $A'BK$ als einen Kugelquadranten. Um nun auf demselben die Lage von Curven gleicher Helligkeit zu erhalten, theilen wir eK in 4, 6, 8 ... gleiche Theile, je nachdem wir 4, 6, 8 ... Hellencurven auf der Kugel haben wollen (im vorliegenden Beispiel deren 4) ziehen die den Theilpunkten entsprechenden Ordinaten m_0 , n_0 , o_0 ... und durch die Schnittpunkte m , n , o ... der Curven die Linien mm'' , nn'' , oo'' ... so sind $m'm''$, $n'n''$, $o'o''$ Curven gleicher Helligkeit der Art, dass auf denselben die Töne in einfacher arithmetischer Progression aufgetragen werden dürfen; es erhält z. B. die Kugel im Kreis $m'm''$ 5 Töne, in $n'n''$ 10, in $o'o''$ 15 und in KB 20 Töne.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens gründet sich auf den früher nachgewiesenen Satz, dass die Entfernungen der Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt den entsprechenden Helligkeiten einfach proportional sind. Die durch die Ordinaten mm_0 , nn_0 , oo_0 ... repräsentirten Helligkeiten sind daher zugleich die Entfernungen der betreffenden Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt. Bezeichnet man diese mit x , so ist offenbar

$$x = \frac{1}{(1 + a n)^2} - 0,166$$

in welcher Gleichung für n jede ganze Zahl von 0 bis 20 gesetzt werden kann.

Es wird aber auch möglich sein, jene 20 Töne durch eine beliebige andere Anzahl von Tönen, sofern man nur den Grundton entsprechend wählt, zu ersetzen. Nehmen wir z. B. 4 Töne an, so muss offenbar der Grundton 5 mal stärker als der ursprüngliche gemacht werden, damit nach 4maligem Auftrag eine Stärke von $4 \cdot 5 = 20$ Tönen erreicht wird. Der Grundton ist daher für diesen Fall $\frac{1}{5} \cdot 20$; bei zweimaligem Auftrag $\frac{2}{5} \cdot 20$, bei dreimaligem Auftrag $\frac{3}{5} \cdot 20$ oder es ist allgemein $\frac{p}{q} \cdot 20 = n$ zu setzen. Dieser Werth in obige Gleichheit gesetzt, gibt:

$$x = \frac{1}{\left(1 + a \cdot \frac{p}{q} \cdot 20\right)^2} - 0,1666$$

oder da $a = 0,0752$

$$x = \frac{1}{\left(1 + 1,504 \cdot \frac{p}{q}\right)^2} - 0,1666 \quad \dots 1)$$

worin für $\frac{p}{q}$ nach einander die Werthe $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ zu setzen sind, falls man auf der Kugel 4 Helligkeitscurven annimmt.

Der Maassstab für die so erhaltene Länge x ist der Kugelhalbmesser r ; für $\frac{p}{q} = 0$ gibt die Gleichung 1)

$$x = 0,83 = r.$$

Sollen aber die Werthe von x auf den Radius $r = 1$ bezogen werden, so sind dieselben mit $\frac{1}{0,83} = 1,205$ zu multipliciren, folglich ist:

$$x = \frac{1,205}{\left(1 + 1,504 \frac{p}{q}\right)^2} - 0,2007 \quad \dots \quad \text{I.}$$

wofür die vereinfachte Gleichung in den meisten Fällen genügen mag:

$$x = \frac{1,2}{\left(1 + 1,5 \cdot \frac{p}{q}\right)^2} - 0,2 \quad \dots \quad \text{Ia.}$$

b) Um die Lage der Lichteurven auch auf der Selbstschattenseite zu finden, verfahren wir ganz ähnlich. Für die Schattengrenze ist die Helligkeit $c = 0,166$, ausgedrückt durch 20 Töne, für den hellsten Punkt im Selbstschatten $c = 0,256$, ausgedrückt durch 13 Töne. Die entsprechenden Ordinaten sind $K20$ und $i1$ (denn $P1$ ist $= 13 = n$). Theilt man nun wieder IK in so viele gleiche Theile, als man Lichteurven haben will (z. B. in 4), zieht die entsprechenden Ordinaten, beschreibt ferner mit $Kc = Ii$ den Kreisbogen CD , so hat man nur durch die Punkte $p, q, r \dots$ mit PQ parallele Linien zu ziehen, alsdann sind, wenn wir KCD als einen Kugelquadranten betrachten, die Schnitte der letztgenannten Linien die Projektionen der verlangten Helligkeitskreise.

Wollte man auch für diesen Fall die Entfernungen x der Curven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt durch Rechnung finden, so hätte man den Ursprung der Coordinaten in den Punkt J zu verlegen; die Coordinaten dieses Punktes sind $n = 13$ und $c = 0,166$; folglich

$$x = \frac{1}{\left(1 + 0,0752 (n + 13)\right)^2} - 0,1666$$

Da die Schattengrenze 20, der hellste Selbstschattenpunkt 13 Töne erhält, können die zwischen 20 und 13 liegenden 7 Töne durch eine andere beliebige Anzahl gleicher Töne ersetzt werden, und es ist daher $\frac{p}{q} \cdot 7$ statt n in obige Gleichung zu setzen; folglich ist

$$x = \frac{1}{\left(1 + 0,0752 \left(7 \cdot \frac{p}{q} + 13\right)\right)^2} - 0,1666$$

oder

$$x = \frac{1}{\left(1,9776 + 0,5264 \frac{p}{q}\right)^2} - 0,1666 \quad \dots 2)$$

Der Radius der Kugel, welcher für diese Werthe von x die Maass-einheit bildet, ist offenbar $r = KC = 0,256 - 0,166 = 0,09$; sollen aber die Werthe von x auf den Radius $r = 1$ bezogen werden, so sind dieselben mit $\frac{1}{0,09} = 11,11$ zu multipliciren und Gleichung 2 erhält sodann die Form

$$x = \frac{11,11}{\left(1,9776 + 0,5264 \cdot \frac{p}{q}\right)^2} - 1,851 \quad \dots \text{II.}$$

oder vereinfacht

$$x = \frac{11}{\left(2 + 0,5 \cdot \frac{p}{q}\right)^2} - 1,75 \quad \dots \dots \text{IIa.}$$

c) Befindet sich der hellste Punkt der Kugel im Schlagschatten, so ist seine Helligkeit = 0,069 mit 41 Tönen, die der Schattengrenze ist 0,166 mit 20 Tönen. Trägt man auch hier wieder die entsprechenden Ordinaten $K20$ und Ah auf, zieht Ag , theilt diese Linie in so viele Theile, als man Helligkeitscurven haben will, und zieht durch s, t, u, \dots Parallelen mit Ag , so erhält man auf AK' die verlangte Theilung, oder auf der Lichtseite der Kugel, sofern sie sich im Schlagschatten befindet, die entsprechende Theilung.

Verlegen wir den Ursprung des Coordinatensystems in den Punkt g , so ist:

$$x = \frac{1}{\left(1 + 0,0752 \left(21 \frac{p}{q} + 20\right)\right)^2} - 0,069$$

Dieser Werth von x entspricht aber den Längen $ss_0, tt_0 \dots$ und gibt also die Entfernung der Hellencurven vom hellsten Punkt A der Kugel; um auch hier die Entfernungen vom Kugelmittelpunkt, d. h. die Längen $ss', tt' \dots$ zu erhalten, hat man jene Werthe von gK abzuziehen; gK aber ist = $K20 - Ah = 0,1666 - 0,069 = 0,0976$, folglich ist:

$$\begin{aligned} x &= 0,0976 - \left[\frac{1}{\left(1 + 0,0752 \left(21 \frac{p}{q} + 20\right)\right)^2} - 0,069 \right] \\ &= 0,1666 - \frac{1}{\left(1,5792 \frac{p}{q} + 2,504\right)^2} \quad \dots \dots 3) \end{aligned}$$

Der Radius der Kugel, welcher für diese Werthe x die Maasseinheit bildet, ist $= AK' = gK = 0,1666 - 0,069 = 0,0976$; sollen sie aber auf den Radius $r = 1$ bezogen werden, so müssen wir jene Werthe mit

$$\frac{1}{0,0976} = 10,246 \text{ multipliciren und erhalten demnach die Gleichung}$$

$$x = 1,707 - \frac{10,246}{\left(1,579 \cdot \frac{p}{q} + 2,504\right)^2} \dots \dots \text{III.}$$

oder vereinfacht:

$$x = 1,6 - \frac{10}{\left(2,5 + 1,5 \frac{p}{q}\right)^2} \dots \dots \text{IIIa.}$$

Zusatz. Soll nun die Kugel (Fig. 19. Taf. II.) unter Zugrundlegung von 4 Hellencurven schattirt werden, so finden wir die Entfernungen x der Curven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt, die selbstverständlich auf dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius aufzutragen sind, wenn wir in obige Gleichungen I, II, III für $\frac{p}{q}$ nach einander die Werthe $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ einsetzen. Dieselben ergeben

auf der Lichtseite	für $\frac{p}{q} = 0$	die Entfernung $x = 1$
"	" $= \frac{1}{8}$	" " " = 0,851
"	" $= \frac{1}{4}$	" " " = 0,438
"	" $= \frac{2}{4}$	" " " = 0,2
"	" $= \frac{3}{4}$	" " " = 0,066
"	" $= \frac{4}{4}$	" " " = 0
auf der Selbstschattenseite	" $= 0$	" " " = 1
"	" $= \frac{1}{4}$	" " " = 0,69
"	" $= \frac{2}{4}$	" " " = 0,42
"	" $= \frac{3}{4}$	" " " = 0,2
"	" $= \frac{4}{4}$	" " " = 0
im Schlagschatten	" $= 0$	" " " = 0
"	" $= \frac{1}{4}$	" " " = 0,387
"	" $= \frac{2}{4}$	" " " = 0,65
"	" $= \frac{3}{4}$	" " " = 0,84
"	" $= \frac{4}{4}$	" " " = 1

§. 20.

Nach Gleichung 2 §. 18 ist: $n = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right)$. Der Werth von

n ist demnach abhängig von dem Coefficienten $\frac{1}{a}$, und zwar der Art, dass n um so grösser wird, je kleiner a genommen wird und umgekehrt. Nun ist aber $a = \frac{\delta}{e}$, also $\frac{1}{a} = \frac{e}{\delta}$, e aber eine constante Grösse, folglich ist a resp. n abhängig von δ ; d. h. a nimmt proportional mit δ zu oder ab, während n umgekehrt ab- oder zunimmt, oder die Anzahl der Tonaufträge ist um so kleiner, je grösser die Intensität des Grundtones ist.

Da n nur von dem Coefficienten $\frac{1}{a}$ abhängig ist, so müssen offenbar alle Curven, welche der Gleichung $n = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right)$ entsprechen, einander ähnlich sein.

Da nun aber a von δ und δ von der Intensität des Grundtones abhängt, so müssen auch die Werthe von x für verschiedene Intensitäten des Grundtons einander ähnlich sein, d. h. die Theilung des Kugelradius ist immer die nemliche, die Intensität oder Stärke des Grundtones mag sein, welche sie will.

Zusatz. Aus den in §. 18 beschriebenen Versuchen geht hervor, dass, wenn parallele Ebenen, T, T₁, T₂, T₃ (Fig. 20 Taf. III.) einem Licht so gegenübergestellt werden, dass sie unter sich gleiche Abstände δ haben, sie die nämlichen Helligkeiten zeigen, welche durch progressives Auftragen eines gleichmässigen Tones hervorgebracht wird. Die Stärke δ dieses Tones (s. §. 18. Zusatz) ist aber abhängig von den Entfernungen e und δ ; nun ist

$$d = 1 - c_1 = 1 - \frac{1}{\left(1 + n \frac{\delta}{e}\right)^2}$$

oder da für c_1 $n = 1$ ist,

$$d = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{e}\right)^2}$$

die den Entfernungen δ und e entsprechende Tonstärke.

Ueber den Einfluss der Intensität des Lichtes auf die Lage der Hellencurven.

§. 21.

Ausgehend von dem physikalischen Gesetz, „dass die Helligkeit einer Ebene im umgekehrten quadratischen Verhältniss zu ihrer Entfernung von

der Lichtquelle zu- oder abnehme“ und daraus folgernd, „dass die Helligkeit von Ebenen, welche gegen den Lichtstrahl verschiedene Neigungen haben, sich verhalten, wie die cosinuse der Einfallswinkel der Lichtstrahlen“ hat man bis jetzt allgemein bei den Beleuchtungsconstructions die Helligkeitscurven-Ebenen der Kugel in gleichen gegenseitigen Abständen von einander angenommen, und sich mit den Beweisen, wie sie in §. 5 und 6 gegeben sind, begnügt. Obgleich nun diese Methode brauchbare Bilder von plastischer Wirkung liefert, so wird man doch bei aufmerksamer Vergleichung derselben mit der Beleuchtung und Schattirung der natürlichen Körper finden, dass sich die Lichtmasse (namentlich im Sonnenlicht) viel weiter über die Kugelfläche verbreitet, dass die Helligkeitscurven gegen die Schattengrenze hin mehr und mehr zusammen gedrängt werden, und in Folge dessen letztere viel schärfer hervortritt.

II Dass das zweite am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene physikalische Gesetz in Wirklichkeit nicht vollständig sich bewährt, werden nachstehende Versuche zeigen. Was der eigentliche Grund dieser Erscheinung, ob es die für verschiedene Lichtintensitäten verschiedene Intensität des Reflexlichtes ist, oder ob der Grund darin liegt, dass die natürlichen Körperoberflächen keine mathematischen Flächen, sondern als ein Conglomerat mehr oder weniger deutlich erkennbarer verschiedenartig gestalteter Erhöhungen zu betrachten sind, die nur im Allgemeinen die Form mathematischer Flächen haben, mag dahingestellt bleiben.

§. 22.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt. Von zwei mit weissem Papier überzogenen Täfelchen T und T' (Fig. 21. Taf. III.) wurde das eine T einem Licht senkrecht gegenübergestellt und zwar in solchen Entfernungen, dass die Abnahme der Helligkeit eine stetige war, alsdann das zweite um die Axe b drehbare Täfelchen T' jedesmal in eine solche Lage gebracht, dass es mit dem ersten gleiche Helligkeit zeigte; der Drehungswinkel wurde notirt und aus mehrfachen Versuchen der Mittelwerth genommen.

Bringt man beide Täfelchen in die Lage T'' und T₀, also in gleicher Entfernung $ab = a'b' = x'$ je einem Licht von gleicher Intensität gegenüber, so ist offenbar die Helligkeit beider Täfelchen die gleiche. Diese Helligkeit bilde die Maasseinheit für die übrigen Helligkeiten; bringen wir das zweite Täfelchen T₀ nach T, also in die Entfernung x vom Licht, so verhält sich offenbar die Helligkeit von T₀ zu der von T, nemlich:

$$\begin{array}{ccc} H & : & H \\ T_0 & : & T \end{array} = x^2 : x'^2$$

oder da zugleich x' die Maasseinheit für die Entfernungen ist

$$1 : H_T = x^2 : 1$$

oder

$$H_T = \frac{1}{x^2}$$

folglich

$$x = \sqrt{\frac{1}{H_T}}$$

Sollen nun diejenigen Entfernungen x des Täfelchens T gesucht werden, in welchen die Helligkeit z. B. je um $\frac{1}{8}$ abnimmt, so sind für H_T in diese

Gleichung nach einander die Werthe $\frac{8}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{8} \dots \frac{1}{8}, 0$ oder für $\frac{1}{H_T}$

die Werthe $\frac{8}{8}, \frac{8}{7}, \frac{8}{6} \dots \frac{8}{1}, \frac{8}{0}$ einzusetzen; daraus ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{8}{8}}; \sqrt{\frac{8}{7}}; \sqrt{\frac{8}{6}}; \sqrt{\frac{8}{5}}; \sqrt{\frac{8}{4}}; \sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{8}{2}}; \sqrt{\frac{8}{1}}; \sqrt{\frac{8}{0}}$$

$$= 1; 1,067; 1,118; 1,265; 1,414; 1,631; 2,000; 2,828; \infty$$

wofür wie schon erwähnt $a'b' = x'$ die Maasseinheit abgibt.

Wird das drehbare Täfelchen T'' um den Winkel α in die Lage T' gedreht und es zeigt in dieser Stellung die gleiche Helligkeit wie das Täfelchen T , dessen Helligkeit in dieser Stellung $= \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ sei, so müsste offenbar dem mehrfach erwähnten physikalischen Gesetz zufolge der Winkel α , der dem Einfallswinkel φ gleich ist, eine solche Grösse haben, dass er der Gleichung $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ entspricht. Berührt die mit T' parallele Ebene M die Kugel im Punkt δ , so hat diese nicht nur im Punkt δ , sondern auch im Kreis dg dieselbe Helligkeit wie T' resp. T , also ebenfalls die Helligkeit $= \frac{1}{2}$ und es musste demnach $ef = \frac{1}{2} ke = de \cdot \cos \varphi = ke \cdot \cos \varphi$ sein. Dass dieses aber nicht der Fall ist, ging aus den Versuchen hervor.

§. 23.

Hiezu wurden zwei ca $2 \square \text{ dm}$ grosse mit weissem mattem Zeichnungspapier überzogene Holztäfelchen verwendet und die Beleuchtung durch zwei Stearinkerzen hergestellt, von denen 6 auf 1 ft gehen.

Die Entfernung $a b = a'b' = x'$ betrug beim I. Versuch 0,825 mtr.

II.	„	0,572	„
III.	„	0,286	„
IV.	„	0,202	„

Die Lichtintensitäten s der 4 Versuche verhalten sich demzufolge zu einander wie 0,48:1:4:8. Mehrfach wiederholte Versuche ergaben folgende Mittelwerthe:

Helligkeit y.	$\angle \alpha = \angle \varphi$ beim Versuch				$\cos \alpha = \cos \varphi = x$				$\cos \varphi = x$ (=y) nach dem physi- kalischen Gesetz
					s = 0,48	s = 1	s = 4	s = 8	
	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.	
0	90°	90°	90°	90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\frac{1}{8}$	80 $\frac{1}{2}$	78 $\frac{3}{4}$	69 $\frac{1}{2}$	64 $\frac{1}{4}$	0,127	0,195	0,351	0,434	0,125
$\frac{2}{8}$	70 $\frac{1}{2}$	67 $\frac{1}{2}$	57 $\frac{1}{4}$	52 $\frac{1}{4}$	0,298	0,383	0,541	0,612	0,250
$\frac{3}{8}$	61	56 $\frac{1}{4}$	46 $\frac{3}{4}$	40 $\frac{3}{4}$	0,477	0,555	0,686	0,750	0,375
$\frac{4}{8}$	50 $\frac{1}{4}$	45	36 $\frac{3}{4}$	33	0,646	0,707	0,801	0,858	0,500
$\frac{5}{8}$	39 $\frac{1}{2}$	33 $\frac{3}{4}$	27 $\frac{1}{4}$	24 $\frac{1}{2}$	0,793	0,832	0,889	0,910	0,625
$\frac{6}{8}$	28 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	28	16 $\frac{1}{4}$	0,905	0,924	0,951	0,960	0,750
$\frac{7}{8}$	13	11 $\frac{1}{4}$	9	8	0,976	0,981	0,988	0,990	0,875
$\frac{8}{8}$	0°	0°	0°	0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Aus der Vergleichung der so gefundenen Werthe von $\cos \varphi$ oder x geht hervor, dass dieselben den entsprechenden Helligkeiten nicht gleich sind, dass sie nicht in einfacher arithmetischer Progression mit den Helligkeiten zu oder abnehmen, dass die Entfernungen x bei gleicher Helligkeit aber verschiedene Lichtintensitäten verschieden sind, und zwar um so grösser, je grösser die Lichtintensität, dass die gegenseitigen Curvenabstände gegen die Schattengrenze zu grösser, gegen den hellsten Punkt zu kleiner werden, und dass demnach die Helligkeitscurven mit der Zunahme der Lichtintensität mehr und mehr gegen den hellsten Punkt zusammengedrängt zu werden scheinen.

§. 24.

Dieses Resultat spricht nun scheinbar gegen die oben §. 21 ausgesprochenen Erfahrungssätze; ich sage: scheinbar, denn wenn wir diejenige Lage der Helligkeitskreise der Kugel mit einander vergleichen, in welchen die Helligkeit absolut gleich ist, so gestaltet sich das Resultat sofort anders. Es ist offenbar:

die Helligkeit $\frac{2}{8}$ bei 0,48 od. sehr nahe $\frac{1}{8}$ facher Lichtstärke = $\frac{1}{8}$ bei einf. Lichtstärke.

x = 0,298		x = 0,195
" " $\frac{4}{8}$	" " " "	" " $\frac{2}{8}$
x = 0,646		x = 0,383
" " $\frac{6}{8}$	" " " "	" " $\frac{3}{8}$
x = 0,905		x = 0,555
" " $\frac{8}{8}$	" " " "	" " $\frac{4}{8}$
x = 1		x = 0,707

Scheidet man nun die Kugel durch Ebenen in den angegebenen Entfernungen (Fig. 23. Taf. III), so ist die Helligkeit die gleiche in d und d', e und e', b und b', a und a'; oder wenn man das Licht von der Intensität 0,48, welches eine Kugel erhellt, plötzlich auf die Intensität 1 verstärkte, so würde die Helligkeit d sofort nach d', von e nach e', von b nach b' und von a nach a' zurückgedrängt werden. Noch auffallender wird selbstverständlich diese Erscheinung, wenn wir die Intensität noch grösser annehmen, wie dies (Fig. 24. Taf. III.) veranschaulicht, wo die Lage von Hellencurven mit absolut gleicher Helligkeit für 1fache und 8fache Lichtintensität mit einander verglichen sind.

Wir sehen daraus, dass in Uebereinstimmung mit unsern Voraussetzungen, die Dunkelheiten der Schattengrenze um so näher rücken, und hier einen um so schrofferen Uebergang von der Licht- zur Schattenseite der Körper bilden müssen, je grösser die zur Beleuchtung derselben verwendete Lichtquelle ist und können annehmen, dass die Dunkelheiten mit zunehmender Lichtintensität ebenso gegen die Schattengrenze sich zusammendrängen, wie die Helligkeiten gegen den hellsten Punkt.

§. 25.

Um die Stetigkeit der aus den Versuchen gefundenen Werthe von x zu prüfen, wurden dieselben als Abscissen und die zugehörigen Helligkeiten als Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufgetragen und die daraus sich ergebende Curve gezeichnet, welche durch ihre Gestalt unmittelbar als eine Sinus-Curve sich erwies, so namentlich diejenige Curve, welche die Werthe von x für einfache Lichtintensität enthält, die vollständig der Gleichung

$$x = \sin. (y \cdot 90^\circ)$$

entspricht. Darin bezeichnet y die Helligkeit, deren Werthe stets zwischen 0 und 1 liegen.

§. 26.

Durch mehrfache Versuche ergab sich ferner, dass die Werthe der Reihen von x für die übrigen Lichtintensitäten aus der Reihe $x = \sin_{II}$ ($y. 90^\circ$) hervorgehen, wenn man letztere auf eine gewisse Potenz f erhebt, die nothwendig, da die Reihen mit der Intensität s des Lichtes sich ändern, eine Funktion von s sein muss. Die Gleichung für die Werthe von x wären also allgemein

$$x_n = \left(\sin(y. 90) \right)^f = x_{II}^f$$

in welcher Gleichung der Werth von f noch näher zu bestimmen ist. Bezeichnet man die Werthe, welche in obiger Tabelle §. 23 zusammengestellt mit $x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV}$, und die entsprechenden Exponenten mit $f_I, f_{II}, f_{III}, f_{IV}$ so ist offenbar

$$x_I = x_{II}^{f_I} \text{ oder } f_I = \frac{\log. x_I}{\log. x_{II}} \quad \text{a)}$$

$$x_{III} = x_{II}^{f_{III}} \text{ oder } f_{III} = \frac{\log. x_{III}}{\log. x_{II}} \quad \text{b)}$$

$$x_{IV} = x_{II}^{f_{IV}} \text{ oder } f_{IV} = \frac{\log. x_{IV}}{\log. x_{II}} \quad \text{c)}$$

und findet nun aus Gleichung a, wenn man die betreffenden Zahlenwerthe obiger Tabelle einsetzt:

$$f_I = \frac{\log. 0,127}{\log. 0,195} = 1,26$$

ebenso ist aber auch

$$f_I = \frac{\log. 0,298}{\log. 0,383} = 1,26.$$

Dieselbe Grösse erhält man, man mag für x aus der Reihe I und II Werthe nehmen, welche man will, sofern sie nur derselben Helligkeit angehören.

Ebenso ist

$$f_{III} = \frac{\log. 0,195}{\log. 0,351} = 0,64$$

und endlich

$$f_{IV} = \frac{\log. 0,434}{\log. 0,351} = 0,511$$

während selbstverständlich

$$\frac{f}{II} = 1$$

ist.

§. 27.

Es ist also:

für $s = 0,48$	$f = 1,26$
für $s = 1$	$f = 1$
für $s = 4$	$f = 0,64$
für $s = 8$	$f = 0,511$.

Um die Beziehung zwischen s und f festzustellen, wurden dieselben wieder als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufgetragen und die diesen Werthen entsprechende Curve gezeichnet, welche als eine hyperbolische sich erwies, deren Gleichung die Form hat:

$$s - b = \frac{a}{f^m} \dots \dots \dots 1)$$

Um die Werthe der Grössen a , b und m zu finden, bilde man drei Gleichungen, indem man für s und f je zwei obiger Zusammenstellung entnommen Werthe setzt:

$$1 - b = \frac{a}{1^m} \text{ oder } 1 - b = a \dots 2)$$

$$4 - b = \frac{a}{0,64^m} \dots \dots \dots 3)$$

$$8 - b = \frac{a}{0,511^m} \dots \dots \dots 4)$$

Aus diesen 3 Gleichungen lassen sich nun die 3 Unbekannten a , b und m berechnen, wie folgt:

Durch Subtraction der 2. Gleichung von der 3. und 4. erhält man:

$$4 - 1 = a \left(\frac{1}{0,64^m} - 1 \right) \dots 5)$$

$$8 - 1 = a \left(\frac{1}{0,511^m} - 1 \right) \dots 6)$$

Dividirt man die 5. Gleichung durch die 6., so ist

$$\frac{4 - 1}{8 - 1} = \frac{a \left(\frac{1}{0,64^m} - 1 \right)}{a \left(\frac{1}{0,511^m} - 1 \right)} \text{ oder}$$

$$\frac{3}{7} = 0,4286 = \frac{\frac{1}{0,64^m} - 1}{\frac{1}{0,511^m} - 1} \quad 7)$$

Setzt man in dieser Gleichung $m=3$, so erhält man den Werth 0,433 statt 0,4286, der aber jedenfalls genügt.

