Die natürlichen Anschauungsgesetze des perspektivischen Körperzeichnens

Stüler, Friedrich

Breslau, 1892

I. Teil. Die geometrische, axonometrische u. perspektivische Darstellung der regulären Polygone und des Kreises sowie deren Anwendung auf die Zeichnung von Körpern etc. Tafel I bis Tafel XXVI.

I. Teil.

Die geometrische, axonometrische u. perspektivische Darstellung

der

regulären Polygone und des Kreises

sowie deren

Anwendung auf die Zeichnung von Körpern etc.

Tafel I bis Tafel XXVI.

I. Die geometrische und axonometrische Darstellung der regulären Polygone und des Kreises, mit Bezugnahme auf ihre perspektivische Zeichnung.

Um einfach gestaltete Flächen oder Körper perspektivisch konstruieren zu können, muss zunächst eine genaue Kenntnis der Eigenschaften der zu zeichnenden Gegenstände vorausgesetzt werden. Wir haben uns daher zunächst mit den Eigenschaften der einzelnen regelmässigen Polygone und deren Konstruktions-Bedingungen zu beschäftigen, weil die Polygone die Grundflächen aller eckigen Körper bilden. In der perspektivischen Zeichnung werden wir aber nie die wahre Gestaltung und wirkliche Grösse der Form, sondern nur deren bildliche Erscheinung darstellen, z. B. einen liegenden Kreis als Ellipse zeichnen. Somit können wir für die perspektivische Darstellung dieser regelmässigen Polygone die gebräuchlichsten geometrischen Konstruktionen, welche meistenteils mit Zuhülfenahme von Kreisbögen ausgeführt werden, nicht unmittelbar benutzen. Wir müssen daher andere Eigenschaften dieser regulären Vielecke aufsuchen, welche sich auf das Verhältnis der Grundlinie zur Höhe, oder auf das zweier zu einander senkrecht stehenden Hülfslinien beziehen. Die Ursache der Verschiedenheit der regelmässigen Polygone untereinander besteht aber in dem Grössenunterschiede der entsprechenden Polygon- und Centriwinkel.

Die Grösse der Winkel wird durch das Verhältnis des zugehörigen Sinus (resp. des dem Winkel gegenüberliegenden Lotes) zum Cosinus (resp. der dem Winkel anliegenden Seite, welche auf ersterem Lote senkrecht steht) ausgedrückt, somit auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System zurückgeführt. Wir müssen daher zunächst folgende Skala dieser Grössenverhältnisse feststellen. (Fig. 1 bis 11, Tafel I.)

cos. : sin. = 6 : 1	entspricht	einem	Winkel	von	$9\frac{1}{3}{}^{0}$.*)
cos. : sin. = 3 : 1	„	„	„	„	$18\frac{1}{2}{}^{0}$.
cos. : sin. = 2 : 1	„	„	„	„	$26\frac{1}{2}{}^{0}$.
cos. : sin. = 7 : 4	„	„	„	„	30^{0}.
cos. : sin. = 1 : 1	„	„	„	„	45^{0}.
cos. : sin. = 4 : 7	„	„	„	„	60^{0}.
cos. : sin. = 1 : 2	„	„	„	„	$63\frac{1}{2}{}^{0}$.
cos. : sin. = 1 : 3	„	„	„	„	$71\frac{1}{2}{}^{0}$.
cos. : sin. = 1 : 4	„	„	„	„	76^{0}.
cos. : sin. = 1 : 5	„	„	„	„	$78\frac{2}{3}{}^{0}$.
cos. : sin. = 1 : 6	„	„	„	„	$80\frac{2}{3}{}^{0}$.

Diese Skala giebt uns Mittel an die Hand, ohne Hülfe von Bogenschlagen annäherungsweise genaue Konstruktionen auszuführen. Für die Darstellung dieser Figuren werden wir uns des axonometrischen Zeichnens, als einer Vorstufe für das perspektivische Zeichnen bedienen. — Für die Benutzung dieser Zeichnungsmethode stellen wir folgende Fundamentalsätze auf (siehe Fig. 12 auf Tafel I, Fig. 13, 14a, 14b, 14c auf Tafel II):

Grundsätze für die axonometrische Darstellungsart.

1. Die beiden rechtwinklig zusammenstossenden Axen (x- und z-Axe), welche die rechteckige Horizontalebene begrenzen, werden unter einem Winkel von 30^{0} abweichend gezeichnet, und somit auch alle Linien, welche dieser z-Axe parallel laufen.
2. Alle diese zur Bildfläche senkrechten Linien erscheinen verkürzt und werden daher nur in der Hälfte ihrer wirklichen Länge aufgetragen.
3. Alle der Bildfläche parallelen Linien, gleichgültig ob in horizontaler, senkrechter oder schräger Richtung, behalten auch in der axonometrischen Zeichnung ihre wahre Grössenabmessung.
4. Alle Linien aber, welche eine schräge Lage zur Bildfläche haben, müssen mit Hülfe eines rechtwinkligen Koordinaten-Systems, der Grösse und Richtung nach, besonders konstruiert werden.

Die Anwendung dieser allgemeinen Grundsätze des axonometrischen Zeichnens, resp. der Parallel-Perspektive, auf die be-

*) ^{0} ist das Zeichen für Winkelgrad.

zügliche Darstellung von regulären Polygonen oder der hieraus entwickelten prismatischen Formen, findet im Nachstehenden noch genauere Erläuterung.