Dieser Werth von $m=3$ in die Gleichung 5 und 6 eingesetzt, gibt:

$$\begin{aligned} 3 &= a \left(\frac{1}{0,64^3} - 1 \right) = 2,814 \cdot a \\ \text{oder} \quad 7 &= a \left(\frac{1}{0,511^3} - 1 \right) = 6,494 \cdot a \end{aligned} \quad 8)$$

folglich

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2,814} \\ \text{oder} \quad a &= \frac{7}{6,494} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a &= \frac{3}{2,814} \\ a &= \frac{7}{6,494} \end{aligned}} \right\} = 1,0805 \quad \dots 9)$$

Gleichung 2. ergibt dann sofort durch Einsetzung dieses Werthes von a

$$\begin{aligned} 1 - b &= 1,0805 \\ b &= 1 - 1,0805 = -0,0805 \quad 10) \end{aligned}$$

Setzt man jetzt die so berechneten Werthe von a , b und m in Gleichung 1, so erhält man als Relation zwischen s und f die Gleichung:

$$s + 0,0805 = \frac{1,0805}{f^3}$$

oder

$$f = \sqrt[3]{\frac{1,0805}{s + 0,0805}} \quad \dots 11)$$

Zusatz. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$f = \sqrt[3]{\frac{1 + 0,0805}{s + 0,0805}}$$

Wird nun s ziemlich gross, so kann der Bruchtheil 0,0805 füglich vernachlässigt werden und wir haben dann

$$f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}} \quad \dots 12)$$

Es liefert übrigens für $s = 2$

$$\text{die Gleichung 11) } \dots f = 0,80381$$

$$\text{und die Gleichung 12) } \dots f = 0,7937$$

$$\text{Differenz} = 0,01011$$

also einen so geringen Unterschied, dass die Gleichung 12) überhaupt genügen mag.

§. 28.

Wenn man nun den Werth von f in die Gleichung 1) §. 26 einsetzt, erhält sie die allgemein giltige Form:

$$A) \quad x = \left(\sin. (y \cdot 90^\circ) \right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}} - \left(\sin. (y \cdot 90^\circ) \right)^{-\frac{1}{s}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich nun für jede beliebige Lichtintensität s und für jede beliebige Helligkeit y eine Reihe von Werthen x berechnen, wie die oben in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten durch Versuche gefundenen. Setzt man $s = 0,48; 1; 4; 8;$ und $y = \frac{8}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{8} \dots$ in obige Gleichung, so ergeben sich eben jene Werthe x in §. 23.

§. 29.

In §. 24 haben wir nachzuweisen versucht, dass bei zunehmender Lichtintensität, die Dunkelheit ebenso gegen die Schattengrenze hingedrängt wird, wie die Helligkeit scheinbar gegen den hellsten Punkt, wir haben demnach, wenn wir, statt der Helligkeit y , die Dunkelheit z einführen, die Reihen des §. 23 oder die überhaupt aus der Gleichung A §. 28 berechneten Werthe von x als die Entfernungen vom hellsten Punkt zu betrachten; um aber auch hier wieder dem x die ursprüngliche Bedeutung zu geben, ist offenbar $1 - x$ statt x zu setzen, wodurch die Gleichung A die Form erhält:

$$1 - x = \left(\sin. (z \cdot 90^\circ) \right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}}$$

oder

$$x = 1 - \left(\sin. (z \cdot 90^\circ) \right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}} \quad B)$$

Zusatz. Gerade so wie die Werthe der Helligkeiten y $\begin{matrix} < 1 \\ > 0 \end{matrix}$ sind, ebenso sind auch die Werthe von z d. h. die Dunkelheiten $\begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$.

Da wir die verschiedenen Grade der Dunkelheiten durch eine denselben proportionale Anzahl von gleichen Tönen ausdrücken, so können wir uns, unter der Voraussetzung, dass die grösste Dunkelheit $1 = \frac{n}{n}$ einem n-fachen Tonauftrag entspricht, unter z auch die Anzahl der Töne vorstellen, durch welche die betreffende Dunkelheit z repräsentirt wird.

Sollte nun aus obiger Gleichung B der Werth von x d. h. die Entfernung derjenigen Hellencurve der Kugel berechnet werden, in welcher z. B. die Helligkeit $y = \frac{3}{8}$ wäre, gleichviel für welche Lichtintensität s, so ist offenbar $z = 1 - y = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ zu setzen; da auch $n = \frac{8}{s}$, so haben wir uns darunter vorzustellen, dass diese Dunkelheit z durch 5 Töne repräsentirt wird, deren 8 die grösste Dunkelheit auf der Lichtseite, d. h. die der Schattengrenze, hervorbringen.

§. 30.

Setzt man in die Gleichung B §. 29 $s = 0,48; 1; 4; 8; 16$ und $z = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8} \dots \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$, so erhält man die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe von x, für die Helligkeitsdifferenz der Lichtcurven $= \frac{1}{8}$.

Dunkelheit z	s = 0,48	s = 1	s = 4	s = 8	s = 16	Helligkeit y
	(f = 1,26)	(f = 1)	(f = 0,64)	(f = 0,511)	(f = 0,406)	
0	x = 1,000	x = 1,000	x = 1,000	x = 1,000	x = 1,000	1
$\frac{1}{8}$	„ 0,872	„ 0,805	„ 0,649	„ 0,566	„ 0,485	$\frac{7}{8}$
$\frac{2}{8}$	0 0,701	„ 0,617	„ 0,459	„ 0,388	„ 0,323	$\frac{6}{8}$
$\frac{3}{8}$	„ 0,522	„ 0,447	„ 0,314	„ 0,242	„ 0,212	$\frac{5}{8}$
$\frac{4}{8}$	„ 0,354	„ 0,293	„ 0,199	„ 0,162	„ 0,131	$\frac{4}{8}$
$\frac{5}{8}$	„ 0,207	„ 0,168	„ 0,111	„ 0,090	„ 0,072	$\frac{3}{8}$
$\frac{6}{8}$	„ 0,095	„ 0,076	„ 0,049	„ 0,040	„ 0,032	$\frac{2}{8}$
$\frac{7}{8}$	„ 0,024	„ 0,019	„ 0,012	„ 0,010	„ 0,008	$\frac{1}{8}$
$\frac{8}{8}$	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	0

Anmerkung. Der Exponent f ist, aus der oben §. 27 entwickelten Gleichung 12 berechnet, nemlich: $f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}}$.

§. 31.

Nimmt man die Lichtintensität unendlich klein, also $s = 0$, so wird $\sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0}} = \infty$; nun ist aber $(\sin(z \cdot 90))^\infty = 0$, da $\sin(z \cdot 90)$ stets < 1 , folglich für diesen Fall

$$x = 1 - 0 = 1$$

d. h. die Helligkeitscurven sind alle im hellsten Punkt der Kugel concentrirt, diese also durchaus dunkel.

Nimmt man die Lichtintensität unendlich gross, also $s = \infty$, so ist $\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}} = 0$; folglich für diesen Fall

$$x = 1 - (\sin(z \cdot 90))^0 = 1 - 1 = 0$$

d. h. sämtliche Helligkeitscurven sind in der Schattengrenze vereinigt, oder die Lichtseite der Kugel ist durchweg gleichmässig hell bis zur Schattengrenze, in welcher die Dunkelheit plötzlich beginnt.

Zusatz. Angenommen die Intensität des Sonnenlichts sei gleich 4000, so ist $f = \sqrt[3]{\frac{1}{4000}} = 0,063$ folglich

$$x = 1 - \sin(z \cdot 90)^{0,063}$$

und daher für:

$$\begin{array}{l} z = 0; \quad = \frac{1}{8}; \quad = \frac{2}{8}; \quad = \frac{3}{8}; \quad = \frac{4}{8}; \quad = \frac{5}{8}; \quad = \frac{6}{8}; \quad = \frac{7}{8}; \quad = \frac{8}{8} \\ x = 1; \quad = 0,0978 \quad 0,0584 \quad 0,0363 \quad 0,0215 \quad 0,0115 \quad 0,0049 \quad 0,0011 \quad 0,0000 \end{array}$$

Die Curven-Ebene mit $\frac{1}{8}$ Dunkelheit oder $\frac{7}{8}$ Helligkeit hat demnach vom Kugelmittelpunkt eine Entfernung, die noch nicht $\frac{1}{10}$ von der Länge des Kugelradius beträgt, während die Curven-Ebene mit $\frac{7}{8}$ Dunkelheit oder $\frac{1}{8}$ Helligkeit dem Kugelmittelpunkt bis auf $\frac{1}{1000}$ des Radius nahe rückt.

§. 32.

Es soll nunmehr untersucht werden, welcher Lichtintensität die bisher allgemein eingeführte Methode mit der Annahme gleicher gegenseitiger Abstände der Lichtcurven-Ebenen entspricht.

Da man hiebei von der Voraussetzung ausgeht, dass die Abstände der Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt den entsprechenden Helligkeiten proportional sind, so gilt für diesen Fall offenbar die Gleichung:

$$x = y$$

oder wenn wir auch hier statt der Helligkeit y die Dunkelheit z einführen, also $1 - x$ statt x setzen:

$$\begin{aligned} 1 - x &= z \quad \text{oder} \\ x &= 1 - z \quad \dots \dots \dots 1) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist die einer geraden Linie; die Gleichung B §. 29 kann niemals auf diese Form gebracht werden. Es wird sich daher nur um eine annäherungsweise Bestimmung des Werthes von s handeln können.

Setzt man in die Gleichung B §. 29 aus obiger Gleichung 1 den Werth von x , so ist

$$1 - z = 1 - \left(\sin(z \cdot 90) \right)^f$$

oder

$$z = \left(\sin(z \cdot 90) \right)^f \quad \dots \dots \dots 2)$$

Daraus ergibt sich:

$$f = \frac{\log z}{\log \sin(z \cdot 90)} \quad \dots \dots \dots 3)$$

da $f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}}$, so ist $s = \frac{1}{f^3} \quad \dots \dots \dots 4)$

Setzt man in Gleichung 3 für z irgend einen beliebigen Werth z. B. $z = \frac{1}{2}$, so ist:

$$f = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \left(\sin \frac{1}{2} \cdot 90 \right)} = \frac{\log 0,5}{\log \sin 45^\circ} = \frac{0,69897 - 1}{0,84948 - 1}$$

$$f = \frac{-0,30103}{-0,15051} = 2 \quad \dots \dots \dots 5)$$

Dieser Werth für f in Gleichung 4 gesetzt gibt

$$s = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \dots \dots \dots 6)$$

d. h.: für besagte Methode beträgt die Lichtintensität s nur $\frac{1}{8}$ von derjenigen, welche wir oben mit 1 bezeichnet haben und welche man erhält, wenn man die Kugel in 0,572^{mtr.} (= 2 Fuss württ.) Entfernung zwei Stearinlichtern gegenüber bringt, während im vorliegenden Fall, also für $s = \frac{1}{8}$, diese Entfernung 1,62^{mtr.} (= 5,66 Fuss württ.) beträgt.

§. 33.

Nimmt man auf der Kugel nur 4 Helligkeitscurven an, was auch für die praktische Anwendung meistens genügt, so hat man von den in der Tabelle (§. 30) zusammengestellten Werthen von x für ein-fache Lichtintensität (s = 1) diejenigen zu nehmen, welche den Dunkelheiten z = 0, 2/8, 4/8, 6/8, 8/8 entsprechen, also

	für z = 0	2/8;	4/8;	6/8;	8/8;
	x = 1	0,617	0,293	0,076	0,000
oder sehr nahe	x = 1	0,6	0,3	0,1	0.

Diese Entfernungen aber verhalten sich sehr nahe wie:

$$10 : 6 : 3 : 1 : 0.$$

Theilt man demnach den zum Lichtstrahl senkrechten Radius (Fig. 25. Taf. III.) in 10 gleiche Theile, und legt Schnitt-Ebenen senkrecht zu diesem Radius durch den 1., 3., 6. Theilpunkt, so sind die dadurch mit der Kugeloberfläche erzeugten Schnittkreise die der einfachen Lichtintensität entsprechenden Helligkeitskreise. Die gegenseitigen Abstände der Schnitt-Ebenen verhalten sich wie 4 : 3 : 2 : 1.

Diese Theilung ist jedoch nur eine näherungsweise; will man eine genauere Theilung haben, so beschreibe man mit dem Radius a b (Fig. 25^a Taf. III.) den Viertelskreisbogen bc, theile diesen in so viele gleiche Theile, als man Helligkeitscurven haben will, und ziehe durch die Theilpunkte d, e, f.. Linien senkrecht zu ab. Denn es ist, wenn $\text{arc. } ef = \frac{1}{4} \text{ arc } bc$, $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 90^\circ$ und $hf = af \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin (\frac{1}{4} \cdot 90)$; ferner ist $x = r - hf = r - r \sin (\frac{1}{4} \cdot 90)$ oder wenn $r = 1$, $x = 1 - \sin (\frac{1}{4} \cdot 90)$. Ebenso ist z. B. $x' = 1 - \sin (\frac{2}{4} \cdot 90)$, wann $\text{arc. } ce = \frac{2}{4} \cdot \text{arc. } bc$ ist; diese Gleichung von x und x' entspricht aber vollkommen der allgemeinen Gleichung B. §. 29, wenn man dort S = 1 setzt.

§. 34.

Trägt man die Werthe von x für 16fache Lichtintensität und die zugehörigen Dunkelheiten als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf, so stellt die daraus hervorgehende Curve sehr nahe einen Kreis vor, welcher der Gleichung:

$$x = 1 - \sqrt{1 - (1 - z)^2} \dots \dots \dots 1)$$

oder:

$$1 - x = \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

entspricht. Denn, setzt man in diese Gleichung nach einander die Werthe $z = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8} \dots \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$ ein, so erhält man:

für $z = \frac{7}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{1}{8} \quad 0$
 $x = 0,008 \quad 0,033^* \quad 0,073 \quad 0,134 \quad 0,219 \quad 0,340 \quad 0,515 \quad 1,000$

während die aus der Gleichung:

$$x = 1 - (\sin z \cdot 90) \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

berechneten Werthe (s. §. 30) folgende sind:

$x = 0,008 \quad 0,032 \quad 0,072 \quad 0,131 \quad 0,212 \quad 0,323 \quad 0,485 \quad 1,000$

Die Werthe dieser beiden Reihen sind aber, wie man sieht, so wenig von einander verschieden, dass man sie für die Praxis als gleich annehmen kann.

Nun ist in Fig. 26, Taf. III., $ab^2 = ac^2 - bc^2$ oder da $ab = 1 - x$; $ac = 1$; $bc = 1 - z$.

$$(1 - x)^2 = 1 - (1 - z)^2$$

oder:

$$1 - x = \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

woraus wieder obige Gleichung 1) hervorgeht:

$$x = 1 - \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

Beschreibt man demnach mit dem rad. ab (Fig. 27, Tafel III.) den Viertelskreisbogen bc , theilt bh in so viele gleiche Theile als man Hellen-curven auf der Kugel haben will, zieht durch die Theilpunkte $d, e, f, g \dots dd', ee', ff' \dots$ bis zum Durchschnitt mit dem Bogen bc , so sind die durch die Schnittpunkte $d', e', f', g' \dots$ zu ab senkrechten Linien $+4, +3, +2 \dots$ die gesuchten Helligkeitcurven der Kugel für 16fache Lichtintensität.

§. 35.

Es soll die Lage der Helligkeitcurven bestimmt werden für den Fall, dass bei der Annahme von 4 Abstufungen die Curve $+1$ mit der Helligkeit $y = \frac{3}{4}$ (folglich $z = \frac{1}{4}$) durch den Punkt (b, b') der Kugel (Fig. 28, Taf. III.) geht.

Projicirt man die Kugel mit dem durch ihren Mittelpunkt gehenden Lichtstrahl (l, l') auf eine zum letzteren parallele Seiten-Ebene MN , so erhält man in der Umklappung dieser Ebene in die Horizontal-Ebene den Kreis KBP als die Seitenprojection der Kugel und die Gerade CN als die des Lichtstrahls (l, l') ; desgleichen entspricht der Punkt B der Seitenprojection dem Punkt (b, b') . Da die verlangte Hellencurve $+1$ senk-

recht auf CN stehen muss und zugleich durch den Punkt B gehen soll, so ist offenbar PB der Hellenkreis + 1, den man nur noch auf die Grund-Ebenen zu projiciren hat, was ohne besondere Schwierigkeit geschehen kann.

Es ist nun $x = r \cdot \sin \beta$ und da $\angle \beta = \angle \alpha$, auch
 $x = r \cdot \sin \alpha \dots 1)$

Es ist ferner $Ne = fb = r \cdot \sqrt{2}$ (Denn $fb^2 = 2bg^2 = 2 \cdot r^2$)
 $eO = r = Ne \cdot \operatorname{tg} \alpha$

$$r = r \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$

folglich $\alpha = 35^\circ 16'$ und $\sin \alpha = 0,5774 \dots 2)$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung 1), so ist da $r = 1$,
 $x = 0,5774$.

Substituirt man diesen Werth für x in die Gleichung B. § 29, so erhält man, da $z = \frac{1}{4}$:

$$x = 0,5774 = 1 - (\sin \frac{1}{4} \cdot 90^\circ)^f \dots 3)$$

$$0,4226 = (\sin 22\frac{1}{2}^\circ)^f$$

$$f = \frac{\log. 0,4226}{\log. \sin. 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{0,6259295 - 1}{0,58284 - 1} = 0,9 \dots a)$$

folglich ist, da $S = \frac{1}{f^3}$

$$S = \frac{1}{0,9^3} = 1,37 \dots b)$$

Setzt man obigen Werth von f in die Gleichung 3) und ausserdem für z nach einander die Werthe $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$ so erhält man:

für die Hellencurven	+ 0, d. h.	für z = 0	x = 1,0000
" "	+ $\frac{1}{2}$,	" " z = $\frac{1}{8}$	x = 0,7703
" "	+ 1,	" " z = $\frac{1}{4}$	x = 0,5787
" "	+ 2,	" " z = $\frac{2}{4}$	x = 0,2680
" "	+ 3,	" " z = $\frac{3}{4}$	x = 0,0688
" "	+ 4,	" " z = 1	x = 0,0000

Nach §. 16 ist die Helligkeit des hellsten Punktes im Selbstschatten $= \frac{1}{4}$ von der des hellsten Punktes im Licht; die Gleichung b) ergab im vorliegenden Fall für die Helligkeit S des hellsten Punktes den Werth $S = 1,37$, folglich ist die Helligkeit des hellsten Punktes im Selbstschatten

$= \frac{1,37}{4} = 0,34$ und daher $f = \sqrt[3]{\frac{1}{0,34}} = 1,43$. Substituirt man diesen

Werth von f in die Gleichung B, §. 29, so erhält man

für die Hellencurven	— 0, d. h. für $z = 0$,	die Entfernung	$x = 1,0000$
" " "	— 1, " " $z = \frac{1}{4}$	" "	$x = 0,7467$
" " "	— 2, " " $z = \frac{2}{4}$	" "	$x = 0,3907$
" " "	— 3, " " $z = \frac{3}{4}$	" "	$x = 0,1070$
" " "	+ 4, " " $z = \frac{4}{4}$	" "	$x = 0,0000$

Diese Distanzen (vergleiche Fig. 29, Taf. III.) werden wir künftighin stets unseren Beleuchtungsconstructions zu Grunde legen.

§. 36.

Geben wir dem Lichtstrahl (L, L') die allgemein gebräuchliche, conventionelle Richtung (§. 1), so sind die Helligkeitscurven der Kugel, unter Zugrundelegung der im vorigen Paragraph berechneten Distanzen x , folgendermassen zu construiren.

Sind die um a und a' beschriebenen Kreise (Fig. 30, Taf. IV.) die Projectionen einer Kugel, welche die Grund-Ebenen berührt, so werden die Projectionen (L, L') des durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Lichtstrahls sich im Punkt (S, S') des Grundchnittes schneiden müssen. Projiciren wir die Kugel auf die zum Lichtstrahl parallele Seiten-Ebene $l'' S''$, so erhalten wir in der Umklappung derselben den Kreis $pn'' a'' m''$ als Projection der Kugel, während $L'' S''$ die Seitenprojection des durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lichtstrahls ist.

Da die Ebenen der Curven gleicher Helligkeit senkrecht auf der Richtung des Lichtstrahls stehen, die Seiten-Ebene aber eine zu dieser Richtung parallele Lage hat, so müssen jene Ebenen auch senkrecht auf der Seiten-Ebene stehen, also ihre Spuren senkrecht zu $L'' S''$ sein. Theilen wir demnach den Radius $+0 a''$ und $-0 a''$ in dem im vorigen Paragraph angegebenen Verhältniss und ziehen durch die Theilpunkte die Linien $+\frac{1}{2}, +1, +2, +3, +4, -3, -2, -1$ senkrecht zu $+0-0$, so sind diess die Seitenprojectionen der Kreise gleicher Helligkeit auf der Kugel. Es sei bei dieser Veranlassung bemerkt, dass die auf der Lichtseite liegenden Hellencurven von nun an stets mit $+1, +2, +3 \dots$, die auf der Selbstschattenseite liegenden mit $-1, -2, -3 \dots$ bezeichnet sein werden; während $+0$ die Bezeichnung des hellsten Punktes im Licht und -0 die des hellsten Punktes im Selbstschatten sein wird.

Um nun die Curven in Horizontal- und Vertikal-Projection zu bringen, schneide man die Kugel durch Ebenen parallel zur Horizontal-Ebene

z. B. durch die Ebenen I', II', III'... (in der Seitenprojection I'', II'', III''...); die Kreise I, II, III... sind die Horizontal-Projection der betreffenden Schnitte. Bringt man nun die Schnittpunkte dieser Hilfs-Ebenen I'', II'', III'' mit den Curven-Ebenen, z. B. mit — 1 und — 2 auf die betreffenden Hilfskreise I, II, III... und von hier auf I', II', III' in die Vertikal-Projection, so hat man nur noch die so gefundenen Punkte durch stetige Curven zu verbinden.

Die Hellencurven der Kugel sind Kreise, da dieselben aber gegen die Grundebenen geneigt sind, so müssen ihre Projectionen nothwendig Ellipsen sein, die sich auch mit Hilfe der beiden Hauptaxen construiren lassen. Die Mittelpunkte der Helligkeitskreise liegen auf der Linie L'' S'', so z. B. der von +1 in q'', in der Horizontal-Projection auf der Linie LS im Punkt q und in der Vertikalprojection auf L'S' in q'; q und q' sind demnach die Mittelpunkte derjenigen Ellipsen, welche den Projectionen der Hellencurve +1 entsprechen. Der auf der Seiten-Ebene senkrechte Durchmesser des Kreises b'' a''' (oder +1) ist horizontal und daher seine Horizontal-Projection cd = b'' a''' die grosse Axe der betreffenden Ellipse. Der Umriss der Kugel in der Seitenprojection, d. h. der Kreis p m'' a''' n'' ist offenbar die Projection des grössten Kreises mn, es müssen daher die Horizontal-Projectionen b und a der Punkte b'' und a'' auf mn liegen; zugleich ist ab die kleine Axe der Ellipse, weil ab die Projection des auf cd senkrechten Durchmessers ist. Auf gleiche Weise kann man auch die Axen der übrigen Ellipsen und mit Hilfe derselben diese selbst zeichnen.

Da der Lichtstrahl gegen die Grund-Ebenen gleiche Neigung hat, so muss nothwendig die Form der Helligkeitcurven auf der Kugel, d. h. der Ellipsen in der Horizontal-Ebene und in der Vertikal-Ebene, sowie auch ihre Lage gegen die Projection des Lichtstrahls (L, L') die nemliche sein. Macht man daher a' q' = a q = q' b', zieht ef senkrecht zu a' m' durch den Punkt q' und macht ef = cd, so sind wieder ef und a' b' die Axen der Ellipse +1 in der Vertikal-Projection u. s. f.

Von Wichtigkeit sind die Berührungspunkte der Curven mit dem Kugelumriss, wesshalb man dieselben niemals zu construiren unterlassen darf. Die Linie m'' n'' ist offenbar die Seitenprojection des horizontalen Kugelumrisses m h p n r, die Schnittpunkte der Linien + 1/2, +1, +2, +3... mit der Linie m'' n'' müssen daher nothwendig die Berührungspunkte der Curven + 1/2, +1, +2, +3... am horizontalen Umriss m h p n r sein. Da z. B. b'' a''' die Linie m'' n'' in h'' schneidet, so ist h der Berührungspunkt der Curve +1 in der Horizontal-Projection u. s. f.

Da die Vertikal-Projection der Horizontal-Projection ganz gleich ist und die Berührungspunkte der Hellencurven gegen den Punkt m und m' ganz symmetrisch liegen müssen, so kann man dieselben mit dem Zirkel von der Horizontal-Projection in die Vertikal-Projection übertragen.

Der Punkt b'' des Kreises $b''a''$ liegt der Horizontal-Ebene am nächsten, wie leicht einzusehen; er ist daher der tiefste, seine Horizontal-Distanz ist $=l''b''$; die Horizontal-Projection von b'' ist b ; zieht man das Projections-Lot ($b, l'k'$) und macht $l'k' = l''b''$, so ist k' der tiefste Punkt der Curve $i'k'a'h'$. Auf gleiche Weise werden auch die tiefsten Punkte der anderen Curven gefunden.

Es wurde schon oben erwähnt, dass die Beleuchtung der Kugel bezüglich der Projectionen des durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lichtstrahls (L, L') symmetrisch sei, d. h. die Linien LS und $L'S'$ bilden symmetrische Mittellinien für die Helligkeitskreise der Kugel.

Es muss daher auch die Beleuchtung auf dem Bogen ah genau dieselbe sein, wie im Bogen ai . Nun ist aber die Vertikal-Projection von ah die Linie $ra'h'$ und von ai der linkseitige Kugelumriss $ri'h'$; folglich ist auch hier die Beleuchtung die nemliche, d. h. die Berührungspunkte der Hellencurven am Kugelumriss $ri'h'$ und die Durchgangspunkte derselben durch die Linie $ra'h'$ müssen in gleicher Höhe liegen.

Sind in dieser Weise sämtliche Hellencurven der Kugel in beiden Projectionen sammt den hellsten Punkten $+0$ und -0 , den Berührungspunkten u. s. w. gezeichnet, die Curven und Punkte mit den entsprechenden Bezeichnungen versehen, so ist die Kugel, die wir fortan Normal-kugel nennen wollen, zum Gebrauche fertig, und es kann nun mit Hilfe derselben die Helligkeit jedes beliebigen Punktes einer Fläche, sofern diese nur nach einem bestimmten mathematischen Gesetz gestaltet ist, bestimmt, überhaupt die Beleuchtung derselben construirt werden.

Es dürfte nur noch zu bemerken sein, dass man der bessern Uebersicht wegen die Curven der Lichtseite von denen der Selbstschattenseite durch verschiedene Farben unterscheidet, indem man die ersteren etwa roth, die letzteren blau zeichnet.

§. 37.

Es kommt häufig vor, dass man bei den Beleuchtungsconstruktionen eine hohle, d. h. concave Normalkugel zu Hilfe nehmen muss. Wir erhalten aber die Beleuchtung einer solchen, wenn wir das Blatt, auf welchem die nach dem vorigen Paragraphen construirte Normalkugel gezeichnet ist (Fig. 30, Taf. IV.) so umdrehen, dass die Zeichnung die in Figur 31 dargestellte Lage einnimmt, die Vertikal-Projection aber wieder als Vertikal-Projection und die Horizontal-Projection wieder als Horizontal-Projection betrachten.

Ueber die practische Ausführung der zu schattirenden, resp. zu tuschenden Zeichnungen.

§. 38.

Es wird sich nunmehr darum handeln, der Kugel durch mehrfachen Auftrag eines gleichmässigen Tuschtones, des Grundtones, die entsprechende Schattirung zu geben. Es geschieht dies erfahrungsgemäss am besten dadurch, dass man den Grundton nach folgender Tabelle systematisch aufträgt.

Uebersarbeitung.	Es ist anzulegen :	
	im Licht- u. im Selbstschatten.	im Schlagschatten.
1	Von + 4 bis - 3	Alles.
	„ + 3 „ - 2	„
	„ + 2 „ - 1	„
	„ + 1 „ - 0	„
2 ^a	Von + 3 ¹ / ₄ bis - 3 ¹ / ₃	Alles.
	„ + 2 ¹ / ₄ „ - 2 ¹ / ₃	„
	„ + 1 ¹ / ₄ „ - 1 ¹ / ₃	„
	„ + ¹ / ₄ „ - ¹ / ₃	„
2	Von + 3 ¹ / ₂ bis - 0	Alles.
	„ + 2 ¹ / ₂ „ - 0	„
	„ + 1 ¹ / ₂ „ - 0	„
	„ + ¹ / ₂ „ - 0	„
2 ^b	Von + 3 ² / ₄ bis - 3 ² / ₃	Alles.
	„ + 2 ³ / ₄ „ - 2 ² / ₃	„
	„ + 1 ³ / ₄ „ - 1 ² / ₃	„
	„ + ³ / ₄ „ - ² / ₃	„
3		Von + 4 bis + 0
		„ + 3 „ + 0
		„ + 2 „ + 0
		„ + 1 „ + 0

Bei Weitem in den meisten Fällen reicht man mit der 1^{sten}, 2^{ten} und 3^{ten} Ueberarbeitung aus. Ob man auch die mit 2^a und 2^b bezeichnete Ueberarbeitung ausführen will, hängt theils von der Stärke des verwendeten Grundtones, theils von der beabsichtigten Wirkung im Reflexlicht ab; überhaupt ist die zweite Ueberarbeitung verschiedener Modificationen fähig.

Sind die zu schattirenden Gegenstände sehr gross, so wird man mit folgender Ueberarbeitung vollkommen ausreichen und einen vortrefflichen Effect erzielen:

Ueberarbeitung.	Es ist anzulegen:	
	im Licht- u. im Selbstschatten.	im Schlagschatten.
1.	Von + 4 bis - 3	Alles.
	„ + 3 „ - 2	„
	„ + 2 „ - 1	„
	„ + 1 „ - 0	„
2 ^a	Von $3\frac{1}{3}$ bis - 0	Alles.
	„ $2\frac{1}{3}$ „ - 0	„
	„ $1\frac{1}{3}$ „ - 0	„
	„ $\frac{1}{3}$ „ - 0	„
2 ^b	Von $3\frac{2}{3}$ bis - $3\frac{1}{2}$	Alles.
	„ $2\frac{2}{3}$ „ - $2\frac{1}{2}$	„
	„ $1\frac{2}{3}$ „ - $1\frac{1}{2}$	„
	„ $\frac{2}{3}$ „ - $\frac{1}{2}$	„
3.		Von + 4 bis + 0
		„ + 3 „ + 0
		„ + 2 „ + 0
		„ + 2 „ + 0

In Folge dieser Ueberarbeitung erhält

der hellste Punkt + 0 0 Töne,
 „ „ „ - 0 5 „
 die Schattengrenze + 4 12 „
 der Punkt + 0 im Schlagschatten . . 16 „

Diese Töne entsprechen nach den in §. 18 berechneten Werthen von c (Helligkeit) folgenden Helligkeiten:

	für 0 Töne ist die Helligkeit $c = 1,$
" 5	" " " " " " $c = 0,52,$
" 12	" " " " " " $c = 0,27,$
" 16	" " " " " " $c = 0,20,$

welche Zahlen sich ziemlich nähern wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$, also ziemlich genau wie die in §. 15 am Schluss zusammengestellten Werthe verhalten.

§. 39.

Für die praktische Ausführung mögen noch nachstehende Regeln und Andeutungen von Nutzen sein.

Zuerst werden auf einem besondern Blatt die verschiedenen vorbereitenden Constructionen gemacht, bestehend im Aufsuchen und Uebertragen der Helligkeitscurven von der Normalkugel auf die Betreffenden in der Zeichnung in Grund- und Aufriss dargestellten Gegenstände und in der Construction der Schlagschatten. Diese Zeichnung wird sodann mit sämtlichen Lichteurven und Schlagschattenumrissen auf ein zweites Blatt übergepaust und nur mit der Bleifeder so weit fixirt, dass die Linien eben noch sichtbar sind und endlich die Tuschlagen in der im §. 38 angedeuteten Weise aufgetragen.

Bezüglich der zu verwendenden Farben ist zu bemerken, dass man dieselben entweder je nach der natürlichen Farbe, welche die darzustellenden Körper haben, wählt, oder sofern es sich nicht um eigentlich colorirte Zeichnungen, sondern nur um die Formgebung durch Schattirung handelt, verwendet man am besten die verschiedenen Arten von Sepien, Neutraltinte oder Tusch, denen man aber immerhin andere Farben beimischen kann.

Das Papier, auf welchem eine derartige Zeichnung angefertigt werden soll, ist stets auf einem Reissbrett oder auf einer Rahme in der gewöhnlichen Weise aufzuziehen. Jedes Papier, das sonst zum Aquarelliren sich eignet, ist auch für den vorliegenden Zweck brauchbar. Das Brett oder die Rahme sollte stets in schiefe pultförmige Lage gebracht werden, damit beim Auftragen der Töne auf grosse Flächen, was stets mit vollem Pinsel geschieht, die überflüssige Farbe nachfliessen kann.

Nur wenn man die Farbe so nass als möglich, d. h. mit vollem Pinsel aufträgt, wird man namentlich bei grösseren Flächen klare und durchsichtige Töne erhalten. Auch bei kleineren Flächen sollte man nie zu trocken malen, weil die Töne in diesem Fall trübe und unklar werden und zwar um so mehr, je dunkler der verwendete Ton ist.

Ueber Flächen, welche schon mehrere Töne erhalten haben, muss man die folgenden möglichst leicht und flüchtig auftragen, weil man bei hartem Aufsetzen des Pinsels und bei langsamem Ueberpinseln die schon aufgetragenen Töne mehr oder weniger wieder hinweg wäscht, so dass in Folge dessen die Flächen die ihnen zukommenden Dunkelheiten nicht erhalten.

Der Grundton muss in der gehörigen, d. h. in der für die ganze Zeichnung ausreichenden Masse zubereitet werden; namentlich wenn gemischte Farben zur Verwendung kommen, weil sich dieselben nur schwer in gleicher Qualität wieder herstellen lassen. Ist der geeignete Tushton in der gehörigen Masse zubereitet, so lässt man ihn einige Minuten stehen, damit die schwereren Farbentheile sich setzen; der klare Theil der Farbe wird dann als zum Gebrauche fertig abgegossen.

Sepia und Neutraltinte haben die Eigenschaft, dass wenn sie sehr nass aufgetragen werden, nach dem Auftrocknen am Rande der benetzten Fläche dunkle Conturen hinterlassen und zwar um so mehr, je dunkler zugleich der aufgetragene Ton war. Diese schwarzen Ränder erscheinen namentlich auch dann, wenn eine Fläche öfters bis an dieselbe Grenze angelegt wird, wie z. B. die Schlagschatten. Man kann diesem Uebelstand dadurch begegnen, dass man je den folgenden Ton nicht ganz bis an den Rand des vorhergehenden aufträgt, sondern etwa 1^{mm} davon entfernt bleibt. Uebrigens sind diese dunkeln Ränder auch nachträglich leicht dadurch zu entfernen, dass man sie mit reinem Wasser vorsichtig befeuchtet und dann mit trockenem Finger gegen die dunkle Fläche herein leicht darüber weg fährt.

Der Tusch, der sowohl rein für sich, als auch mit andern Farben, namentlich mit Karmin, preussisch Blau, Gummi guttae u. s. w. gemischt zu vorliegendem Zweck sehr geeignet ist, hat manchmal die schlimme Eigenschaft, dass er, so oft man den Pinsel eingetaucht hat, und wieder auf das Papier bringt, jedesmal einen schmutzigen Fleck zurücklässt, der sich kaum wieder entfernen lässt. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes gebraucht man die Vorsicht, dass man die aus der Schale geschöpfte Farbe immer zuerst auf einem bereitliegenden Papier abstreicht, und erst von da auf die Zeichnung überträgt.

Will man einen ziemlich dunkeln Ton auf eine grosse Fläche auftragen, was nicht mit allen Farben, ohne dass Flecken oder Streifen entstehen, gleich gut geschehen kann, so befeuchtet man erst die ganze Fläche mit reinem Wasser, lässt sie so weit abtrocknen, bis sie nicht mehr glänzt, und bringt nunmehr den Farbenton auf das noch etwas feuchte Papier.

Es ist selbstverständlich, dass man die schönsten Bilder erhält, wenn man möglichst viele Hellencurven und einen schwachen Grundton anwendet, weil auf diese Weise die Abstufungen der einzelnen Tonlagen bei sphärischen Flächen am wenigsten auffallend und sichtbar sein werden. Allein man wird sich in den meisten Fällen mit 4, höchstens 8

Helligkeitscurven (den hellsten Punkt mit eingerechnet) begnügen können, und zwar einestheils, weil das Construiren derselben zu umständlich und zeitraubend wird, und weil andertheils, wie wir später sehen werden, die Curven um so mehr sich zusammendrängen, je kleiner der Halbmesser der sphärischen Flächen ist, so dass es schliesslich nicht mehr möglich ist, dieselben alle zu zeichnen oder beim Tuschen mit dem Pinsel genau einzuhalten, und endlich weil die, namentlich bei grösserer Intensität des Grundtones, etwas harten Uebergänge und Abstufungen, die jedoch gewöhnlich nur an grösseren Gegenständen besonders auffallend werden, sich durch nachträgliche Uebearbeitung leicht beseitigen lassen.

Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen, entweder dadurch, dass man dicht an die dunklere Stelle den mit etwas Wasser verdünnten Grundton ansetzt und gegen die hellere Stelle hin verwäscht, und dieses Verfahren bei jedem Uebergang wiederholt; oder dadurch, dass man mit dem, mit dem Grundton benetzten, je nach Umständen mehr oder weniger trockenen Pinsel, die dunklere Fläche mit der helleren zusammenschattirt und zwar in Strichlagen, die man parallel zur Richtung der Lichteurve macht.

II. Abtheilung.

§. 40.

Alle Flächenelemente, welche von den Lichtstrahlen unter gleichen Winkeln getroffen werden, für welche also der Einfallswinkel des Lichtstrahls gleich ist, haben gleiche Helligkeit; parallele Ebenen sind demnach gleich hell. Berührt die Ebene MN (Fig. 32. Taf. V.) die sphärische Fläche T im Punkte a und die mit MN parallele Ebene $M'N'$ die Kugel im Punkt a' , so müssen nothwendig die Punkte a und a' gleiche Helligkeit haben. Errichtet man auf den Ebenen MN und $M'N'$ in den Punkten a und a' Lote ab und $a'b'$, so sind diese parallel und normal auf den berührten Flächen; die Verlängerung von $a'b'$ geht bekanntlich zugleich durch den Kugelmittelpunkt.

Diese Betrachtung zeigt uns im Allgemeinen den Weg, welchen wir bei der Lösung der folgenden Aufgaben über Beleuchtungsconstructions einzuschlagen haben. Soll nemlich die Helligkeit irgend eines Punktes a einer Fläche T bestimmt werden, so construirt man die Normale ab , ziehe durch den Kugelmittelpunkt eine Linie $a'b'$ parallel zu ab , und bestimme deren Durchschnittspunkt a' mit der Kugeloberfläche. Der Punkt a' zeigt uns alsdann die Helligkeit des Punktes a , weil in beiden die Helligkeit dieselbe ist.

Berührt eine Ebene eine Fläche längs einer Linie, wie dies bei Cylinder und Kegelflächen der Fall ist, so ist die Helligkeit längs dieser Berührungslinie die gleiche und zwar die der berührenden Ebene.

Berühren sich zwei Flächen längs einer Curve, so haben beide Flächen in dieser Curve die gleiche Beleuchtung. So z. B. können wir uns bei Umdrehungsflächen für jeden Parallelkreis eine Kugel denken, welche die Umdrehungsfläche in eben diesem Parallelkreis berührt, und deren Mittelpunkt auf der Axe jener Fläche liegt. Beide Flächen müssen nothwendig im Berührungskreis gleiche Beleuchtung haben.

Da die Krümmung der Kugeloberfläche in allen Punkten die gleiche ist (der Krümmungshalbmesser ist ja für alle der nemliche), so muss sie offenbar immer dieselbe Beleuchtung zeigen, man mag sie drehen wie man will; der Durchschnittspunkt des in seiner Verlängerung durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lichtstrahls mit der Kugeloberfläche ist stets der hellste Punkt, und die Hellencurven gruppieren sich stets in gleicher Weise um diesen Punkt, vorausgesetzt dass die Richtung und Intensität des Lichtes dieselbe bleibt; da ausserdem alle Kugeln einander ähnlich sind, so ist unter dieser Voraussetzung auch die Beleuchtung derselben immer die nemliche. Die Hellencurven können demnach auf grössere oder kleinere Kugeln von der Mormalkugel unmittelbar proportional übertragen werden.

A.

Beleuchtung von Ebenen.

§. 41.

a) Die Ebenen sind senkrecht zu den Grund-Ebenen.

Solche Ebenen berühren die Kugel offenbar in den Umrissen, und zwar am horizontalen oder vertikalen Umriss, je nachdem sie senkrecht zur Horizontal-Ebene oder zur Vertikal-Ebene sind. Um z. B. die Helligkeit der Seitenflächen des Prismas (Fig. 33. Taf. V.) zu bestimmen, ziehe man $AF \parallel af$ an den horizontalen Kugelumriss; die Helligkeit des Berührungspunktes m ist dann die der Ebene af , und ebenso haben die Ebene $ab, bc \dots$ die Helligkeit der Punkte $n, o, p \dots$ wenn $AB \parallel ab, BC \parallel bc$ u. s. f. Auf ähnliche Weise findet man die Helligkeit der Deckfläche ($ad, a'd'$) des Prismas, welche senkrecht zur Vertikal-Ebene ist, wenn man $A'D' \parallel a'd'$ an den vertikalen Kugelumriss berührend zieht; die Helligkeit der Deckfläche ist daher dieselbe, welche der Punkt q hat.

b) Die Ebenen haben beliebige Neigung gegen die Grund-Ebenen.

Die Seiten der Pyramide (Fig. 34. Taf. V.) sind gegen beide Grund-Ebenen schräg geneigt. Man findet die Helligkeit solcher Ebenen am einfachsten dadurch, dass man durch den Kugelmittelpunkt Linien parallel zu den Normalen auf jenen Ebenen zieht, und die Durchschnittspunkte derselben mit der Kugeloberfläche bestimmt. Sind die Spuren der Ebenen gegeben, so stehen bekanntlich die Projektionen der Normalen senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebenen. Im vorliegenden Fall sind allerdings die Horizontalspuren $a, b, bc, cd \dots$ der

Seitenfläche der Pyramide bekannt, mn , vw , xy sind daher die Horizontalprojectionen der Normalen auf bcs , abs , cds ... Dagegen sind die Vertikal-Spuren der Seitenflächen nicht gegeben. Wir können uns aber sehr leicht Linien verschaffen, welche parallel mit diesen Spuren sind, wenn wir die Pyramidenseiten durch Ebenen parallel zur Vertikal-Ebene schneiden. Die zur Vertikal-Ebene parallele Ebene be z. B. schneidet die Seite bcs in der Linie $b'e'$; die zu $b'e'$ senkrechte Linie $m'n'$ ist daher die Vertikal-Projection einer Lotlinie auf $(bcs, b'e's')$. Ziehen wir nun durch den Mittelpunkt der Kugel eine Linie $(po, p'o')$ parallel mit $(mn, m'n')$, so haben wir nur noch deren Schnittpunkte mit der Kugeloberfläche zu zeichnen, was sich am einfachsten in folgender Weise ausführen lässt. Die horizontal projicirende Ebene po der Linie $(po, p'o')$ schneidet die Kugel in einem grössten Kreis; dreht man jene Ebene um die Axe o , bis sie die zur Vertikal-Ebene parallele Lage oq einnimmt, so fällt der grösste Kreis mit dem vertikalen Kugelriss zusammen, während offenbar die Linie $(op, o'p')$ nunmehr die Lage $o'q'$ einnimmt. Der Punkt r' ist der Schnittpunkt der Linie $o'q'$ mit dem grössten Kreis, folglich auch mit der Kugeloberfläche. Bringen wir die Linie $o'q'$ wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück d. h. ziehen wir die mit dem Grundschnitt parallele Linie $r't'$, so ist t' der gesuchte Schnittpunkt, und seine Helligkeit die der Ebene $(bcs, b'e's')$. Auf gleiche Weise findet man auch die Helligkeiten der andern Pyramidenseiten.

Fig. 35. Taf. V. zeigt einen Fall, in welchem weder die Horizontal- noch die Vertikal-Spuren der Ebenen gegeben sind. Die mit der Vertikal-Ebene parallele Ebene mn schneidet die Ebene $(abcd, a'b'c'd')$ in $m'n'$, die zur Horizontal-Ebene parallele Ebene $p'q'$ in $p'q$. Die Linie t' senkrecht zu $m'n'$ und t senkrecht zu $p'q$ sind die Projectionen der Normalen auf der Ebene $(abcd, a'b'c'd')$. Der Schnittpunkt einer mit (t, t') parallelen Linie, die zugleich durch den Mittelpunkt der Normalkugel geht, mit der Oberfläche der letztern, liefert die entsprechende Helligkeit.

Haben mehrere Ebenen gleiche Grundneigung, so lässt sich die Construction vereinfachen. Steht z. B. das Dodekaëder Fig. 36. Taf. V. mit einer Seite auf der Horizontal-Ebene, so haben offenbar die Seiten I, II, III, IV, V einerseits und VI, VII, VIII, IX, X andererseits gleiche Grundneigung. Man erhält diese leicht, wenn man z. B. das bei b_0 rechtwinklige $\triangle a_0 b_0 d_0$ zeichnet, dessen Seite $a_0 b_0 = ab$ und dessen Hypotenuse $a_0 d_0 =$ der wahren Länge von abd . h. = cr ist; der Winkel α ist sodann die Neigung der Seiten I, II ... V gegen die Horizontal-Ebene; die oberen Seiten VI, VII, VIII ... X haben eine zu den vorigen symmetrische Lage und Neigung, wie die Linie $a''d''$ zeigt. Wäre eine der Seiten VI, VII ... senkrecht zur Vertikal-Ebene, so müsste ihre Vertikalprojection parallel zu $a''d''$ sein und ihre Helligkeit wäre bestimmt durch den Punkt A' , wenn $MN \parallel$ mit $a''d''$ ist; da die genannten Ebenen gleiche Neigung haben, müssen sie nothwendig die Kugel in Punkten des Kreises $A'B'$ berüh-

ren, oder die mit den Normalen dieser Ebenen parallel gezogenen Radien müssen die Kugeloberfläche in dem Kreis A'B' durchdringen. Nun sind aber op , pq , $qr \dots$ Linien parallel zu den Spuren der Seiten VI, VII... X, die Normalen haben daher die Richtung uf , vh , $wi \dots$ zieht man parallel mit denselben durch den Mittelpunkt der Kugel Linien F, H, L, N bis zum Durchschnitt mit dem Kreis AB, so geben die Schnittpunkte die den verschiedenen Seiten des Dodekaeders entsprechenden Helligkeiten an. Gleicherweise sind auch die Helligkeiten der unteren Seiten zu finden.

B.

Beleuchtung krummer Flächen.

1. Bestimmung der Helligkeit von Cylinder- und Kegelflächen.

§. 42.

Cylinder- und Kegelflächen werden von Ebenen stets in Mantellinien berührt, sie haben daher längs einer Mantellinie dieselbe Helligkeit, welche die berührende Ebene hat; oder wenn die Helligkeit irgend eines Punktes P einer Kegel- oder Cylinderfläche bekannt ist, so hat diese in der durch diesen Punkt gehenden Mantellinie die nemliche Helligkeit wie der Punkt P.

a. Cylinderflächen.

§. 43.

Der Normalschnitt der Cylinderfläche sei ein Kreis.

Die einem solchen Cylinder eingeschriebene Kugel berührt denselben in einem Kreis K, dessen Ebene senkrecht zur Axe des Cylinders ist. Denken wir uns eine Berührungs-Ebene am Cylinder, so berührt diese offenbar die eingeschriebene Kugel in einem Punkt P, der auf dem Kreis K liegen muss, und den Cylinder in einer Mantellinie L, welche durch den Punkt P geht; der Punkt P der Kugel und die Mantellinie L des Cylinders haben demnach gleiche Helligkeit, weil beide in derselben Berührungs-Ebene liegen; aber auch jede andere Mantellinie hat (aus demselben Grunde) die gleiche Helligkeit, wie der Punkt des Kreises K, durch welchen sie geht.

Sind die Cylinderflächen zugleich parallel zu einer der Grund-Ebenen

z. B. zur Vertikal-Ebene (Fig. 37. Taf. VI.), so sind $a'b'$, $c'd'$, $e'f'$ etc. die normalen Querschnitte in der Vertikal-Projection; in diesen Kreisen müsste offenbar eine Kugel, welche den Cylindern einbeschrieben ist, diese berühren. Kennen wir nun die Helligkeiten der berührenden Kugeln in diesen Kreisen, so haben wir nur durch die auf diesen Kreisen liegenden Helligkeitspunkte Mantellinien zu ziehen. Die betreffenden Helligkeitspunkte aber finden wir leicht auf der Normalkugel, wenn wir uns dieselbe durch Cylinder umhüllt denken, welche mit den gegebenen parallel sind. Selbstverständlich sind in diesem Fall auch die Berührungskreise parallel den Kreisen $a'b'$, $c'd'$, $e'f'$ Ziehen wir daher die Linie $q't' \parallel a'b'$, $p's' \parallel c'd'$, $r'u' \parallel e'f'$ so sind die auf $q't'$, $p's'$, $r'u'$ liegenden Helligkeitspunkte proportional auf $a'b'$ resp. $c'd'$, $e'f'$... zu übertragen.

Unter Helligkeitspunkten verstehen wir hier (wie auch im Folgenden stets) die Schnittpunkte von Linien (wie z. B. $p's'$, $q't'$...) mit den Helligkeitscurven der Kugel. Das Uebertragen kann in der Art geschehen, dass man z. B. $a'F = q't'$ macht, und die Helligkeitspunkte von $q't'$ auf $a'F$ mit dem Zirkel überträgt, den Punkt F mit b' verbindet und durch die Theilpunkte der Linie $a'F$ Parallelen zu Fb' zieht; die Schnittpunkte der letztern mit $a'b'$ sind die gewünschten Helligkeitspunkte; man hat nun nur noch durch dieselben Mantellinien zu ziehen und mit den entsprechenden Ziffern und Zeichen zu versehen.

Die Ellipse AB ist die Horizontal-Projection des Schnittes $a'b'$; dergleichen ist $qQtT$ die Horizontal-Projection des mit dem vorigen parallelen Schnittes $q't'$ der Normalkugel; eine mit dem Cylinderstück AB parallele Cylinderfläche würde demnach die Kugel in dem grössten Kreis $qQtT$ berühren, oder umgekehrt würde eine dem Cylinder AB einbeschriebene Kugel denselben in der Ellipse AB berühren, die Helligkeit in beiden Berührungslinien ist demnach dieselbe. Um die Helligkeitspunkte von der Ellipse $qQtT$ auf die Ellipse AB zu übertragen, übertrage man dieselben entweder auf die Axe TQ oder auf eine mit ihr parallele Linie CD , und von da auf AB , und ziehe sodann die entsprechenden Mantellinien.

Für das Cylinderstück EF findet man die Beleuchtung genau wie vorhin für die Vertikal-Projection, indem man nur $QT \parallel EF$ zu ziehen und die betreffenden Beleuchtungspunkte von QT auf EF zu übertragen braucht.

§. 44.

Ist der Cylinder (von kreisförmigem Normalschnitt) gegen beide Grund-Ebenen geneigt (Fig. 38. Taf. VI.), so können wir uns die Projection des Kreises, in welchem ein mit $(RS, R'S')$ paralleler Cylinder die Normalkugel berührt, leicht verschaffen, wenn wir durch den Kugel-

mittelpunkt die Linie $(MN, M'N')$ parallel mit $(mn, m'n')$ ziehen, die Projectionen desjenigen grössten Kreises (cd, gh) zeichnen, der senkrecht auf $(MN, M'N')$ steht, was am leichtesten mit Hilfe der projicirenden Ebenen MN und $M'N'$ geschehen wird. In der Umklappung der horizontalprojicirenden Ebene MN erhält man den Kreis K als Schnittkreis und MN'' ist die Umklappung der durch den Mittelpunkt gehenden Linie; der Durchmesser $a''b''$ (senkrecht auf MN'') ist die Umklappung des Berührungskreises, der nun in ähnlicher Weise, wie in §. 36 gezeigt wurde, in die Horizontal- und Vertikal-Projection gebracht werden kann. Die erhaltenen Ellipsen $acbd$ und $eg'f'h$ sind nun die Projectionen eines Kreises, in welchem ein zu $(RS, R'S')$ paralleler Cylinder die Kugel berührt. Selbstverständlich müssen die Projectionen desjenigen Kreises $(xz, x'z')$, in welchem eine dem Cylinder eingeschriebene Kugel diesen berührt, den Projectionen des Kreises (cd, gh) ähnlich sein; doch braucht man diese nicht zu construiren, da man die Helligkeitspunkte des Bogens cad auf die Axe cd und von da auf die Axe xz übertragen kann. Man hat sodann nur noch die betreffenden Mantellinien zu ziehen. In der Vertikal-Projection ist das Verfahren das gleiche.

§. 45.

Der normale Querschnitt des Cylinders sei eine beliebige Curve.

Die Cylinderfläche sei parallel zu einer der Grund-Ebenen, z. B. zur Vertikal-Ebene (Fig. 39. Taf. VI.). Die Kugel bac berührt die Cylinderfläche im Punkt a , beide Flächen müssen daher im Punkt a die nemliche Helligkeit haben. Zeichnet man die Berührungs-Ebene mn im Punkt a , so hat die damit parallele Berührungs-Ebene MN an der Normalkugel die Helligkeit des Punktes A ; dieselbe Helligkeit muss aber auch die Berührungs-Ebene mn und die Mantellinie $(a, a'a'')$ haben. Das Verfahren ist demnach einfach folgendes: ziehe an den Kugelumriss K eine Tangente MN (womöglich an einen der Punkte, in welchen die Hellencurven der Kugel deren Umriss berühren), parallel mit MN an die Cylinderspur so viele Tangenten (mn) als möglich sind; die durch die Berührungspunkte a, d, e gehenden Mantellinien $a'a'', d'd'', e'e''$ haben sodann die Helligkeit des Punktes A .

Hat die Cylinderfläche zu einer der Grund-Ebenen eine schräge Lage, wie z. B. das Cylinderstück $abcd$ (Fig. 40. Taf. VI.), so schneide man dasselbe durch eine normale Ebene mn und lege durch den Kugelmittelpunkt eine mit mn parallele Ebene MN . Berührt nun eine Ebene den Normalschnitt mn , so wird an MN stets eine parallele Berührungs-Ebene möglich sein. Klappt man die Ebenen mn und MN um, so erhält man einerseits das Profil $efgh$, andererseits den Halbkreis NEM . Legt man an f und F parallele Tangenten, so sind dies die Spuren der die

Schnitte mn und MN berührenden Ebenen in der Umklappung. Der Punkt F , in seine ursprüngliche Lage zurückgebracht, ergibt den Punkt f'' (mit der Helligkeit $+1^{3/4}$). Dieselbe Helligkeit, welche f'' hat, hat auch der Punkt f , beziehungsweise die durch f gehende Mantellinie. Die Tangente im Punkt g ist parallel zu der in f , also hat auch die durch g gehende Mantellinie die Helligkeit des Punktes f'' der Normalkugel (d. h. ebenfalls $+1^{3/4}$).

§. 46.

Ist der normale Querschnitt des Cylinders eine beliebige Curve und ist seine Axe gegen beide Grund-Ebenen geneigt (Fig. 41. Taf. VII.), so verschaffe man sich die Projectionen des Normalschnittes, indem man den Cylinder durch eine Ebene FGH senkrecht zur Richtung seiner Axe oder seiner Mantellinien schneidet. Legt man zugleich durch den Kugelmittelpunkt eine mit FGH parallele Ebene und construirt deren Durchschnitt mit der Kugeloberfläche, was in der schon mehrfach erwähnten Weise geschehen kann, so hat man nur an die Projection des normalen Cylinderschnittes Tangenten $PQ, M'N' \dots$ zu ziehen, die damit parallelen Tangenten $pq, m'n' \dots$ an die Kugelschnitte berühren diese in $b, a' \dots$. Die Punkte $B, A' \dots$ und daher auch die durch B, A' gehenden Cylinder-Mantellinie haben die Helligkeit der Punkte b, a' u. s. f.

§. 47.

Beleuchtung hohler Cylinder.

Die concave Cylinderfläche abc (Fig. 42. Taf. VI.) wird von der Kugel in dem Bogen $(abc, a'b'c')$ berührt; dass hier zur Construction der Beleuchtung die concave Normalkugel zur Anwendung kommen muss, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Man hat demnach nur durch die auf $a'b'c'$ liegenden Helligkeitspunkte Mantellinien zu ziehen, und diese mit den gleichen Namen und Vorzeichen zu versehen. Ist der Durchmesser der Normalkugel kleiner oder grösser als $a'c'$, so müssen selbstverständlich die Helligkeitspunkte proportional auf $a'c'$ übertragen werden.

Fig. 43. Taf. VII. zeigt ein weiteres Beispiel der Beleuchtung hohler Cylinderflächen, das namentlich auf die Canelirungen von Säulenschäften anwendbar ist. Auf den Cylinder $A'B'$ passt die eben beschriebene Construction. Die den Cylindern einbeschriebenen Kugeln $w, v, x, y, z \dots$ berühren diese in den Bögen $(boe, b'e'), (dpe, d'e'), (hri, h'i') \dots$. Da aber von der Mitte $p, q, r \dots$ des Berührungsbogens aus nach links und

nach rechts die Beleuchtungspunkte auf allen Berührungskugeln gleiche Lage haben, so hat man nur von den Bogenmitten w' , v' , y' , z' ... nach links die auf $x'f'$, und nach rechts die auf $x'g'$ liegenden Helligkeitspunkte aufzutragen. Selbstverständlich haben nur diejenigen Punkte praktischen Werth, welche auf die sichtbaren Theile der Kanelirungen fallen.

b. Kegelflächen.

§. 48.

Der normale Querschnitt der Kegelfläche sei ein Kreis. Da wir uns einer solchen Kegelfläche stets eine Kugel einbeschrieben denken können, welche dieselbe in einem zur Kegelaxe senkrechten Kreise berührt, die Helligkeit des Kegels und der Kugel in diesem Kreise aber die gleiche ist, und demnach nur durch die Helligkeitspunkte jenes Berührungskreises Mantellinien zu ziehen sind, so werden die zu besprechenden Beleuchtungsconstructionen von Kegelflächen, nach dem, was bereits über die Cylinderflächen gesagt wurde, keine erheblichen Schwierigkeiten mehr machen.

§. 49.

Die Axe des Kegels steht senkrecht zur Horizontal-Ebene (Fig. 44. Taf. VII.).

Die Kugel efg berührt den Kegel $a's'b'$ im Kreis $c'd'$, auf beiden Flächen ist demnach die Beleuchtung im Kreis $c'd'$ die gleiche. Wir finden aber die Helligkeitspunkte auf $c'd'$, wenn wir an die Normalkugel eine mit $a's'$ parallele Tangente $P'S'$ legen, durch den Berührungspunkt A' die Linie $A'B'$ senkrecht zur Axe SS' ziehen und die Helligkeitspunkte der Linie $A'B'$ auf $c'd'$ proportional übertragen. Denn die der Kegelfläche $a's'b'$ gleiche Kegelfläche $P'S'Q'$ berührt die Normalkugel in einem Kreis $A'B'$, der offenbar die gleiche Lage auf ihr hat, wie der Berührungskreis $c'd'$ auf der Kugel efg , die Beleuchtung muss daher in $A'B'$ und $c'd'$ die gleiche sein. Der Kreis AB ist die Horizontal-Projection des Berührungskreises $A'B'$; die Spitze des Kegels in der Horizontal-Projection ist der Punkt S . Man hätte demnach nur durch die auf dem Kreis AB liegenden Helligkeitspunkte Mantellinien zu ziehen. Da aber auf dem Kegel asb die Beleuchtung dieselbe sein muss, so beschreibe man aus s als Mittelpunkt den mit AB gleich grossen Kreis $a''b''$, übertrage auf ihn die Helligkeitspunkte des Kreises AB , und ziehe durch dieselben Mantellinien.

Es wird nun nach diesen Bemerkungen leicht sein, die Beleuchtung des aus einzelnen abgestumpften Kegeln bestehenden Körpers (Fig. 45. Taf. VI.) zu bestimmen. Zieht man nemlich die Tangenten $MN \parallel mn$, $PQ \parallel pq$, $RS \parallel rs$ u. s. f. und durch die Berührungspunkte $D, E \dots$ die Linien $DC, EF \dots$ parallel zu $ab, dc \dots$ also senkrecht zur Axe des Körpers, so haben offenbar die Mantellinien des Kegelstumpfs $abcd$ die Helligkeit der Helligkeitspunkte von DC , die Mantellinien des Kegelstumpfs $defe$ die Helligkeit der Helligkeitspunkte von EF u. s. f.

§. 50.

Ist die Axe der Kegelfläche parallel zu einer der Grund-Ebenen, gegen die andere geneigt, der Normalschnitt ein Kreis, so ist die Konstruktion von der vorigen nicht wesentlich verschieden. Umschreibt man nämlich der Normalkugel einen Kegel $A'S'B'$, der dem gegebenen gleich und parallel ist (Fig. 46. Taf. VII.), so berührt dieser die Kugel im Kreis $(AB, A'B')$. Zieht man $a''b'' \parallel A'B'$, so muss offenbar eine dem Kegel $a's'b'$ einbeschriebene Kugel letzteren im Kreis $a''b''$ berühren und die Beleuchtung hier demnach dieselbe, wie in $A'B'$ sein. Man übertrage daher die Helligkeitspunkte von $A'B'$ auf $a''b''$ oder unmittelbar auf $a'b'$, wenn die Grundfläche $a'b'$ selbst ein Schnitt senkrecht zur Axe des Kegels ist. Unter dieser Voraussetzung können wir auch die Helligkeitspunkte von der Ellipse AB (als H.Proj.) von $A'B'$ unmittelbar auf die Ellipse ab übertragen. Wäre dies nicht der Fall, so müsste man den Kreis $a''b''$ in die H.Proj. bringen und hier die Helligkeitspunkte auftragen. Zieht man durch dieselben die entsprechenden Kegelmantellinien, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 51.

Ist die Axe des Kegels gegen beide Grund-Ebenen geneigt, der Normalschnitt aber wieder ein Kreis, so umschreibe man der Normalkugel einen dem gegebenen gleichen und parallelen Kegel und construire deren Berührungslinie, was auf folgende Weise geschehen kann: (Fig. 47. Taf. VII.)

Man ziehe durch den Kugelmittelpunkt (o, o') eine Linie $(AS, A'S')$ parallel mit der Axe $(as, a's')$ des Kegels und klappe die projicirenden Ebenen, z. B. TS und AS in die gleichnamige Projections-Ebene, also in die Horizontalebene um, wodurch man einerseits den Schnitt mit dem Kegel cbS'' , andererseits den mit der Kugel d. h. den Kreis GBC erhält. Zieht man an den Kreis GBC die Tangenten CS'' und BS'' parallel mit cS'' und bS'' , so ist $CS''B$ ein die Kugel GBC berührender, dem Kegel $cS''b$

gleicher Kegel. Der Kegel $CS''B$ berührt die Kugel GBC im Kreis BC , dessen Horizontal-Projection offenbar die Ellipse DE ist; in DE berührt demnach ein Kegel die Normalkugel $(0,0')$ der dem Kegel (S, S') gleich und parallel ist. Ist die Grundfläche de ein Normalschnitt, so können nunmehr die auf DE liegenden Helligkeitspunkte sofort auf de in der schon mehrfach erwähnten Weise übertragen werden.

Zeichnet man die Verticalprojection zu DE , so erhält man dadurch die auf $d'e'$ zu übertragenden Helligkeitspunkte, durch die man nur noch Mantellinien zu ziehen braucht.

§. 52.

Der Querschnitt des Kegels ist eine beliebige Curve.

Man wird für diesen Fall die Helligkeit beliebiger Mantellinien dadurch erhalten, dass man an dieselben Berührungs-Ebenen legt und deren Helligkeit bestimmt, da bekanntlich die Mantellinie, in welcher eine Kegelfläche von einer Ebene berührt wird, die Helligkeit der letzteren hat.

Die Horizontalspur der Ebene, welche die Kegelfläche (Fig. 48. Taf. VII.) in $(as, a's')$ berührt, ist die Gerade mn ; die zugehörige Vertikalspur, oder einfacher eine mit der Vertikalspur parallele Gerade $p'q'$ erhalten wir, wenn wir die Berührungs-Ebene durch eine mit der Vertikal-Ebene parallele Ebene op schneiden. Die in der Berührungs-Ebene liegenden Geraden mn und as werden in q und f , oder in der Vertikal-Projection in q' und f' geschnitten; die Verbindungslinie $q'f'$ ist demnach eine zur Vertikalspur der Berührungs-Ebene parallele Gerade und $rt \perp mn$ und $r't' \perp p'q'$ sind die Projectionen einer Normalen auf der Berührungs-Ebene. Mit Hilfe dieser Normalen ist nun die Helligkeit der Berührungs-Ebene, resp. der Mantellinie $(as, a's')$, wie oben §. 41^b beschrieben, leicht zu bestimmen. Wir ziehen nemlich durch den Mittelpunkt der Normalkugel $(0,0')$ die Linie $(oR, o'R')$ parallel mit $(rt, r't')$, drehen die horizontal projicirende Ebene oR um die Axe $(0,0')$, bis sie die zur Vertikal-Ebene parallele Lage oR'' einnimmt; der grösste Kreis oR der Kugel fällt nunmehr mit dem vertikalen Kugelumsriss zusammen, während $o'R'$ die Lage $o'R'''$ einnimmt und den Kugel-Umriss in b'' schneidet, der, wenn man die Gerade $(oR'', o'R''')$ in die ursprüngliche Lage zurückbringt, die Lage (b, b') einnimmt. Die Helligkeit dieses Punktes ist nun die der Berührungsebene mn , resp. der Mantellinie $(as, a's')$ u. s. f.

2) Konstruktion der Beleuchtung von Umdrehungsflächen.

§. 53.

Die Drehungsaxe steht senkrecht auf einer der Grund-Ebenen.

Die durch Drehung des Kreises ($d'ef$, $d'e'f'e'$) (Fig. 49. Taf. VIII.) um die zur Horizontalebene senkrechte Axe ($s, s''s'$) entstandene Wulstfläche wird von dem Drehungskegel $a'b's'$ in dem Kreis (ab , $a'b'$) berührt; der mit $a's'b'$ gleiche Kegel $A'S'B'$ berührt die Normalkugel im Kreis (AB , $A'B'$); in den Kreisen (ab , $a'b'$) und (AB , $A'B'$) muss daher auf der Umdrehungsfläche und der Kugel die Helligkeit die gleiche sein und sind demzufolge die auf $A'B'$ liegenden Hellenpunkte auf $a'b'$ proportional zu übertragen.

Aus dem Ebengesagten ergibt sich unmittelbar der für Drehungsflächen allgemein gültige Satz, dass wenn man durch den Mittelpunkt der Normalkugel eine Linie parallel zur Axe der Umdrehungsfläche zieht, die Beleuchtung derjenigen Parallelkreise der Umdrehungsfläche und der Kugel gleich sind, für welche die von den Axen aus gezogenen, jene Flächen in den betreffenden Parallelkreisen berührenden Tangenten parallel sind; so ist z. B. im vorliegenden Fall, da die Tangente t' der Umdrehungsfläche und die Tangente T' der Kugel parallel sind, die Beleuchtung in $a'b'$ und $A'B'$ die gleiche. Da jeder Parallelkreis der Umdrehungsfläche eine andere Tangente in $e'd'e'$ hat, so muss offenbar auch die Beleuchtung in jedem derselben eine andere sein, da die Lage der Helligkeitspunkte auf den mit $A'B'$ parallelen Parallelkreisen der Kugel eine verschiedene ist.

Die Kreise ab und AB sind die Horizontal-Projectionen der Berührungskreise $a'b'$ und $A'B'$, die Beleuchtung ist demnach auch hier die gleiche und wird man demgemäss die Helligkeitspunkte vom Kreis AB auf den Kreis ab (nach §. 49) zu übertragen haben. Rascher und einfacher wird indess folgendes Verfahren zum Ziele führen, wenn die Hellenkurven der Horizontalprojectionen zu bestimmen sind. Wir können uns nemlich auch die Wulstfläche durch Drehung der Kugel dpf um die Axe s entstanden denken; bei dieser Drehung berührt die Kugel die Wulstfläche stets in einem grössten Kreis $df, mn\dots$, deren Ebenen erweitert durch die Drehungsaxe gehen. Kugel und Umdrehungsfläche haben daher in diesen Kreisen die nemliche Beleuchtung; die Beleuchtung in mn ist aber die gleiche, welche die Normalkugel in MN hat, wenn $MN \parallel mn$; ebenso ist auch die Beleuchtung in op und OP , in qr und QR u. s. f. die gleiche, wenn $OP \parallel op$ und $QR \parallel qr\dots$ gemacht wird. Das Verfahren ist demnach einfach folgendes: ziehe die radialen Linien $mn, op, qr\dots$, damit parallel durch den Mittelpunkt des Grundrisses der

Kugel die Linien MN, OP, QR.... und übertrage die auf diesen Linien liegenden Helligkeitspunkte auf die entsprechenden Parallelen mn, op, pq u. s. f.

Hat man sich auf diese Weise eine hinreichende Anzahl von Helligkeitspunkten in der Vertikal- und Horizontalprojection verschafft, so erhält man durch stetige Verbindung der gleichnamigen Punkte die Helligkeitscurven, wie sie in Fig. 49 zu sehen sind.

Der dem Berührungskreis op gegenüberliegende und mit ihm parallele Kreis o''p'' hat selbstverständlich dieselbe Beleuchtung wie op; dasselbe gilt auch von qr und q'r' u. s. f.

Die mit dem Lichtstrahl parallele Linie MN bildet für die Beleuchtung der beiden Kugelhemisphären MON und MPN eine symmetrische Mittellinie, dasselbe ist auch der Fall bei der Wulstfläche bezüglich der Linie m''n'', wie man sich leicht überzeugen kann.

Eine zur Horizontal-Ebene parallele Ebene berührt die Wulstfläche im Kreis (c'e'', c'e''') und die Kugel im Punkt C'; die Helligkeit im Kreis (c'e'', c'e''') ist daher durchweg die des Punktes C', nemlich = +1.

Die Erzeugende (Kugel) (cdf, c'd'e'f) berührt den Wulst in dem grössten Kreis df, in der Vertikalprojection im vertikalen Umriss c'd'e', derselbe hat demnach auch die gleiche Helligkeit wie der Bogen C'D'E der Normalkugel. Die betreffenden Helligkeitspunkte auf C'D'E sind aber die Berührungspunkte der Hellencurven mit dem Kugelumriss; überträgt man dieselben auf c'd'e', so sind sie auch hier Berührungspunkte für die Hellencurven des Wulstes. Das gleiche gilt für den Bogen c''g'e''' und C'G'E.

In der Lage h'i'k's'' berührt die Erzeugende (Kugel) die Wulstfläche im Kreis i's'', der offenbar als Gerade sich projicirt. Die Beleuchtung ist hier selbstverständlich dieselbe, welche die Kugel im Kreis C'S'E hat und sind demnach die Helligkeitspunkte von da auf i's'' proportional zu übertragen.

Um die höchsten und tiefsten Punkte I', II', III', IV'.... der Hellencurven auf der Wulstfläche, welche nothwendig den Punkten I, II, III, IV.... auf der Kugel entsprechen, zu erhalten, mache man ZY || C'E, ziehe durch die Punkte I, II, III.... Linien parallel zum Grundschnitt, bis sie ZY schneiden, übertrage diese Punkte proportional auf z'y', und ziehe durch dieselben Linien parallel zum Grundschnitt, so liegen auf letzteren die entsprechenden höchsten oder tiefsten Punkte der Hellencurven des Wulstes.

Der Punkt x', in welchem die Curve + 1/2 auf dem Wulste umkehrt, muss offenbar der Lage des Punktes X' auf der Kugel entsprechen und daher auf einem Parallelkreis liegen, für welchen die Tangente am Umriss dieselbe Richtung hat, wie für den durch X' gehenden Parallelkreis der Kugel.

Ganz ähnlich findet man auch die Umkehrpunkte der Curve + 1/2 in der Horizontalprojection, wenn man in der Horizontalprojection der Kugel

von S aus an die Curve $+ \frac{1}{2}$ Tangenten zieht; zieht man in der Horizontalprojection des Wulstes von s aus Linien parallel zu jenen Tangenten, so müssen diese ebenfalls die Curve $+ \frac{1}{2}$ (in der Horizontalprojection des Wulstes) berühren.

Auf jeder der Linien mn, vw, qr erhält man zweimal einen Punkt mit der Helligkeit $+ 1$, weil jede durch S gezogene Gerade MN, QR die Curve $+ 1$ zweimal schneidet, mit Ausnahme der Linie OP (\perp MN), welche die Curve $+ 1$ berührt. Man erhält daher auf op und o''p'' nur einen Punkt mit der Helligkeit $+ 1$; es ist dies der Kreuzungspunkt l oder l'' der Doppelcurve $+ 1$ des Wulstes.

§. 54.

Die in (Fig. 50. Taf. VIII.) gezeichnete Wulstfläche $a'b'b''a''$ unterscheidet sich von der im vorigen §. 53 beschriebenen nur dadurch, dass der Meridian eine gegen die Axe $p'p''$ einwärtsgekrümmte Linie $a'c'a''$ ist. Die Construction der Helligkeitscurven ist von der eben beschriebenen nicht verschieden. Die Beleuchtung im Parallelkreis $e'f'$ ist z. B. dieselbe wie im Parallelkreis $E'F'$ der Normalkugel, weil die Tangenten N' und n' parallel sind u. s. f.

Die Helligkeitspunkte auf den Hauptmeridianen $a'c'a''$ und $b'd'b''$, sowie auch die auf dem mittleren Meridian $p'p''$ können (wie im vorigen Beispiel) von der Kugel übertragen werden, nur ist anstatt der convexen Kugel K die concave Kugel K'' in Anwendung zu bringen. Man hat also die Helligkeitspunkte von $A'C'A''$ auf $a'c'a''$, von $A'D'A''$ auf $b'd'b''$ und von $A'O'A''$ auf $p'o'p''$ zu übertragen.

Desgleichen wird man auch in der Horizontalprojection die concave Kugel mit Vorthail in Anwendung bringen und braucht in dieser Hinsicht nur angedeutet zu werden, dass z. B. in yx die Beleuchtung dieselbe, wie in XY und in vw dieselbe, wie in VW der concaven Normal-kugel ist.

§. 55.

Die in Fig. 51. a, b, c und d. Taf. IX. dargestellten Umdrehungsflächen sind aus den in §. 53 und 54 besprochenen zusammengesetzt, die Beleuchtung in den betreffenden Theilen daher ähnlich wie dort, wie man sich leicht durch Vergleichung überzeugen kann. Die Construction der Hellencurven ist natürlich dieselbe, wie oben ausführlich beschrieben ist. Dass die Hellencurven in Fig. 51. a und c keine durchaus stetige Curven sind, sondern sich in scharfen Spitzen schneiden, wird nicht mehr befremden, wenn man dieselben mit den Hellencurven der Fig. 49 und 50, Taf. VIII. vergleicht.

§. 56.

Ist der Meridian der Umdrehungsfläche der Art gestaltet, dass sich die Bögen AE und CF (Fig. 52 a und b, Taf. IX.) nicht unmittelbar berühren, sondern durch eine gemeinschaftliche Tangente AC mit einander verbunden sind, so beschreibt letztere offenbar bei der Umdrehung eine Kegelfläche ABDC, deren Helligkeitslinien Mantellinien, also gerade Linien sind.

§. 57.

Hat eine Umdrehungsfläche einen aus verschiedenartig gekrümmten und gestalteten Curven zusammengesetzten Meridian (wie Fig. 53. Taf. X.), so wird die Konstruktion sehr beschleunigt durch folgendes Verfahren:

Man ziehe an die linksseitige Contur der Fläche so viele parallele Tangenten mn, als möglich sind und an die Kugel eine Tangente MN \parallel mn, ziehe durch die Berührungspunkte die Parallelkreise aa, bb, cc, dd.... kk.. rr, ss u. s. f., endlich auch den Parallelkreis PP. Da in allen diesen Parallelkreisen die Beleuchtung die gleiche nemlich die von PP ist und man daher die auf PP liegenden Helligkeitspunkte proportional auf verschiedene Längen zu übertragen hat, so mache man $pp = PP$, übertrage auf pp die Helligkeitspunkte von PP und ziehe von einem beliebigen Punkt q aus durch dieselben gerade Linien; jede innerhalb des Winkels tqx gezogenen, mit pp parallele Gerade wird nun in gleichem Verhältniss wie pp getheilt. Es bedarf nun kaum mehr der Erwähnung, dass man demgemäss nur im Winkel tqx Linien gleich aa, bb, cc.... parallel mit pp zu ziehen braucht, die Schnittpunkte mit den von q ausgehenden radialen Linien sind sodann die entsprechenden Helligkeitspunkte, die man mit dem Zirkel oder einem Papierstreifen auf die Linien aa, bb, cc... überträgt.

Umdrehungsflächen mit concaver Drehung.

§. 58.

Die Konstruktion der Beleuchtung solcher Flächen ist genau so, wie bei den bis jetzt beschriebenen mit dem einzigen Unterschied, dass statt der convexen Normalkugel (Fig. 30. Taf. IV.) die concave Normalkugel (Fig. 31. Taf. IV.) substituirt werden muss.

Aus Fig. 54. Taf. IX. ist das Weitere ersichtlich und bedarf keiner weiteren Erläuterung mehr.

§. 59.

Fig. 55. Taf. X. zeigt eine Fläche, die ganz analog den Umdrehungsflächen bezüglich der Beleuchtungsconstruction behandelt werden kann.

Ist der aus dem Mittelpunkt p beschriebene Kreisbogen mn das Querprofil der Console, so muss offenbar eine Kugel die Umdrehungsfläche in einem Bogen der Kugelzone $M'N'P'Q'$ berühren, die man sich durch Umdrehung des Bogens $M'N'$ von gleichem Mittelpunktswinkel ($\sphericalangle M'D'N' = \sphericalangle mpn$) entstanden denken kann.

Schneidet man nun die gegebene Fläche (Consolenstirne) durch Ebenen $ab, cd, ef \dots$, so ist in den Schnitten $a'b'a', c'd'c', e'f'e' \dots$ selbstverständlich die Helligkeit dieselbe, wie in den durch die Ebenen $AB, CD, EF \dots$ erzeugten Schnitten $A'B'A', C'D'C', E'F'E' \dots$, vorausgesetzt, dass $AB \parallel ab, CD \parallel cd, EF \parallel ef \dots$ ist; man hat demnach nur die Helligkeitspunkte von den Bögen $A'B'A', C'D'C', E'F'E' \dots$ auf die Bögen $a'b'a', c'd'c', e'f'e' \dots$ zu übertragen, und die gleichnamigen Punkte durch stetige Linien mit einander zu verbinden.

§. 60.

Ist die Axe der Umdrehungsfläche senkrecht zur Vertikal-Ebene, so gilt alles bisher Gesagte auch für diesen Fall, wenn wir nur die Grundebenen mit einander vertauschen. Es soll deshalb folgende Aufgabe nur deshalb hier besprochen werden, um zu zeigen, auf welche Weise in vielen Fällen scheinbar schwierige Aufgaben leicht und rasch sich lösen lassen.

Denkt man sich in der Kehlfläche des gothischen Maasswerks (Fig. 56. Taf. XI.), dessen Profil der aus dem Mittelpunkt c beschriebene Kreisbogen ab ist, eine berührende Kugel sich fortbewegen, so muss diese

- 1) einen Radius $= ac$ haben;
- 2) bewegt sich der Mittelpunkt der Kugel in einem mit der Krümmung des Maasswerkes concentrischen Kreis (z. B. $g''f''c''h''$) fort;
- 3) ist die Entfernung $b''c''$ dieses Kreises von der Kante $m''b''k''$ gleich bd ;
- 4) findet die Berührung in Bogenstücken statt, welche im Profil $= ab$, in der Ansicht aber die nach dem Mittelpunkt e'' der Krümmung gerichteten geraden Linien $l''m'', a''b'', k''i'' \dots$ sind;
- 5) ist für die Beleuchtungsconstruction selbstverständlich in vorliegendem Fall wieder die concave Normalkugel zu verwenden.

Diese Andeutungen dürften genügen, um vorliegende Aufgabe ohne weiteres lösen zu können. Bei der praktischen Ausführung wird man am einfachsten so verfahren: Man wird sich auf Pauspapier eine Kugel vom Halbmesser ac sammt den nöthigen Hellencurven (wie NOMP zeigt) zeichnen, von den Krümmungsmittelpunkten aus radiale Linien $l''m''$, $a''b''$, $i''k'' \dots a'b' \dots a''b''$ u. s. f. ziehen, sodann das Pauspapier so auf diese Linien legen, dass der Mittelpunkt der Kugel jedesmal auf den Punkt g'' , f'' , e'' , $h'' \dots e'' \dots e'' \dots$ zu liegen kommt, während die Axe MN stets lotrecht, die Axe OP stets horizontal bleibt, und nun in dieser Lage der Kugel die auf die Linie $l''m''$, $a''b''$, $i''k'' \dots a''b''$ fallenden Hellenpunkte mit einer Nadel markiren, diese Punkte mit den entsprechenden Zeichen und Zahlen versehen und schliesslich die gleichnamigen durch stetige Curven verbinden.

§. 61.

Fig. 57. Taf. XI. zeigt ein Beispiel, in welchem die Drehungsaxe parallel zur Horizontalebene, aber geneigt gegen die Vertikal-Ebene ist.

Der Drehungskegel aSb berührt die Fläche im Parallelkreis ab , der damit gleiche und parallele Kegela $S''b''$ berührt die Kugel im Kreis $a''b''$, die Helligkeit ist demnach in ab und $a''b''$ die gleiche, muss daher auch in den Vertikalprojectionen d. h. in den Ellipsen $a'k'b'k''$ und $a''b''$ die gleiche sein. Man hat demnach nur die Helligkeitspunkte von $a''b''$ auf $a'k'b'k''$ zu übertragen u. s. f. Das Verfahren ist demnach kurz folgendes: ziehe an die Contour $gace$ der Umdrehungsfläche beliebige Tangenten MN, PQ... desgl. an den Kugelumriss Tangenten $M''N''$, $P''Q'' \dots$ parallel mit MN und PQ, zeichne die durch die Berührungspunkte a und c einerseits und a'' und c'' andererseits gehenden Parallelkreise, construire deren Vertikal-Projectionen, übertrage die Helligkeitspunkte von den Parallelkreisen der Kugel auf die entsprechenden Parallelkreise der Umdrehungsfläche und verbinde die gleichnamigen Helligkeitspunkte durch stetige Curven.

§. 62.

Die Axe der Umdrehungsfläche ist gegen beide Grundebenen geneigt.

Die Linie $(mn, m'n')$ sei die Axe einer Umdrehungsfläche (Fig. 58. Taf. XII.). Dreht man die vertikalprojicirende Ebene der Axe um eine in dieser Ebene liegende mit der Vertikal-Ebene parallele Linie $(mp, m'p')$ bis sie eine zur Vertikal-Ebene parallele Lage einnimmt, so erhält man hier $m'n''$ als Axe und zugleich den in jener projicirenden Ebene liegenden Meridian $n''b''d''f'' \dots$ der Umdrehungsfläche, die Parallelkreise aber

müssen hier als einfache gerade zu $m'n''$ senkrechte Linien $a''b''$, $c''d''$... sich darstellen.

Legt man durch den Mittelpunkt der Normalkugel eine Linie ($MN, M'N'$) parallel zu ($mn, m'n'$) und zeichnet auch hier den Schnitt der vertikal-proji- cirenden Ebene $M'N'$ mit der Kugel und deren Umklappung, so muss offenbar die Beleuchtung der Umdrehungsfläche im Kreis $a''b''$ dieselbe sein, wie auf der Kugel in $A''B''$, vorausgesetzt, dass die Tangente $s''t''$ parallel ist mit der Tangente $S''T''$. Nun ist aber die Ellipse $a'b'a'$ die Vertikal-Projection von $a''b''$ und $A'B'A'$ die Vertikal-Projection von $A''B''$, folglich muss die Helligkeit der Drehungsfläche in $a'b'a'$ und $A'B'A'$ die gleiche sein und man hat daher wieder die Hellenpunkte von $A'B'A'$ auf $a'b'a'$ zu übertragen.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man sich eine hinreichende Anzahl von Helligkeits-Punkten verschaffen, um mit Sicherheit die Helligkeitscurven auf der Umdrehungsfläche zeichnen zu können.

3) Beleuchtung der Schraubenflächen.

a) Die Erzeugende steht senkrecht zur Axe.

(Wendelfläche.)

§. 63.

Um die Helligkeit irgend eines Punktes (a, a') der Schraubenfläche (Fig. 59. Taf. XII.) zu finden, zeichne man die Normale ($mn, m'n'$) im Punkt (a, a'), ziehe durch den Kugelmittelpunkt eine Parallele ($OA, O'A'$) mit ($mn, m'n'$) und bestimme deren Durchschnitt mit der Kugeloberfläche; die Helligkeit des Durchschnittspunktes (A, A') ist sodann die des Punktes (a, a').

Der Cylinder $azbde$..., welcher die Axe mit der Wendelfläche gemeinschaftlich hat, schneidet letztere in der Schraubenlinie $k'a'z'b'$... k'' ; die Tangente ($pq, p'q'$) im Punkt (a, a') dieser Schraubenlinie berührt auch die Schraubenfläche in diesem Punkt. Die Berührungs-Ebene an die Schraubenfläche im Punkt (a, a') aber ist diejenige Ebene, welche durch die Tangente ($pq, p'q'$) und durch die durch den Punkt (a, a') gehende Erzeugende (sa, a') gelegt werden kann. Da die Erzeugende (sa, a') parallel zur Horizontal-Ebene, so muss auch die Spur der Berührungs-Ebene parallel zu sa sein, ebenso ist die Vertikalspur parallel zu $p'q'$, weil die Tangente ($pq, p'q'$) parallel zur Vertikal-Ebene ist; die Projectionen der Normalen in (a, a') sind demnach die zu sa und $p'q'$ senkrechten Linien mn und $m'n'$. Alle Tangenten an der Schraubenlinie $k'a'b'$..., also auch alle Normalen haben gleiche Neigung gegen die

Horizontal-Ebene, für alle ist der Winkel $a't's'$ der gleiche. Zieht man daher durch den Kugelmittelpunkt (O, O') Linien parallel mit diesen Normalen, so müssen dieselben, da sie alle gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, also auch gegen die Axe o, o'' einschliessen, auf einem Kegelmantel liegen, den man durch Drehung der Linie $O'A'$ um die Axe $O'Q''$ erhält. Dieser Kegel schneidet aber die Kugel im Parallelkreis $(A'A'', AA''')$, folglich sind alle Helligkeitspunkte der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie $k'a'b'l'$... in dem Kreis $(A'A'', AA''')$ zu suchen. Ueberträgt man nun die Helligkeitspunkte vom Kreis AA''' der Kugel auf den Kreis abd ... und zwar so, dass der Punkt A auf a zu liegen kommt, so sind diese nur noch in Vertikal-Projection, d. h. auf die Schraubenlinie $k'a'b'l'$... zu bringen.

Um nun eine hinreichende Anzahl von Helligkeitspunkten zu erhalten, deren stetige Verbindung die gewünschten Hellencurven ergibt, schneide man die Wendelfläche durch concentrische Cylinder und verfähre sodann in der ebenbeschriebenen Weise.

b) Die Erzeugende ist gegen die Axe geneigt.

§. 64.

Die Schraubenlinie $e'f'a'g'h'$ (Fig. 60. Taf. XIII.) sei die Leitlinie einer Schraubenfläche, die durch den Punkt (a, a') gehende, die Axe in (c, c') schneidende Gerade $(cd, c'd')$ erzeuge die Schraubenfläche dadurch, dass sie an jener Schraubenlinie fortgleitet, während sie die Axe stets unter dem Winkel $c''c'd'$ schneidet.

Eine Berührungs-Ebene im Punkt (a, a') z. B. ist diejenige Ebene, welche durch die Erzeugende $(cd, c'd')$ und durch die Tangente im Punkt (a, a') , also durch die Linie $(pq, p'q')$ gelegt werden kann. Die Horizontalspur der Linie $(cd, c'd')$ ist der Punkt d , die Horizontalspur der Tangente $(pq, p'q')$ ist der Punkt q , wenn nemlich die Länge $aq =$ der Länge des Halbkreises afe ist; die Verbindungslinie der Punkte d und q ist demnach die Horizontalspur der Berührungsebene an der Schraubenfläche in (a, a') . Die Horizontalprojection der Normalen auf dieser Ebene, also auch auf der Schraubenfläche im Punkt (a, a') ist die auf dq senkrechte Linie mn . Die Vertikalprojection zu mn ist offenbar die zu $c'd'$ senkrechte Linie $m'n'$, weil $(cd, c'd')$ parallel zur Vertikal-Ebene ist, die Vertikalspur der Berührungs-Ebene daher parallel mit $c'd'$ sein muss.

Die mit $(mn, m'n')$ parallele durch den Mittelpunkt der Kugel gezogene Gerade $(OA, O'A')$ schneidet die Kugeloberfläche im Punkt (A, A') , folglich ist die Helligkeit des Punktes (a, a') die von (A, A') .

Da nun aber wie in dem Beispiel des vorigen §. die Normalen auf der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie $e'f'a'g'$... gegen die Hori-

zontal-Ebene gleiche Neigung haben, so liegen die mit den Normalen durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen Parallelen auf einem Drehungskegel, dessen Mantellinien mit der Horizontal-Ebene denselben Winkel machen wie die Normalen. Bringen wir die Normale ($mn, m'n'$) in die zur Vertikal-Ebene parallele Lage ($an'', a'n''''$), so ist der Winkel $k'a'n''''$ der gesuchte Neigungswinkel und daher die Gerade $N''F'$ durch den Kugelmittelpunkt so zu ziehen, dass $\sphericalangle N''F'K' = n''a'k'$. Jede mit irgend einer der genannten Normalen durch O' parallel gezogenen Gerade ist nun eine Mantellinie des Kegels $N''O'C'$, und alle Helligkeitspunkte der Schraubenfläche längs der Schraubenlinie $e'f'a'g'h'$ werden daher auf $C'B'$ zu suchen sein. Da $ON \parallel mn$, so ist die Helligkeit des Punktes (a, a') die des Punktes (A, A'). Ueberträgt man nun die auf dem Kreis CB liegenden Helligkeitspunkte auf den Kreis $ag'hf$ so, dass der Punkt A mit dem Punkt a correspondirt, so hat man dieselben nur noch in Vertikalprojection zu bringen.

Schneidet man die Schraubenfläche wieder (wie im vorigen Beispiel §. 63) durch concentrische Cylinder, so erhält man als Schnitt mit derselben jedesmal eine Schraubenlinie, die mit der ersten (der Leitlinie) gleiche Ganghöhe $e''e''''$ hat. Da aber die Durchmesser der Schraubencylinder verschieden sind, so muss jede dieser Schraubenlinien eine andere Steigung, folglich auch andere Tangenten und Normalenrichtung haben. Für jede Schraubenlinie wird man desshalb auch eine andere mit den Normalen parallele Kegelfläche, also auch andere Beleuchtungspunkte finden, deren stetige Verbindung die betreffenden Helligkeitscurven auf der Fläche ergibt.

§. 65.

Wir können uns die gewundene Fläche (Fig. 61. Taf. XIII.) dadurch entstanden denken, dass das ebene Flächenstück $mnpqrst$ mit dem Mittelpunkt x in der Axe $x'x''$ sich in die Höhe schiebt, während eine der Ecken an einer Schraubenlinie fortgleitet.

In den dadurch entstandenen Kanelirungen können wir uns eine Kugel fortrollend denken, die dieselben in den Bogen ($st, s't'$), ($tm, s''t''$), ($mn, s''''t''''$) u. s. f. berührt, und daher in diesen dieselbe Helligkeit hat, wie die Kugel; die Hellenpunkte können von letzterer auf die entsprechenden Berührungsbogen leicht übertragen werden.

Da die Berührung stets auf dem horizontalen Kugelumriss, in der Vertikalprojection also in einem Theil der Linie vw stattfindet, der Mittelpunkt der berührenden Kugel aber auf der Schraubenlinie ($abede, a'b'c'd'e'$) liegen muss, so wird man am einfachsten die auf vw liegenden Hellenpunkte etwa auf dem Rande eines Papierstreifens verzeichnen, dann den Papierstreifen so an die Linie $s''t'', s''''t'''', s^{IV}t^{IV}$ legen, dass derjenige Punkt, welcher dem Punkt a' entspricht, auf $b', c', d', e' \dots$ zu liegen

kommt, sodann die auf die Strecken $s''t''$, $s'''t'''$, $s^{IV}t^{IV}$ fallenden Punkte markiren, und die gleichnamigen durch Curven stetig verbinden.

Anmerkung. Diese Construction ist jedoch nur annäherungsweise richtig, namentlich setzt sie ein bedeutendes Steigungsverhältniss voraus. Andernfalls muss die im nächsten §. angegebene Construction der Beleuchtung zur Anwendung kommen.

Beleuchtung der schraubenförmigen Wulstfläche.

(Fig. 62. Taf. XIII.)

§. 66.

Die schraubenförmige Wulstfläche können wir uns dadurch entstanden denken, dass eine Kugel mit ihrem Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie sich fortbewegt; die Kugel berührt dabei die erzeugte Fläche stets in einem grössten Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Schraubenlinie, also senkrecht auf der betreffenden Tangente steht. Da aber die Tangenten stets gleiche Neigung gegen die Horizontal-Ebene haben, so ist auch die Neigung des Berührungskreises gegen die Horizontal-Ebene immer dieselbe, und daher die Horizontalprojection desselben eine Ellipse von stets gleicher Form und Grösse; die grosse Axe aber ist stets nach dem Punkt s gerichtet.

Befindet sich die Erzeugende (Kugel) in der Lage (x, x') , so ist, da die Tangente im Punkt (x, x') parallel zur Vertikal-Ebene ist, die zu $m'n'$ senkrechte Linie $a'c'$ die Vertikalprojection des Berührungskreises; seine Horizontalprojection ist demnach die Ellipse $abc'b''$ und die Horizontalprojectionen aller Berührungskreise sind Ellipsen von gleicher Form und Grösse, deren Vertikal-Projectionen ohne Schwierigkeit gezeichnet werden können. Um die Helligkeitspunkte auf den Berührungskreisen zu erhalten, müsste man die Normalkugel durch Ebenen schneiden, welche mit den Ebenen der Berührungskreise parallel sind und durch den Kugelmittelpunkt gehen; die Projectionen dieser Schnitte müssen aber, wie leicht einzusehen, Ellipsen von gleichen Axenverhältnissen, wie die Projectionen der Berührungskreise sein, man wird demnach nur in die Projection der Normalkugel Ellipsen zu zeichnen haben, welche eine mit den letzteren parallele Lage haben und ihnen ähnlich sind.

Noch einfacher und rascher kommt man aber zum Ziel, wenn man eine Kugel von der Grösse der Erzeugenden mit den Curven gleicher Helligkeit auf Pauspapier zeichnet, diese mit ihrem Mittelpunkt so auf die Mittelpunkte $v, w, x, y \dots v', w', x', y' \dots$ legt, dass die lotrechte Axe der Normalkugel in allen Lagen lotrecht bleibt, und nun auf den Ellipsen, d. h. auf den Projectionen der Berührungskreise diejenigen Hellenpunkte markirt, in welchen sie von den Hellencurven der Erzeugenden geschnitten werden. Durch stetige Verbindung der gleichnamigen Hellenpunkte ergeben sich sodann die Curven gleicher Helligkeit auf der schraubenförmigen Wulstfläche.

4. Beleuchtung windschiefer Flächen.

(Fig. 63. Taf. XIV.)

§. 67.

Denken wir uns eine mit der Horizontal-Ebene parallele Gerade ($s g, g' g''$) so an zwei Geraden ($s, s' s''$) und ($a g, a' g'$) sich fortbewegen, dass sie während dieser Bewegung mit der Horizontal-Ebene stets parallel bleibt, so erzeugt sie eine windschiefe Fläche. Die Berührungs-Ebene im Punkt (y, y') geht durch die Erzeugende ($s c, c' c'$); da diese Linie parallel zur Horizontal-Ebene ist, so ist die Spur der Berührungs-Ebene parallel mit $s c$ und die Normale in (y, y') senkrecht zu jener Horizontalspur oder senkrecht zu $s c$. Ausser der Geraden $s c$ kann durch den Punkt (y, y') in der Fläche nur noch eine Gerade gezogen werden, nemlich die Gerade $y'' y$. Auch diese Gerade liegt in der Berührungs-Ebene. Nun ist aber die Horizontalspur von $y y''$ der Punkt y'' , folglich ist $p P$ die Spur der Berührungs-Ebene in (y, y'). Schneidet man letztere durch eine Ebene $A A$, welche eine zur Horizontal-Ebene und zur Berührungs-Ebene senkrechte Lage hat, und klappt sie in die Horizontal-Ebene um, so projicirt sich die Erzeugende $c s$ auf letztere als ein Punkt (in der Umklappung C), und die durch den Punkt C gehende Gerade $P Q$ ist die Spur der Berührungs-Ebene.

Da die Normale $z z''$ der windschiefen Fläche im Punkt (y, y') parallel zur Seiten-Ebene $A A$ ist, so projicirt sie sich auf diese, in ihrer wahren Neigung gegen die Horizontal-Ebene; da sie aber nothwendig auch senkrecht zur Spur $P Q$ der Berührungs-Ebene $p P Q$ sein muss, so ist offenbar $C P_0$ die Seitenprojection der Normalen im Punkt (y, y'). Schneidet man nun die Kugel durch eine zu $z z''$ parallele Ebene $Z Z''$, klappt auch hier den Schnitt dieser Ebenen mit der Kugel in die Horizontal-Ebene um, zieht $O'' P''$ parallel zu $C P_0$, so ist P'' der Durchschnitt einer mit der Normalen in (y, y') durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen parallelen Linie, gibt demnach die Helligkeit des Punktes (y, y') an, wenn man nur P'' in seine ursprüngliche Lage P''' zurückbringt. Die Helligkeit wäre demnach hier $+ \frac{1}{4}$.

Da die Horizontalprojection der Normalen aller Punkte der windschiefen Fläche, welche auf der Erzeugenden $c s$ liegen, parallel zur Seiten-Ebene $A A$ sind, so müssen nothwendig die mit jenen Normalen durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen Parallelen in einer Ebene, nemlich in der Ebene $Z Z''$ liegen.

Die Berührungs-Ebene im Punkt (x, x') geht wieder durch die Linie $c s$ und durch $x x''$, deren Horizontalspur der Punkt x'' ist. Die Spuren der Berührungs-Ebene in (x, x') sind demnach $m M$ und $M N$ und die Seitenprojection der Normalen ist die auf $M N$ senkrechte Linie $C M_0$. Zieht

man daher $O''M''$ parallel mit CM_0 , und bringt den Punkt M'' wieder in seine ursprüngliche Lage M''' zurück, so erhält man hier die Helligkeit des Punktes (x, x') und zwar sehr nahe die Helligkeit $+0$ u. s. f.

Man ist nun zwar allerdings im Stande, auf diese Weise für jeden beliebigen Punkt der windschiefen Fläche die Helligkeit zu bestimmen, allein bei weitem in den meisten Fällen wird man solche Helligkeiten erhalten, welche z. B. mit $+2\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{3}$, $1\frac{5}{8}$ u. s. f. bezeichnet werden müssten, da es sicherlich nur Zufall ist, wenn die Punkte M'' , P'' , R'' ... gerade mit denjenigen Punkten zusammenfallen, in welche die Linie $Z'Z''$ von den Helligkeitscurven geschnitten wird. Um nun aber gerade nur diese Punkte zu erhalten, wird man das Verfahren umkehren und folgendermassen construiren:

Um denjenigen Punkt auf der Erzeugenden $(cs, c'e'')$ zu finden, welcher die Helligkeit $+2$ hat, ziehe man durch den Punkt $+2$ der Normalkugel $+2U$ senkrecht zu ZZ'' , zeichne die Tangente VW im Punkt U , parallel mit VW durch den Punkt C die Linie Cw , ziehe w'' parallel zu cs bis zum Durchschnitt mit as , und endlich $w''w'''$ parallel zu ag bis zum Durchschnitt mit cs ; der Schnittpunkt w''' ist sodann derjenige Punkt auf cs , welcher die Helligkeit $+2$ hat. Auf gleiche Weise kann man nun für jede beliebige Helligkeit den betreffenden Punkt auf $(cs, c'e'')$ und ebenso auch auf jeder beliebigen Erzeugenden sich verschaffen.

Für die Erzeugende $(sg, g'g'')$ ist das Verfahren übersichtlich und im Zusammenhang dargestellt und ist dazu nur noch zu bemerken, dass die Horizontal-Ebene nach $f'f''$ verlegt ist, dass demnach die Projection der Erzeugenden sg auf die dazu senkrechte Seiten-Ebene BB d. h. der Punkt G von der Spur BB eine Entfernung $gG = f'g''$ haben muss. Die durch den Mittelpunkt O der Kugel gelegte, mit BB parallele Ebene 11 , schneidet die Kugel in dem grössten Kreis 11 , dessen Umklappung der Kreis OI ist. Bringt man auch die auf 11 liegenden Helligkeitspunkte in die Umklappung, und überträgt diese Punkte auf den um dem Mittelpunkt G beschriebenen Kreis, so sind die Linien $G_{(+1)}$, $G_{(+2)}$, $G_{(+3)}$... die Seitenprojection der Normalen auf der windschiefen Fläche in Punkten der Erzeugenden sg , welche die Helligkeit $+1$, $+2$, $+3$... haben. Zieht man nun $GE \perp G_{(+1)}$ und $ED \parallel gs$, so ist DEG die Berührungsebene in demjenigen Punkt von sg , welcher die Helligkeit $+1$ hat; den betreffenden Punkt selbst aber erhält man, wenn man $DF \parallel ag$ zieht. Denn die dem ersten System von Erzeugenden angehörige durch den Punkt F gehende Gerade gs und die dem zweiten System von Erzeugenden angehörige Gerade FD liegen in der Ebene, welche die Fläche im Punkt F berührt, folglich muss die Spur D der Linie DF in der Spur DE der Berührungsebene, zugleich aber auch auf fs liegen, weil FD die Gerade fs schneiden muss und die Horizontal-Ebene durch die Linie $(fs, f'f'')$ gelegt ist.

A n h a n g.

Von der Stetigkeit der Hellencurven.

§. 68.

Die Curve mn (Fig. 64. Taf. XV.) sei der Meridian und ss' die Axe einer Umdrehungsfläche; ABC sei eine der Hellencurven der Kugel, welche auf die Umdrehungsfläche zu übertragen sei. In den Parallelkreisen $a'a''$ und $A'A''$ ist nun (nach §. 53) die Beleuchtung dieselbe, wenn die Tangenten de und DE parallel sind.

Um den Punkt a auf $a'a''$ zu erhalten, dessen Helligkeit derjenigen von A gleich ist, muss die Entfernung aa' der Bedingung entsprechen:

$$aa' : a'a'' = AA' : A'A''$$

folglich

$$aa' = a'a'' \frac{AA'}{A'A''}$$

Ist $SS' \parallel ss'$, und die Lage des Parallelkreises $A'A''$ durch den Winkel $A''OS' = \alpha$ bestimmt, welchen der Radius $A''O = r$ der Kugel mit der Axe SS' einschliesst, so ist offenbar

$$A'A'' = r \cdot \sin \alpha$$

Ist o' der Krümmungsmittelpunkt und $o'a'' = \varrho$ der Krümmungshalbmesser der Meridiancurve mn im Punkt a'' , und $p'q' \parallel ss'$, so ist:

$$a''q' = \varrho \cdot \sin \alpha$$

Es ist aber $a'a'' = a''q' + q'a' = a''q' + o'e' = a''q' + k$, wenn

wir die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes o' von ss' mit k bezeichnen, folglich

$$aa' = (\varrho \cdot \sin \alpha + k) \frac{AA'}{r \cdot \sin \alpha}$$

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes a von ss' mit x und die des Punktes A von SS' mit X , so ist

$$\begin{aligned} x &= (\varrho \cdot \sin \alpha + k) \frac{X}{r \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{X}{r} \left(\varrho + \frac{k}{\sin \alpha} \right) \dots \dots \dots 1) \end{aligned}$$

Lässt man den Winkel α etwa um die Grösse γ , die man so klein annehmen kann, als man will, stetig zunehmen, so erhält man für die Punkte $b, c \dots$ die Werthe:

$$x' = \frac{X'}{r} \left(\varrho + \frac{k}{\sin(\alpha + \gamma)} \right)$$

$$x'' = \frac{X''}{r} \left(\varrho + \frac{k}{\sin(\alpha + 2\gamma)} \right)$$

$$x_n = \frac{X_n}{r} \left(\varrho + \frac{k}{\sin(\alpha + n \cdot \gamma)} \right)$$

Da die Curve ABC eine Ellipse ist, so müssen nothwendig die Längen $AA', BB', CC' \dots$ d. h. die Grössen $X, X', X'' \dots$ eine stetige Reihe bilden; ebenso bilden auch die Werthe $\sin \alpha, \sin(\alpha + \gamma), \sin(\alpha + 2\gamma) \dots$ eine stetige Reihe, da aber die übrigen Grössen der Gleichung r, ϱ und k Constante sind, so müssen auch die Werthe von $x, x', x'' \dots$ stetig sich ändern, d. h. die Ordinaten einer stetigen Curve $abc \dots$ sein.

Ändert sich der Krümmungshalbmesser ϱ der Meridiancurve, wie z. B. im Bogen $a''n$, dessen Halbmesser $o''a'' = \varrho'$ und dessen Mittelpunkt o'' ist, so ist offenbar, wenn wir den Abstand des Mittelpunktes o'' von ss' mit k' bezeichnen

$$x = \frac{X}{r} \left(\varrho' + \frac{k'}{\sin \alpha} \right) \dots \dots \dots 2)$$

Ein Blick auf die Figur genügt, um einzusehen, dass mit dem Krümmungshalbmesser ϱ resp. mit der Lage des Krümmungsmittelpunktes o auch die Grösse von k sich ändert. Ist die Änderung von ϱ eine stetige, so ändert sich auch k stetig; k ist demnach als eine Funktion von ϱ zu betrachten, und es ist, wenn wir $\frac{k}{\sin \alpha} = f\varrho$ setzen.

$$x = \frac{X}{r} (\varrho + f(\varrho))$$

oder allgemein

$$x = \frac{X}{r} \cdot F(\varrho) \dots \dots \dots 3)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Werthe von x d. h. die Entfernungen aa' , bb' , cc' ... eine stetige Reihe bilden müssen, wenn die Meridiancurve eine stetig gekrümmte ist, d. h. wenn die Krümmungshalbmesser in den auf einander folgenden Curvenelementen stetig zu- oder abnehmen. Ist der Krümmungshalbmesser stets derselbe, wie beim Kreis, so ist offenbar $F(\varrho)$ eine Constante. Ändert sich der Krümmungshalbmesser plötzlich, sprunghaft, wie bei Korbbögen, die aus sich berührenden Kreisbögen bestehen, so ändert sich auch $F(\varrho)$ plötzlich, die Hellencurven werden demnach in dem durch den Berührungspunkt a'' der Kreisbögen $c''a''$ und $a''n$ gehenden Parallelkreise $a'a''$ plötzlich aus ihrer Richtung abgelenkt und es entstehen hier mehr oder minder scharfe Ecken.

Dasselbe findet auch statt, wenn eine sonst stetige Meridiancurve man (Fig. 65. Taf. XV.) einen Wendepunkt a d. h. einen Punkt der Art hat, dass die Curve theils rechts, theils links von der durch ihn gehenden Tangente liegt.

Denn, wenn für die Hellenpunkte auf dem durch Drehungen des Bogenelementes ac um die Axe ss' entstandenen Theil der Drehungsfläche die Gleichung stattfindet:

$$x = \frac{X}{r} \left(\varrho + \frac{k}{\sin \alpha} \right) = \frac{X}{r} f(\varrho) \dots \dots A.$$

so ist für das unmittelbar folgende durch Drehung des Bogenelementes ab entstandene Flächenelement, dessen Krümmungshalbmesser wir dem vorigen gleich annehmen wollen, die Lage der Hellenpunkte bestimmt durch die Gleichung

$$x = \frac{X}{r} \left(\varrho + \frac{k'}{\sin \alpha} \right) = \frac{X}{r} \cdot F(\varrho) \dots \dots B.$$

Da nun $f(\varrho)$ und $F(\varrho)$ zwei durchaus verschiedene Functionen von ϱ sind, so muss nothwendig die Stetigkeit der Hellencurven beim Uebergang vom Flächenelement ac $c'a'$ zum Flächenelement ab $b'a'$ unterbrochen werden, da dieselben durch den plötzlichen Uebergang von $f(\varrho)$ zu $F(\varrho)$ im Parallelkreis $a'a'$ plötzlich eine andere Richtung einzuschlagen gezwungen werden.

§. 69.

Die Hellencurven krummer Flächen jeder Art, sofern sie nur selbst stetige Krümmung haben, sind immer stetig gekrümmte Curven. Die Krümmung einer Fläche ist stetig, wenn sich die Krümmungshalbmesser ρ von einem Flächenelement zu den in jeder beliebigen Richtung auf einander folgenden Elementen stetig sich ändern d. h. schneidet z. B. eine im Punkt a auf der Fläche F (Fig. 66. Taf. XV.) normal stehende Ebene dieselbe in der Curve bab' und nehmen die Krümmungshalbmesser der Curve bab' in den Punkten 1, 2, a , 3, 4 ... die wir uns einander unendlich nahe liegend denken können, nach einem bestimmten Gesetze stetig zu oder ab, und findet dasselbe auch in jedem andern Schnitte cc' , dd' ... statt, den eine zweite, dritte ... im Punkt a auf der Fläche F normal stehende Ebene mit ihr erzeugt, so müssen wir annehmen, dass die Fläche überhaupt stetig gekrümmt sei. Ist dies aber der Fall, dann ändern sich auch die Krümmungsradien der Fläche selbst von einem Flächenelement zum andern stetig.

Unter dieser Voraussetzung muss aber nothwendig eine ähnliche Beziehung zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte der Hellencurven der Kugel und denjenigen der gegebenen Fläche stattfinden, wie wir sie im vorigen §. 68 für Umdrehungsflächen nachgewiesen haben; wir werden nemlich, wenn wir ein 3axiges Coordinatensystem annehmen, für die Coordinaten der Helligkeitspunkte der gegebenen Fläche F Gleichungen erhalten, welche die Form haben:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{X}{r} \cdot F(\rho) \\ y = \frac{Y}{r} \cdot F(\rho) \\ z = \frac{Z}{r} \cdot F(\rho) \end{array} \right.$$

Ändert sich hier $F(\rho)$ stetig, so ist auch die diesen Gleichungen entsprechende Curve eine stetig gekrümmte, da r d. h. der Halbmesser der Normalkugel constant und X, Y, Z die Coordinate irgend einer der Hellencurven der Kugel, also die Coordinaten eines Kreises sind und sich demnach selbst stetig ändern.

§. 70.

Die Hellencurven von Umdrehungsflächen, deren Axe senkrecht zur Horizontal-Ebene ist, sind als die Schnitte von Cylinderflächen mit den

Umdrehungsflächen zu betrachten, deren Mantellinien parallel zur Horizontal-Ebene und senkrecht zur Richtung des Lichtstrahls sind.

Ist z. B. die Curve $GD''A''D''H$ (Fig. 67. Taf. XV.) der Meridian einer Umdrehungsfläche, $S'S''$ die Drehungsaxe, beide projectirt auf eine zum Lichtstrahl parallele Seiten-Ebene MN ; ist der um o'' beschriebene Kreis die Projection der Kugel auf dieselbe Seiten-Ebene, so ist die zu L'' senkrechte Sehne VW ein Kreis gleicher Helligkeit. Sind die Tangenten an den Punkten D'' und D''' des gegebenen Meridians parallel der Tangente am Punkt D , so ist bekanntlich die Beleuchtung in den Parallelkreisen $D''F''$ und $D'''F'''$ dieselbe wie im Parallelkreis DF der Kugel; ist ferner:

$$D''E'' : D''F'' = DE : DF$$

$$D'''E''' : D'''F''' = DE : DF$$

so haben die Punkte E'' und E''' die gleiche Helligkeit wie der Punkt E u. s. f.

Nun wird aber der Parallelkreis DF von dem Hellenkreis VW in zwei Punkten p und p' geschnitten, deren Verbindungslinie pp' parallel zur Horizontal-Ebene und senkrecht zum Lichtstrahl L ist, d. h. der Punkt E der Seitenprojection entspricht den beiden Punkten p und p' in der Horizontalprojection. Dasselbe findet auch statt an der Umdrehungsfläche; auch hier entspricht der Punkt E'' der Seitenprojection den beiden Punkten e und e' im Grundriss. Die Verbindungslinie ee' ist aber nothwendig parallel mit pp' , also ebenfalls parallel zur Horizontal-Ebene und senkrecht zum Lichtstrahl. Dasselbe lässt sich für jeden Punkt der Curve $W''B''B'''V''$ nachweisen. Alle durch die Punkte $W''E''B''B''' \dots V''$ gehenden Geraden ce' , bb' ... sind als Mantellinien eines Cylinders zu betrachten, dessen Leitlinie (resp. Spur in der Seiten-Ebene) eben jene Curve $W''E''B''B''' \dots V''$ ist und dessen Durchdringung mit der Umdrehungsfläche die dem Hellenkreis VW der Kugel entsprechende Hellencurve auf der Umdrehungsfläche erzeugt.

§. 71.

Bekanntlich ist die Helligkeit eines Punktes P einer Fläche von der Grösse des Winkels abhängig, welchen der Lichtstrahl mit der Normalen im Punkt P der Fläche macht, in allen Punkten, in welchen jener Winkel gleich ist, ist auch die Helligkeit dieselbe, und die Hellencurven einer Fläche sind nichts anderes, als die stetigen Verbindungslinien derjenigen Punkte, in welchen eben jene Winkel gleich sind.

Die Construction der Hellencurven ist daher gleichbedeutend mit der Aufgabe, solche Punkte einer Fläche aufzusuchen, in welchen die Normalen mit einer gegebenen Linienrichtung gleiche Winkel machen.

Alle im zweiten Abschnitt besprochenen speciellen Fälle werden daher in folgender allgemein gefassten Aufgabe enthalten sein:

Es ist gegeben eine Gerade $(mn, m'n')$ (Fig. 68. Taf. XV.) und eine Fläche z. B. eine Umdrehungsfläche $(svws')$, man soll auf derselben Punkte suchen, deren Normalen mit $(mn, m'n')$ einen Winkel $= \alpha$ einschliessen.

Da alle Normalen von der verlangten Art mit einer zu $(mn, m'n')$ parallelen Linie denselben Winkel α machen, so müssen offenbar alle Linien, welche wir parallel mit jenen Normalen durch einen Punkt ss' der Geraden $[mn, m'n']$ ziehen, die Mantellinien einer Drehungskegelfläche bilden, deren Spitze (s, s') und deren Axe die Linie $(mn, m'n')$ ist.

Diese Kegelfläche können wir uns aber leicht verschaffen, wenn wir die horizontal-projicirende Ebene mn , sammt deren Schnitt mit der Kegelfläche in die Horizontal-Ebene umklappen. Wir erhalten als Umklappung von $(ns, n's')$ die Linie ns'' und als Umklappung des Schnittes mit dem Kegel das Dreieck $as''b$, dessen Seiten as'' und bs'' mit $s''n$ den Winkel α einschliessen müssen.

Die Horizontalspur des Kegels (d. h. die Ellipse $abcd$) kann ohne Schwierigkeit construirt werden.

Um nun irgend einen Punkt der verlangten Art auf der Umdrehungsfläche zu finden, wird man eine beliebige Mantellinie $(se, s'e')$ des Kegels zeichnen und die zu dieser Linie parallele Normale auf der Umdrehungsfläche suchen müssen.

Die Normale gt im Punkt g des Meridians vw schneidet die Axe ss' in o ; bei der Umdrehung bleibt die Normale gt stets normal auf der Fläche, während ihr Fusspunkt g den Parallelkreis gi beschreibt. Jede Verbindungslinie eines auf dem Parallelkreis gi liegenden Punktes mit o ist daher eine Normale auf der Umdrehungsfläche, und jede derselben macht mit der Horizontal-Ebene den Winkel $t of$.

Bringt man daher die Mantellinie $(se, s'e')$ in die zur Vertikal-Ebene parallele Lage $(se'', s'e''')$ und zieht $to \parallel s'e'''$ so, dass to zugleich normal auf dem Meridian vw ist (was am besten mit Zuhilfenahme der zu $s'e'''$ senkrechten Tangente geschieht), so hat man nur noch den Parallelkreis gi zu zeichnen und $ko \parallel s'e'$ zu ziehen, alsdann ist der Punkt h , in welchen gi von ko geschnitten wird, ein Punkt von der Art, dass wenn man durch h eine Linie parallel zu $(mn, m'n')$ legen würde, der Winkel zwischen ihr und der Normalen hk gleich dem gegebenen Winkel α wäre.

Für jede beliebige andere Mantellinie des Kegels (ss') würden sich nun weitere dem Punkt h entsprechende Punkte finden lassen, deren stetige Verbindung eine Curve liefert, welche die Eigenschaft hat, dass alle innerhalb derselben auf der Drehungsfläche errichteten Normalen mit der Richtung der Linie $(mn, m'n')$ den Winkel α einschliessen.

§. 72.

Ist durch die Linie (mn, m'n') (Fig. 68. Taf. XV.) die Richtung des Lichts gegeben, und ist $\sphericalangle \alpha = 16^\circ$, 1) welcher Helligkeit entspricht die daraus hervorgehende Hellencurve unter der Voraussetzung einfacher Lichtintensität ($S=1$); 2) welche Lage hat die dieser Helligkeit entsprechende Curve gleicher Helligkeit auf der Kugel?

ad 1) Die entsprechende Helligkeit findet man aus der Gleichung des §. 25.

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha = \sin (y \cdot 90^\circ) \\ \sphericalangle \alpha \text{ ist } &= 16^\circ, \text{ folglich } \cos \alpha = \cos 16^\circ = 0,9613 \\ &0,9613 = \sin (y \cdot 90^\circ) \\ \text{es ist aber } &0,9613 = \sin 74^\circ \\ \text{daher } \sin 74^\circ &= \sin (y \cdot 90^\circ) \\ \text{oder } y \cdot 90 &= 74^\circ \\ \text{folglich die Helligkeit } y &= \frac{74}{90} = 0,822. \end{aligned}$$

ad 2) Um die Lage der Hellencurve auf der Kugel zu finden, welche dieser Helligkeit entspricht, haben wir in Gleichung B §. 29 $S=1$ und $z=1-y=1-0,822=0,178$ zu setzen, und erhalten sodann:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \sin (0,178 \cdot 90) = 1 - \sin 16^\circ \\ &= 1 - 0,2756 = 0,7244. \end{aligned}$$

Die dem Winkel von 16° entsprechende Helligkeit findet also statt auf demjenigen Kreis der Kugel, dessen Ebenen $0,7244 \cdot r$ vom Mittelpunkt der Kugel absteht, deren Radius $= r$ ist. Selbstverständlich ist die Entfernung auf dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius aufzutragen.

§. 73.

Nachdem wir in der zweiten Abtheilung gezeigt haben, wie man die Helligkeit jedes beliebigen Elementes der Oberflächen regelmässiger mathematischer Körper bestimmt, möge noch die Anwendung unserer Theorie durch Vorführung einiger praktischer Beispiele in vollständiger farbiger Ausführung in den auf Taf. XVI—XXIII dargestellten Gegenständen zum vollen Verständniss und zu klarer Anschauung gebracht werden.

Taf. XVI und XVII zeigt eine Zusammenstellung von Körpern, die nur durch ebene Flächen begrenzt sind; und zwar Taf. XVI, das Constructionsblatt, Taf. XVII die Ausführung.

Taf. XVIII und XIX zeigt eine der vorigen ganz analoge Zusammenstellung mathematischer, jedoch von krummen Flächen begrenzter Körper in gleicher Behandlung.

In Taf. XX und XXI erblicken wir die malerische Zusammenstellung einzelner architektonischer Details, Säulensfuss, Kapitäl und Gebälk einer römisch-dorischen Säulenordnung. Dass die einzelnen Glieder, aus welchen diese Details zusammengesetzt sind, nichts anderes als Ebene, Cylinder-, Kegel- und Umdrehungsflächen sind, ist auf den ersten Blick klar. Die Beleuchtungsconstruction ist demnach sehr einfach, um so einfacher als die Axen der genannten Flächen grösstentheils senkrecht zur Horizontal-Ebene stehen.

In Taf. XXII und XXIII endlich ist eine in einer halbrunden Nische stehende Henkelvase dargestellt, wozu weiter nichts zu bemerken, da die Construction der Hellencurven auch nicht die geringsten Schwierigkeiten macht, denn die Oberfläche der Vase ist nichts anderes als eine Umdrehungsfläche mit lotrechter Axe.



Fig. 1.

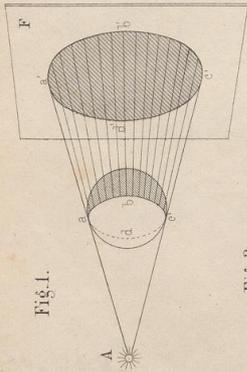


Fig. 2.



Fig. 3.

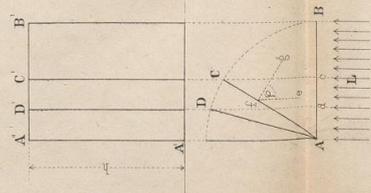


Fig. 4.

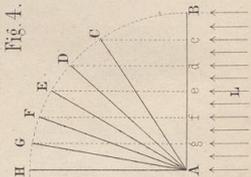


Fig. 5.

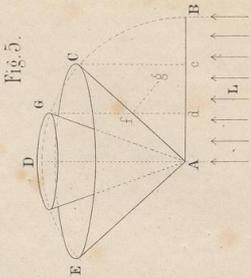


Fig. 6.

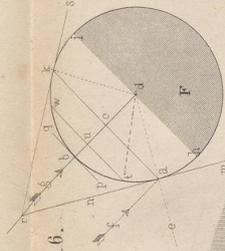


Fig. 8.

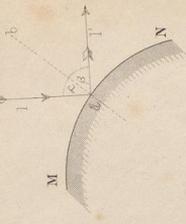


Fig. 9.

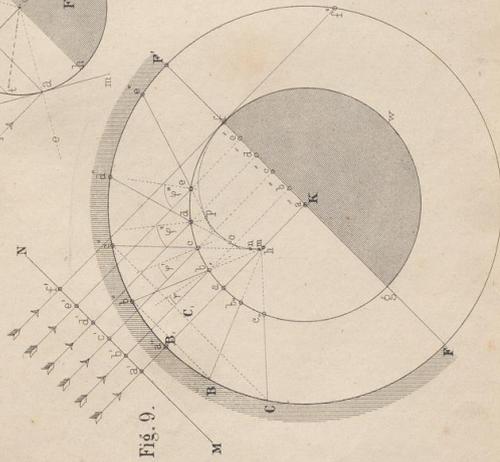
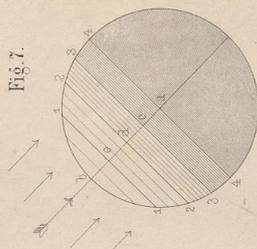


Fig. 7.



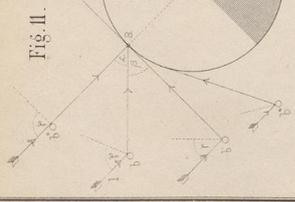


Fig. 11.

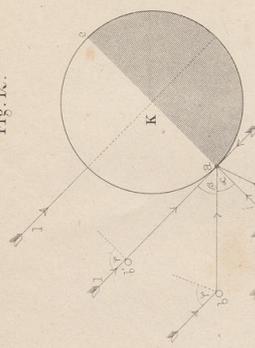


Fig. 12.

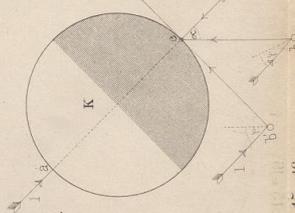


Fig. 13.

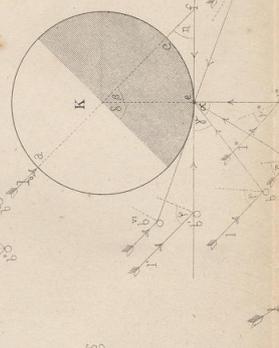


Fig. 14.

Fig. 15 & 16.

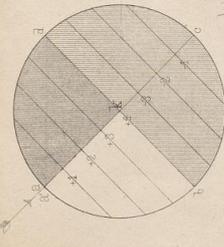


Fig. 19.

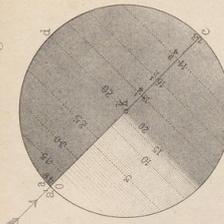


Fig. 10.

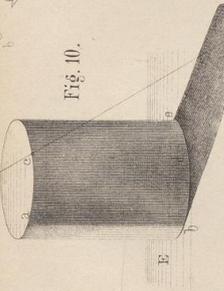


Fig. 17.

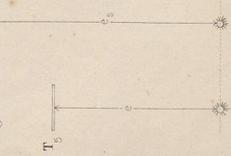
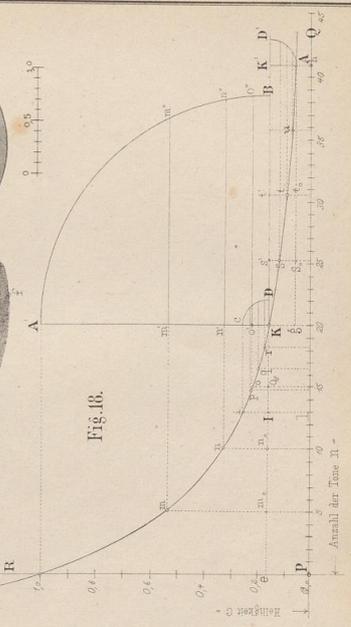


Fig. 16.



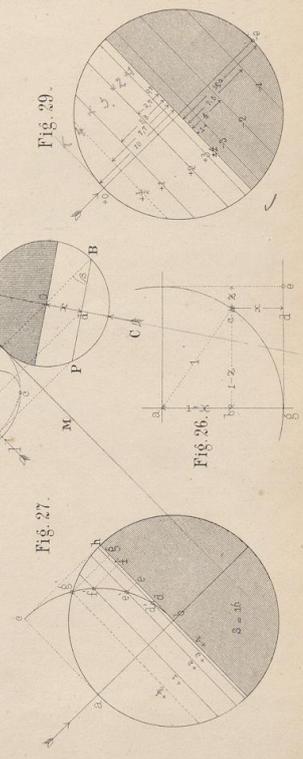
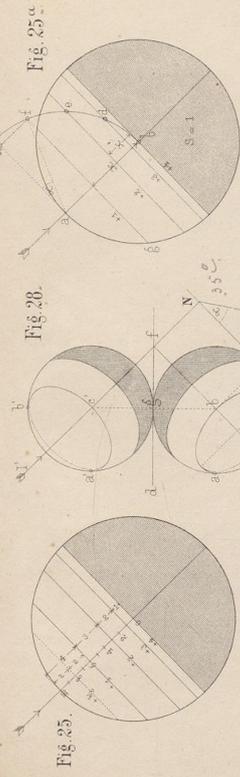
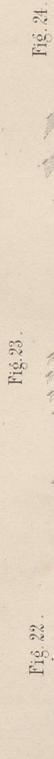
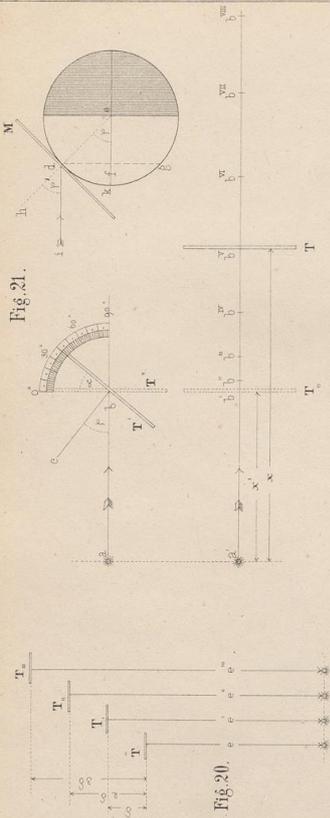


Fig. 30.

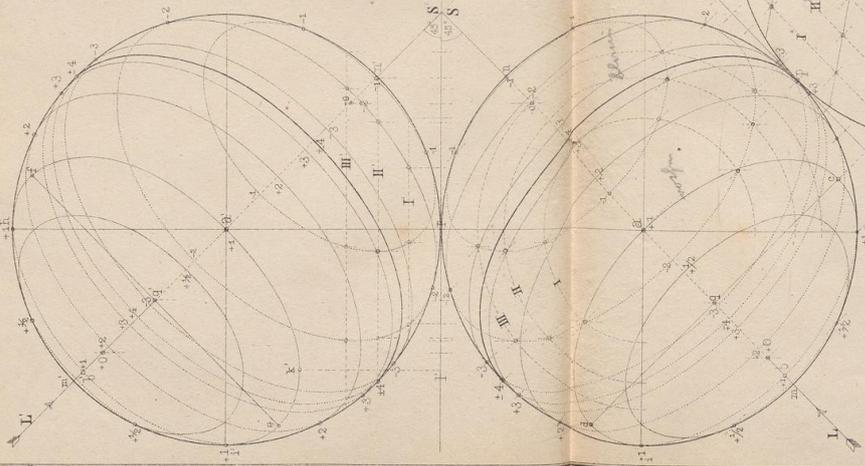
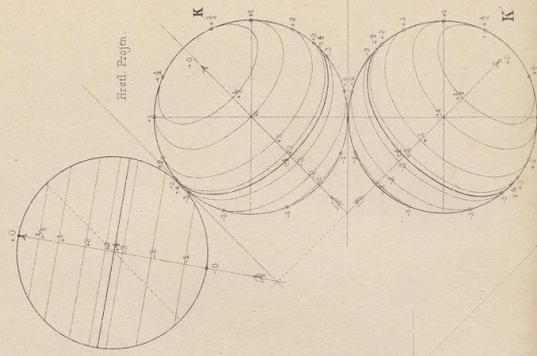


Fig. 31.



Horizontal Projektion.

Vertikale Projektion.

für die Projektionen

für die Projektionen

Winkel

Winkel

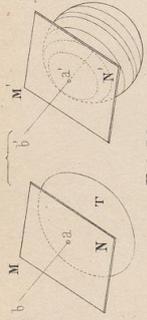


Fig. 32.

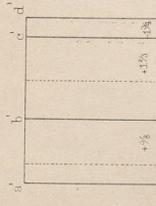


Fig. 33.

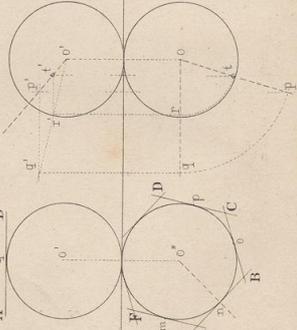


Fig. 34.

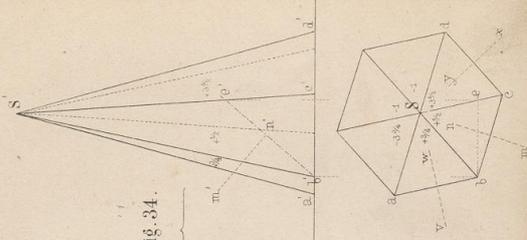


Fig. 35.

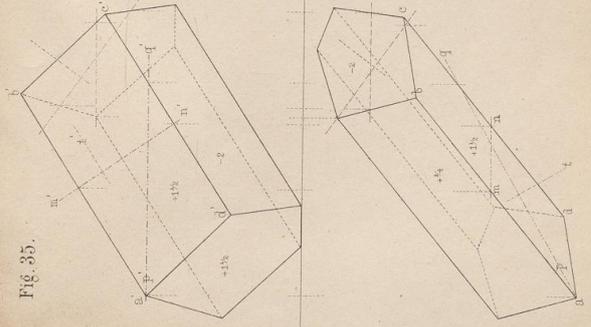


Fig. 36.

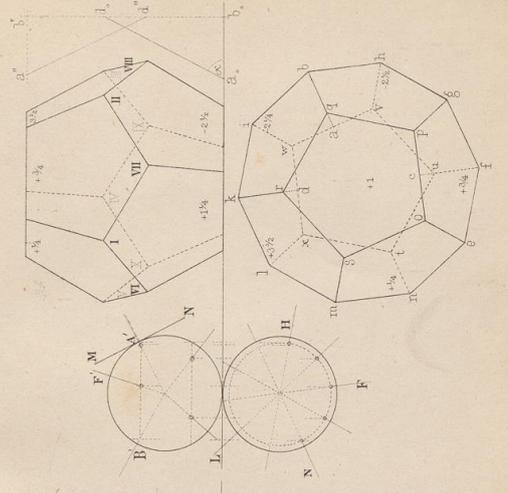




Fig. 39.

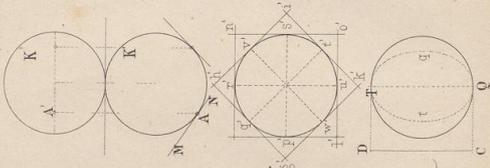


Fig. 37.

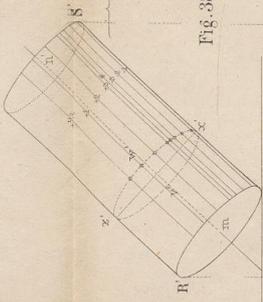
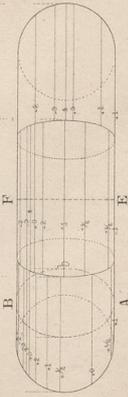
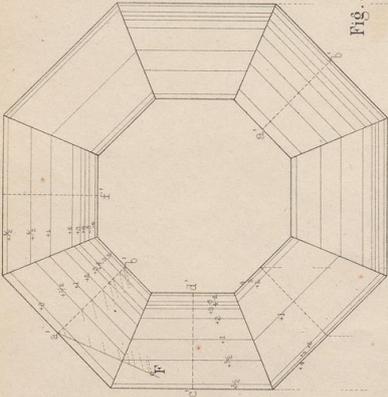


Fig. 38.

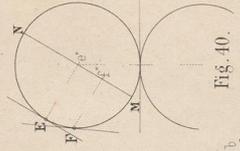


Fig. 40.

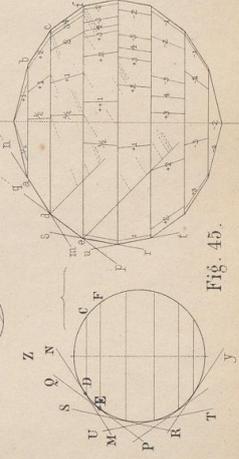
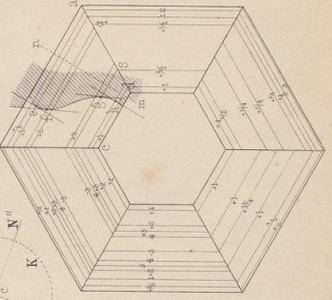
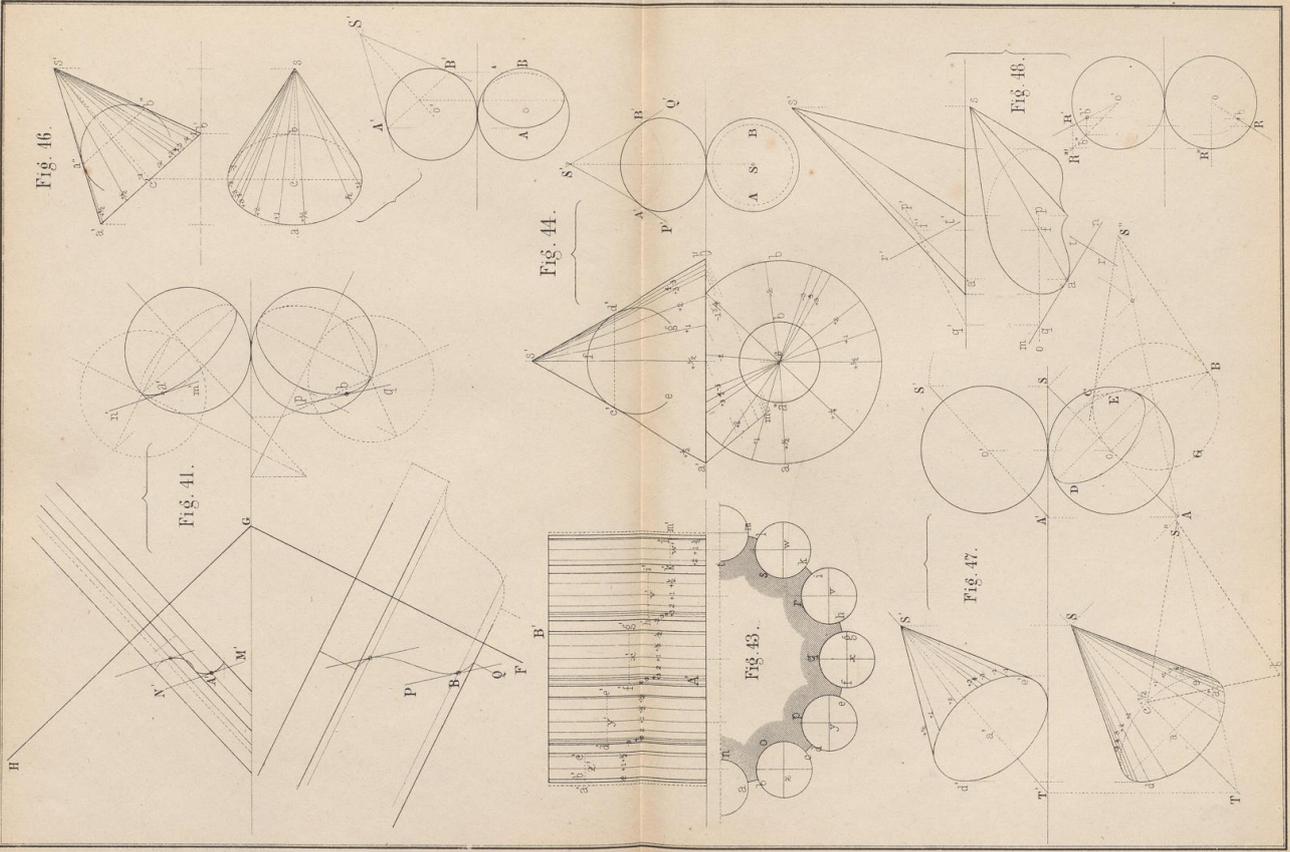


Fig. 45.



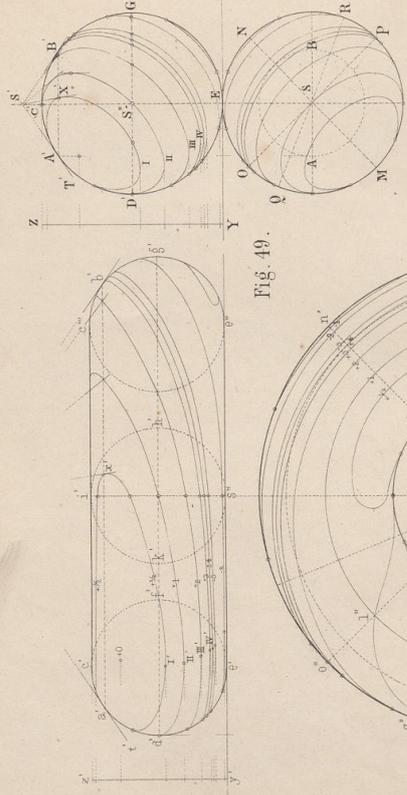
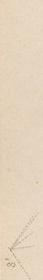


Fig. 49.

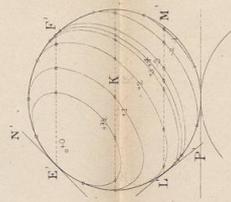


Fig. 50.

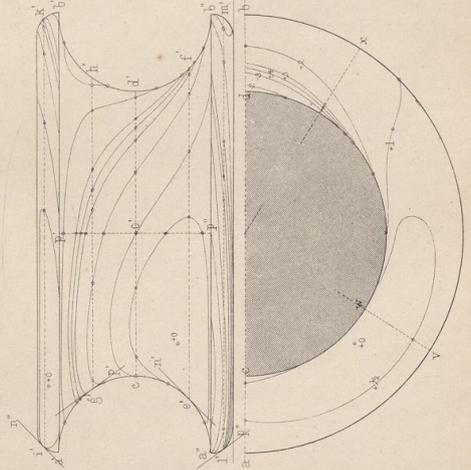


Fig. 51. a

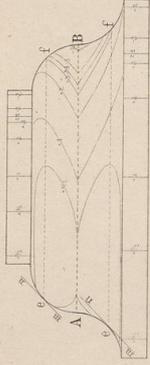


Fig. 51. b

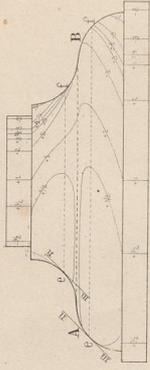


Fig. 51. c

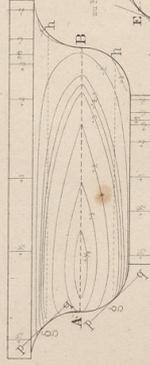


Fig. 51. d

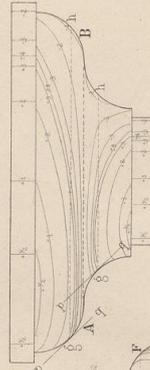


Fig. 52. a

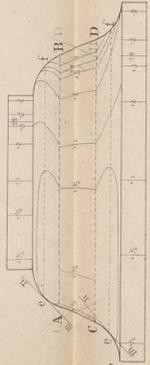


Fig. 52. b

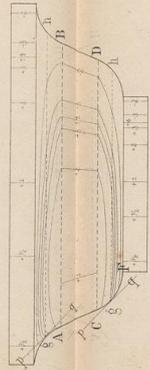


Fig. 54. a



Fig. 54. b



Fig. 54. c

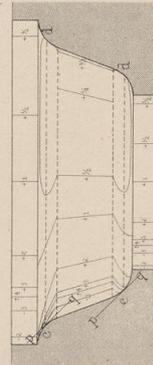
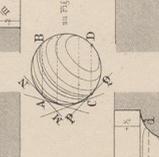
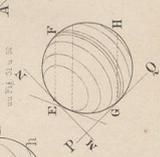
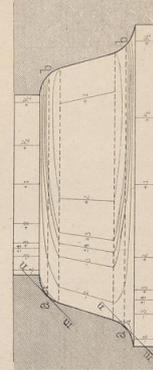


Fig. 54. d



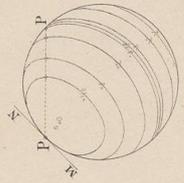


Fig. 53.

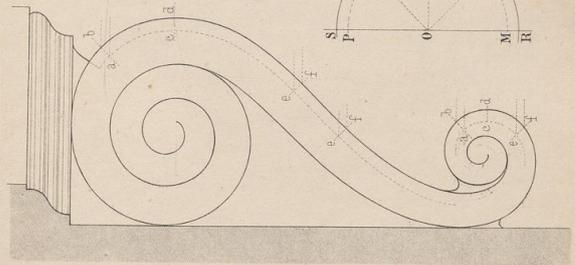
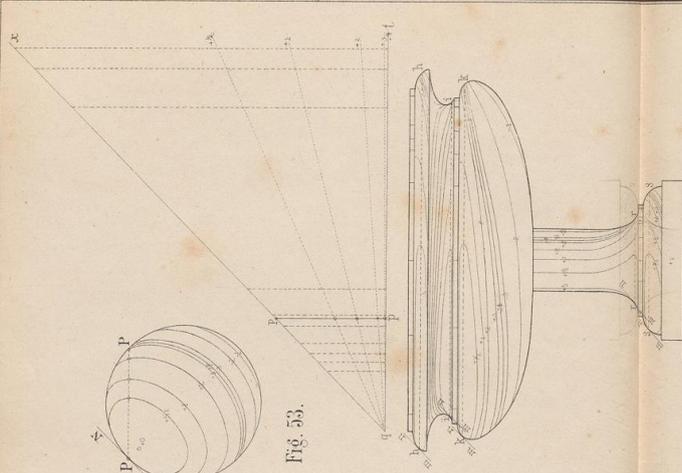
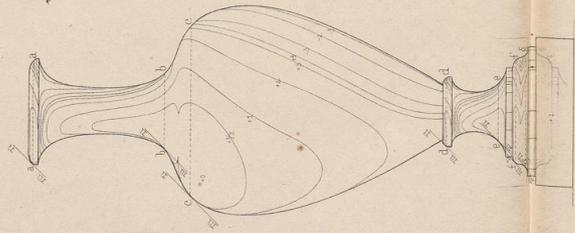


Fig. 55.

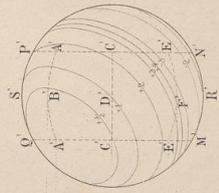
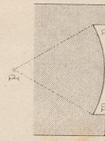
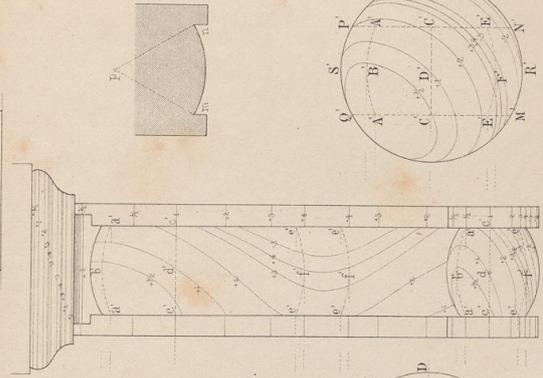
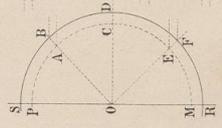


Fig. 56.

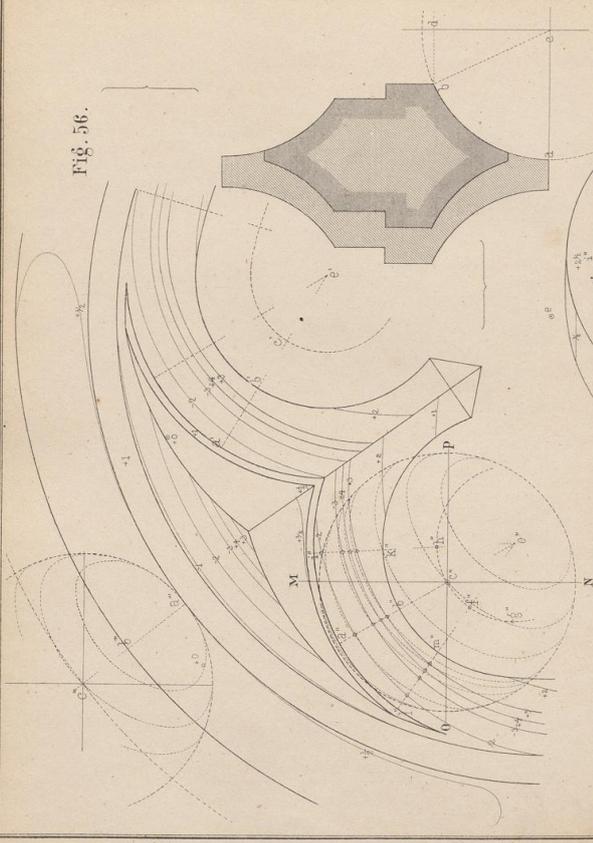


Fig. 57.

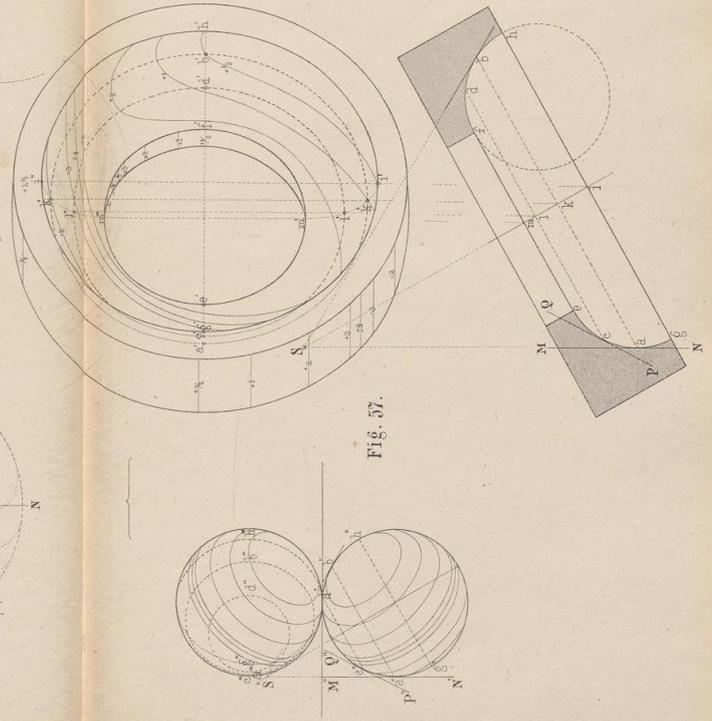


Fig. 58.

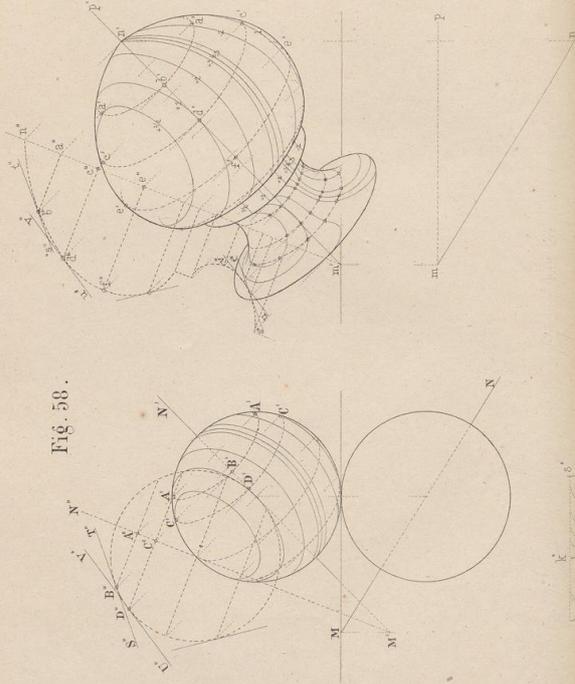


Fig. 59.

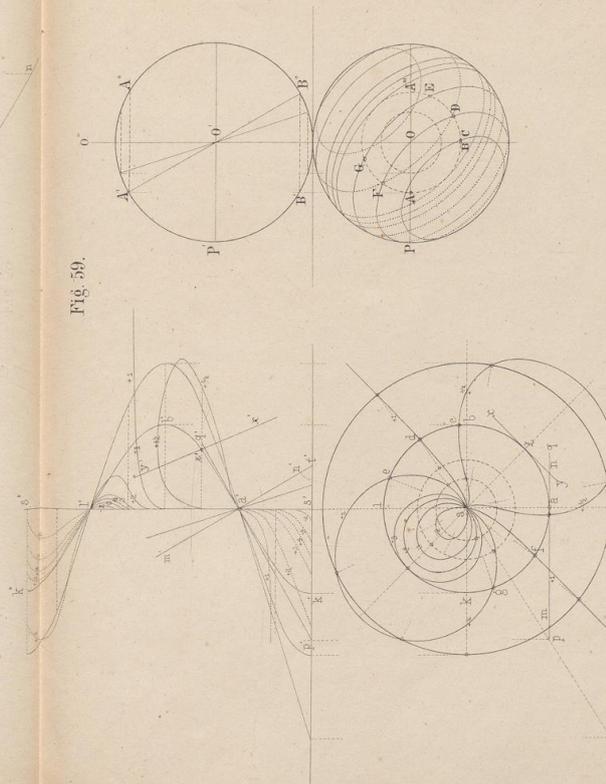


Fig. 60.

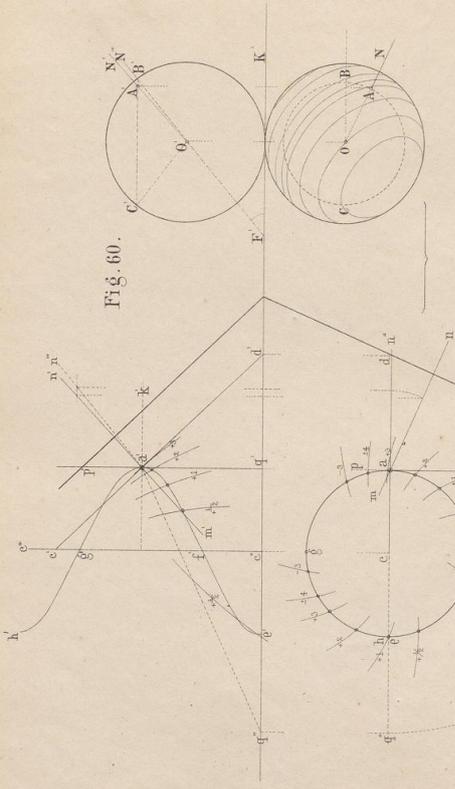


Fig. 61.

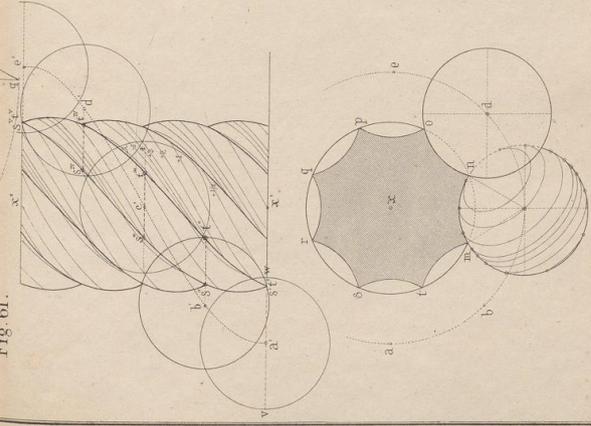
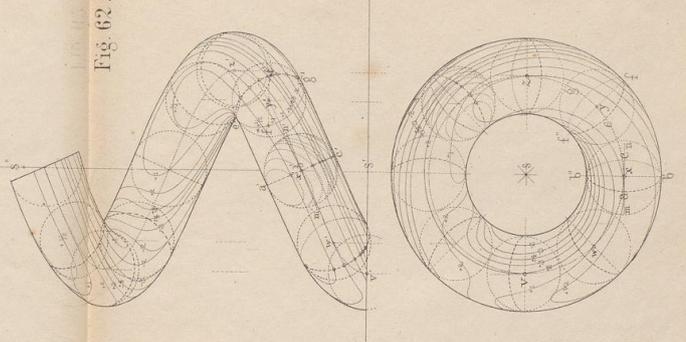


Fig. 62.



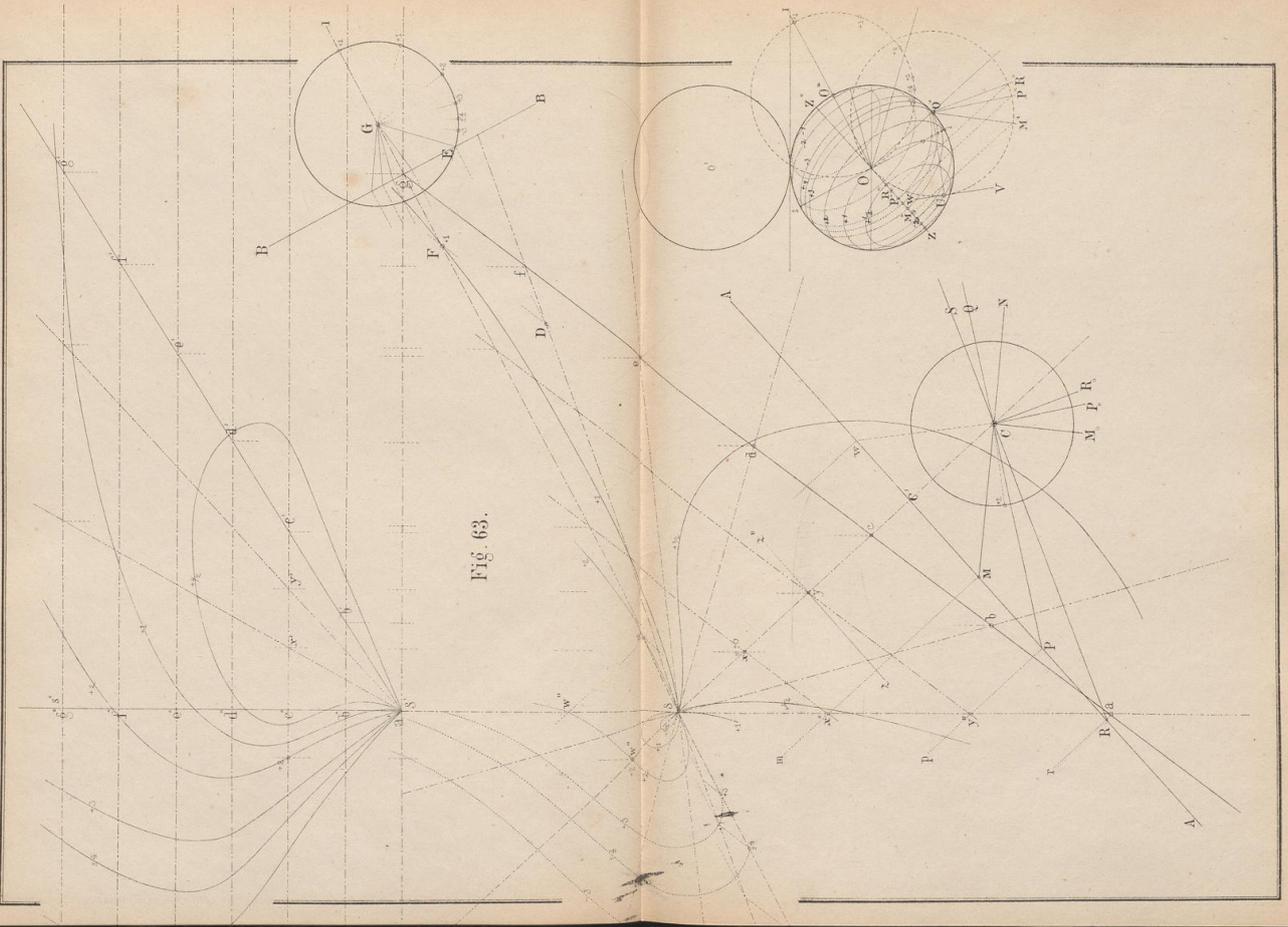


Fig. 63.

Fig. 64.

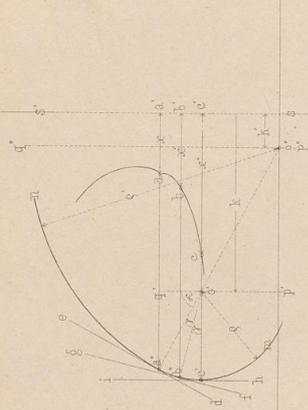
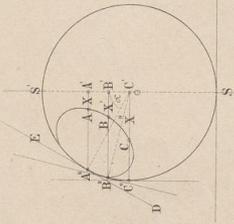


Fig. 65.

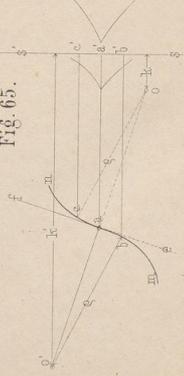


Fig. 66.

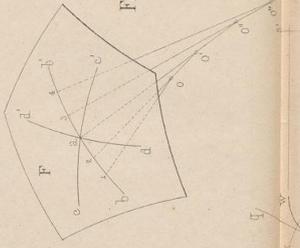


Fig. 67.

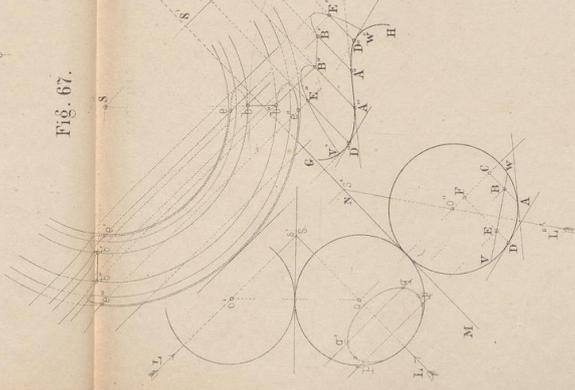
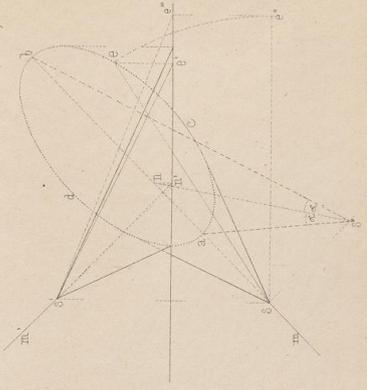
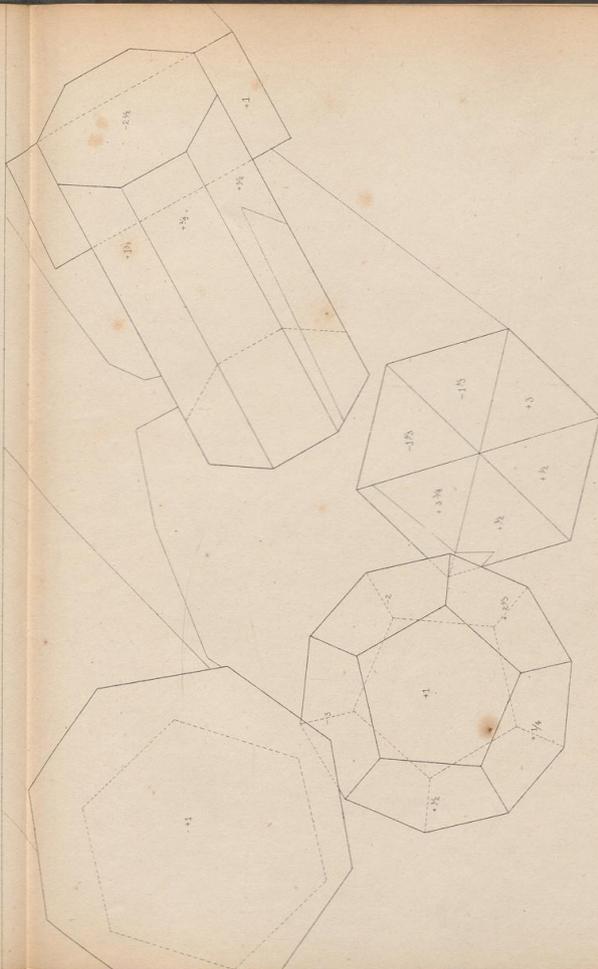
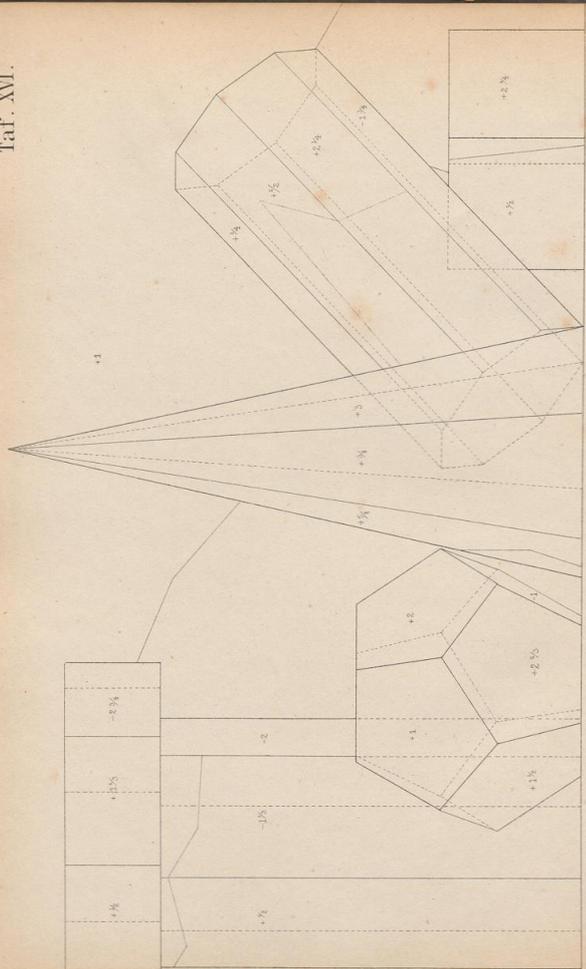


Fig. 68.



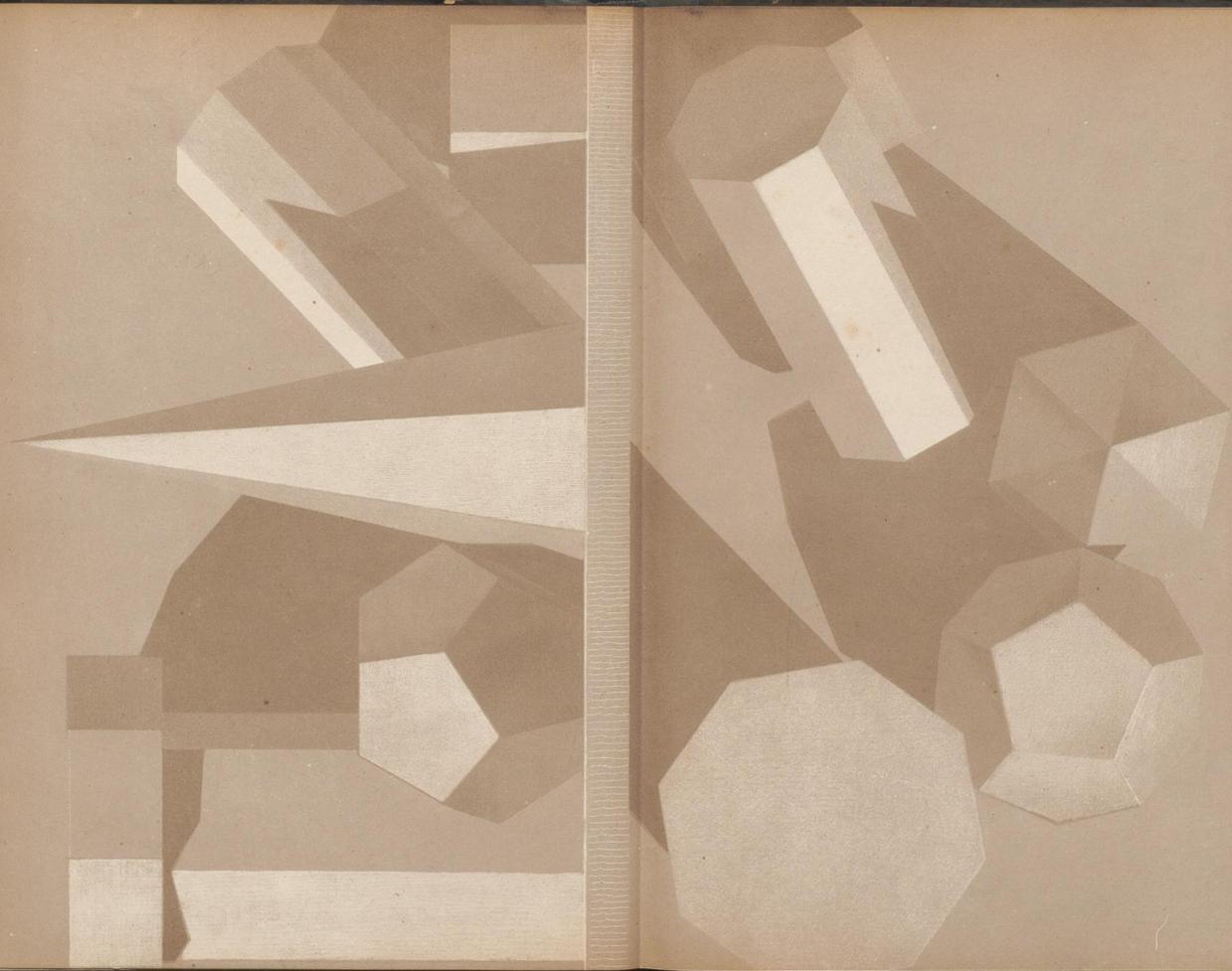


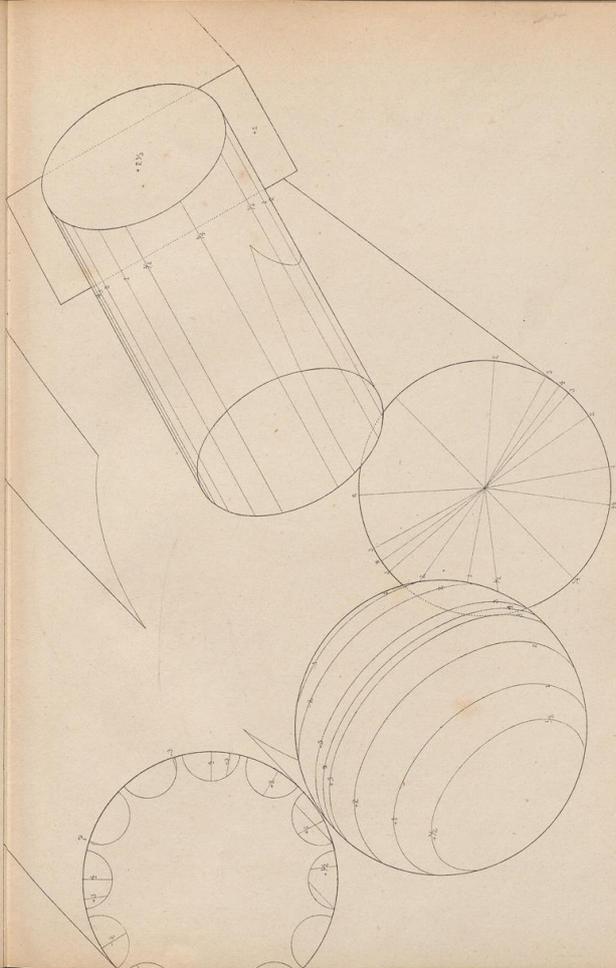
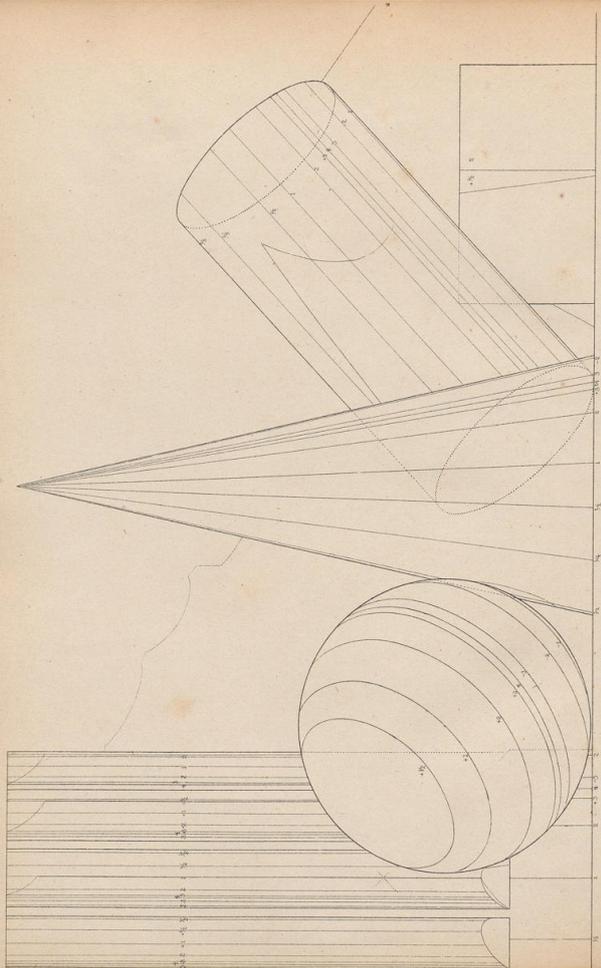
Druck v. W. Müller.
VERLAG von KONRAD WITTMER
STUTTGART

© Bild. Schürers/Hande

Arch. Paul Müller

PL. XVII.

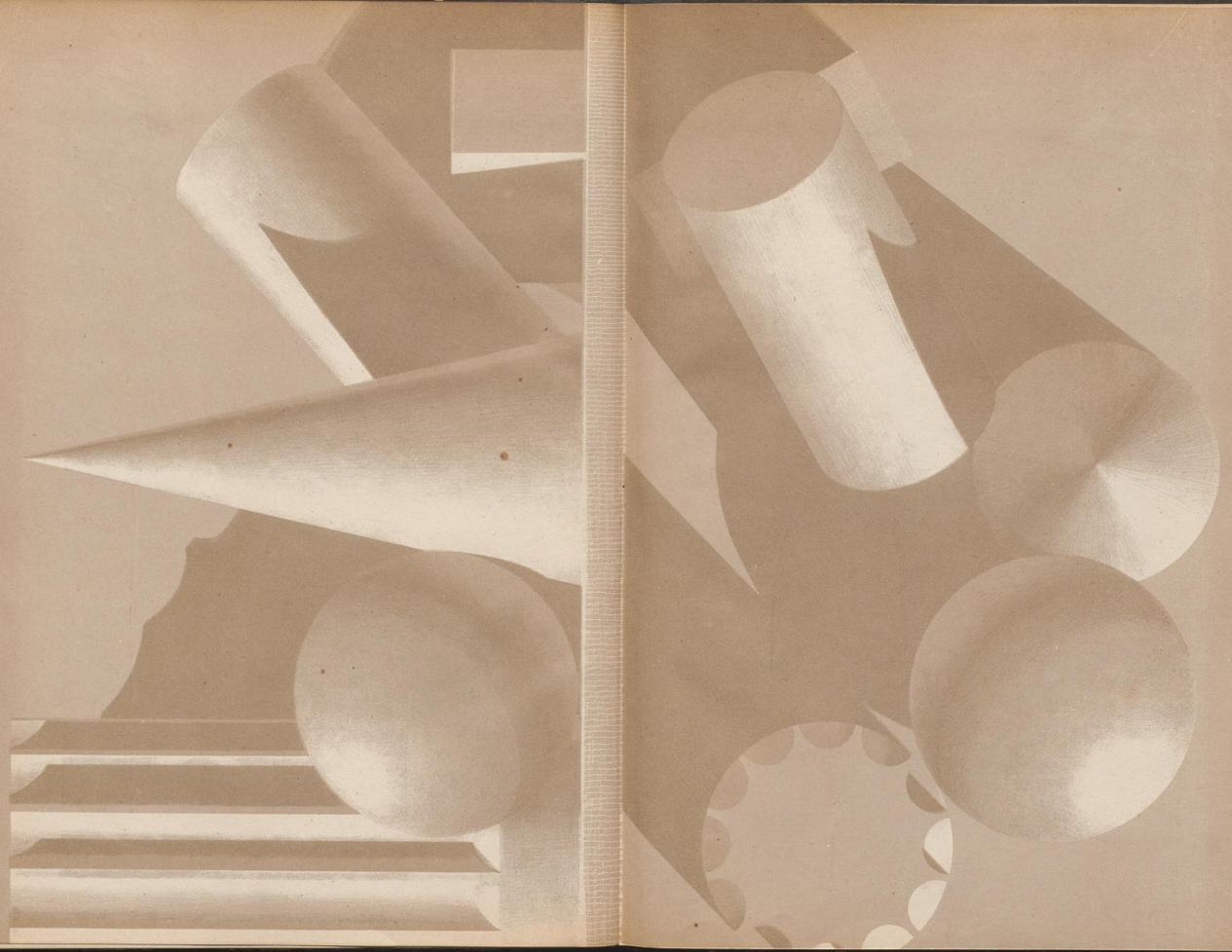


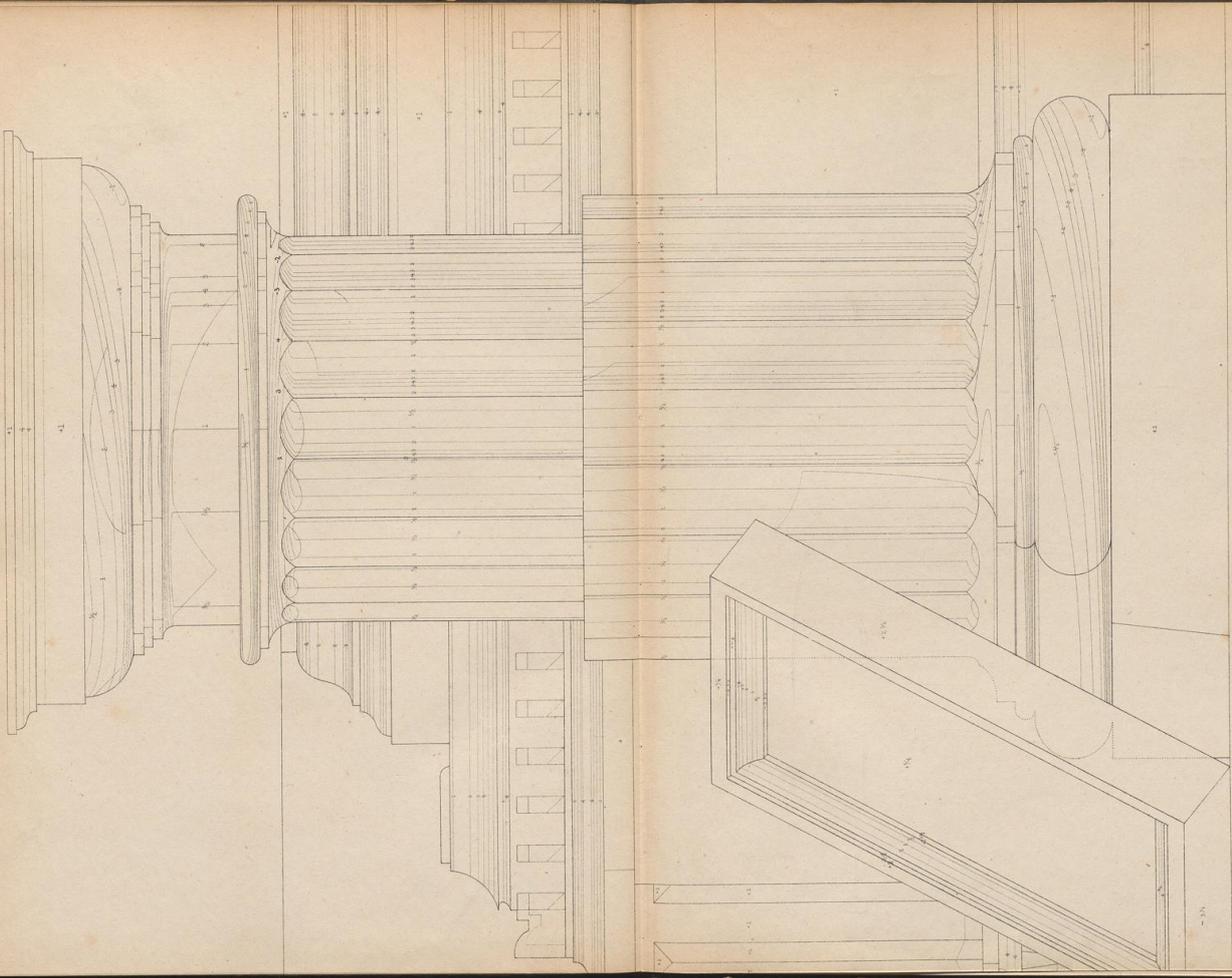


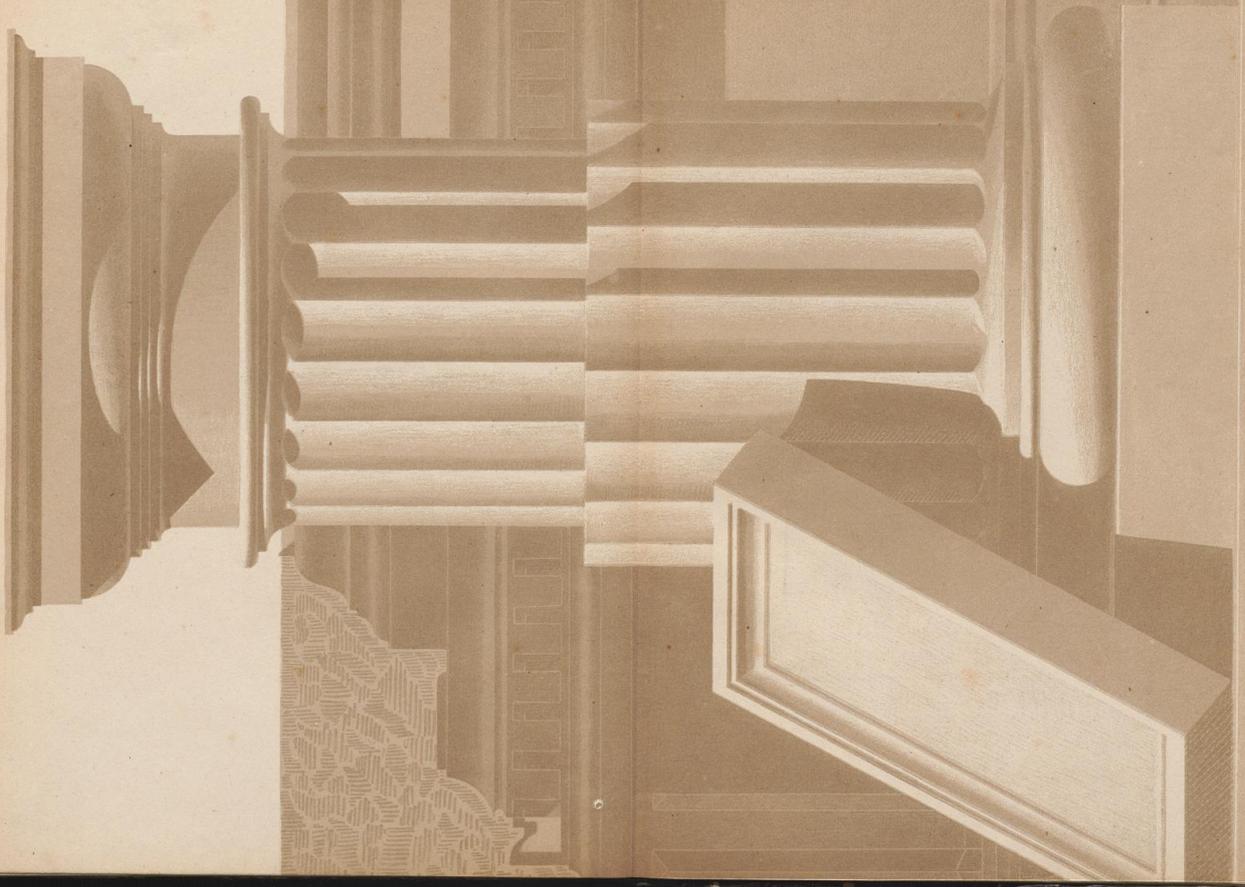
Druck v. W. Müller.
VERLAG VON KONRAD WITWER
STUTTGART.

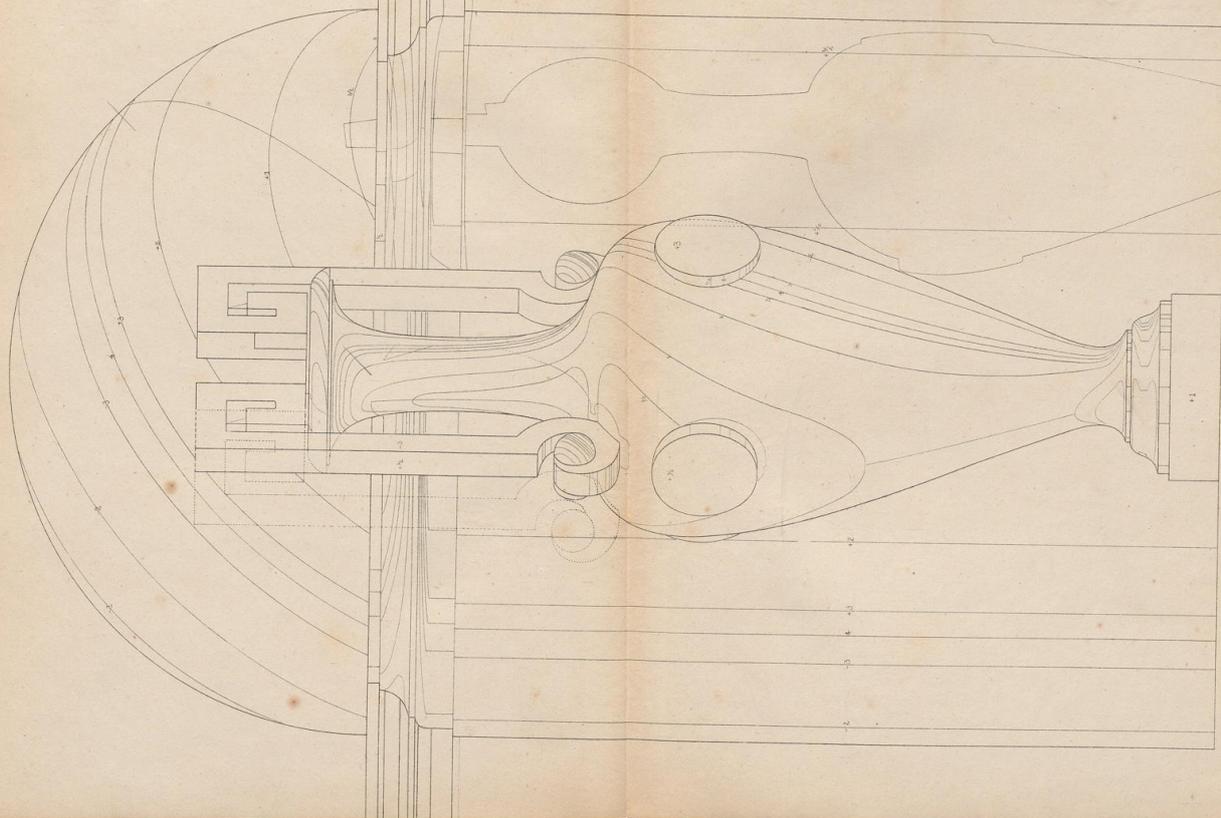
Preis Schattenscheitels

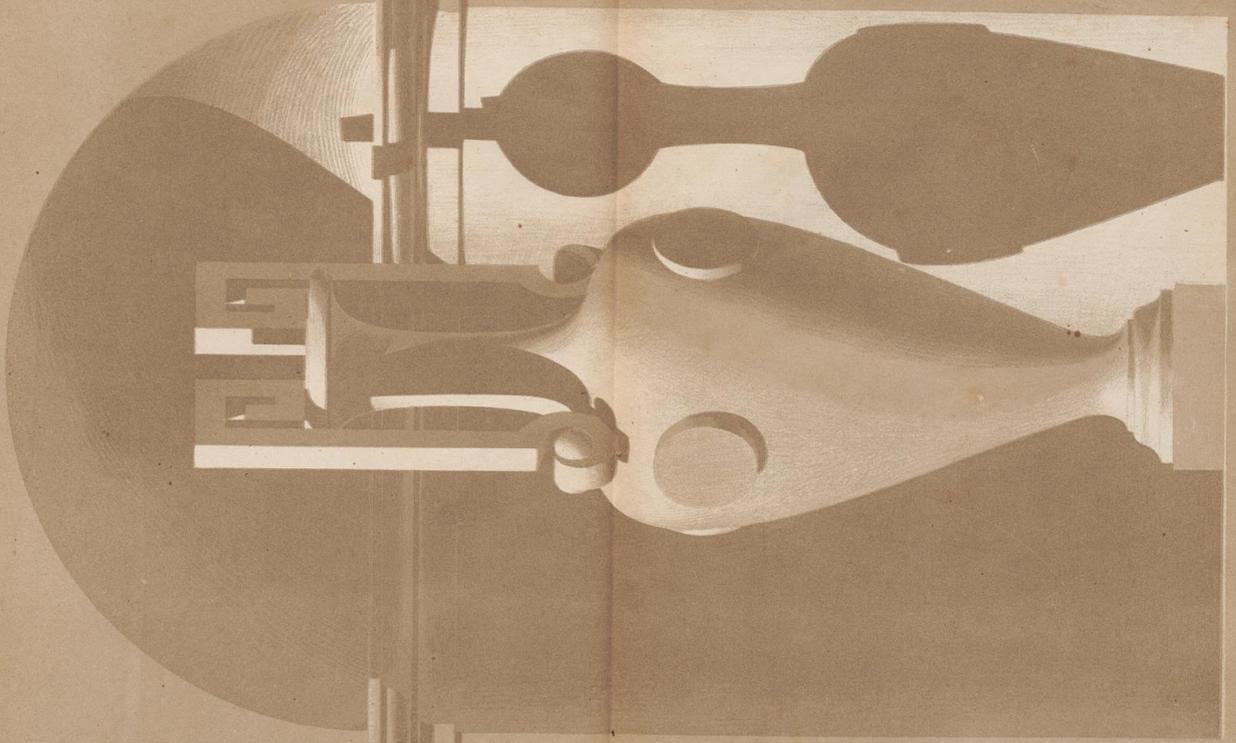
Lith. Paul Keller.













03M36340

P
03

Riess

701

255

A IV

M
36340