Die regulären Polygone haben die Eigenschaft, dass alle Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel **gleich** sind.

Das reguläre Dreieck.

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 2 R. $= 180^0$, somit ist der Winkel in einem gleichseitigen Dreiecke 60^0. Fig. 15a und 15b, Tafel III.

In jedem rechtwinkligen Dreieck, welches einen Winkel von 60^0 enthält, ist aber die Hypotenuse *b c* doppelt so gross wie die kleinste Kathete *b d*; diese kleine Kathete verhält sich aber zur grossen Kathete *c d* nahezu wie 4 : 7.

Anmerkung. Da $4^2 + 7^2 = 65$, unserer Annahme zufolge aber $4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 64 = 8^2$ sein soll, so beträgt der hierbei begangene Zeichenfehler $^1/_{65}$ der Seitenlänge.

Ein solches rechtwinkliges Dreieck *b c d* erhalten wir durch die Halbierung eines gleichseitigen Dreicks *b c a*; im ersteren verhält sich somit die Hypotenuse (*b c*) zur grossen Kathete *c d* wie 8 : 7 und zur kleinen Kathete *b d* wie 8 : 4.

Es ergiebt sich hieraus für die axonometrische Darstellung eines gleichseitigen Dreiecks folgende Konstruktion. Siehe Fig. 16 auf Tafel III.

Die gegebene Seite des Dreiecks *a b* wird als horizontale Grundlinie in ihrer wirklichen Grösse aufgetragen und in 8 gleiche Teile zerlegt. Vom vierten Teilpunkte d^1 aus ziehe man eine axonometrisch gezeichnete Senkrechte $d^1 c^1$, welche unter 30^0 von der Horizontalen abweicht. Die Länge dieser die verkürzte Breite ausdrückenden Senkrechten $d^1 c^1$, mache man gleich der Hälfte von $^7/_8$ der Grundlinie und verbinde den Endpunkt derselben mit den Endpunkten der Grundlinie. — Will man das Dreieck mit einer gleichmässigen Rahmenbreite von mässiger Dicke umgeben, somit körperlich gestalten (siehe Fig. 17a und 17b), so teile man, entsprechend der geometrischen Konstruktion, diese vorgenannte Senkrechte $d^1 c^1$ in 3 gleiche Teile und verbinde den der Grundlinie zunächst liegenden Teilpunkt *e* mit den beiden anderen Eckpunkten des Dreiecks *b* und *a*; verlängert man diese Linien über die Ecken hinaus, so bilden diese die Gehrungslinien für die zusammenstossenden Seiten der Rahmeneinfassung. Bei der axonometrischen

Zeichnung wird die Rahmenbreite in je halber geometrischer Grössenabmessung auf der verlängerten Mittellinie von $c^1 d^1$ nach aussen aufgetragen. Durch den gewonnenen Eckpunkt f^1 legt man alsdann Parallelen mit den inneren Seiten des Dreiecks, welche in den Gehrungslinien zusammentreffen.

Die Rahmendicke der axonometrischen Darstellung Fig. 17b wird lotrecht von den äusseren und inneren Eckpunkten nach unten gleichmässig angetragen. Vergl. Fig. 16b.

Das Quadrat in frontaler Stellung.

Das Quadrat besitzt die besondere Eigentümlichkeit, dass die Diagonalen *a c* und *b d* gleich sind und sich rechtwinklig schneidend halbieren. Fig. 18a, 18b, 19 (20a, 20b, 21) Tafel III und IV. Ist die Richtung einer Seite des Quadrates horizontal, so ergiebt sich die axonometrische Zeichnung desselben unmittelbar durch das Antragen zweier paralleler Seitenlinien an die Endpunkte der gegebenen Horizontalen unter einem Winkel von 30^0 und mit einer Länge gleich der Hälfte der gegebenen Seite.

Das Quadrat in der Übereckstellung.

Falls die Seite des Quadrats unter 45^0 gegen die Horizontale gerichtet ist (Fig. 22a und 22b, Tafel IV), wird die eine Diagonale eine horizontale Lage, die andere eine hierauf senkrechte Richtung haben; das Quadrat wird aber durch diese beiden Diagonalen in 4 kongruente, rechtwinklig-gleichschenkliche Dreiecke geteilt, deren Kathetenlängen sich zu den Grössen der entsprechenden Hypotenusen sehr nahe wie 5 : 7 verhalten.

Anmerkung. Da $5^2 + 5^2 = 50$, unserer Annahme zufolge aber $5^2 + 5^2 = 7^2 = 49$ sein soll, so beträgt der hierbei begangene Zeichenfehler $^1/_{50}$ s.

Ist nur die Seite des Quadrates für die axonometrische Darstellung desselben in der Übereckstellung gegeben, Fig. 23a und 23b, Tafel IV, so wird man dieselbe auf einer Horizontalen rechts und links von einem gegebenen Eckpunkte *a* antragen, diese Längen in 7 gleiche Teile zerlegen und von dem je fünften Teilpunkte aus unter einem Winkel von 30^0 zwei parallele Hülfslinien antragen, deren Längen $2^1/_2$ Teile*) der Seite betragen; durch die Verbindung der Endpunkte dieser Hülfslinien mit dem ur-

*) Die gegebene Quadratseite ist hier zunächst in 5 gleiche Teile zu zerlegen, die Hälfte derselben beträgt demnach $2^1/_2$ Teile.

sprünglichen Eckpunkte *a* auf der Horizontalen, entstehen die Richtungen zweier Quadratseiten. Die Verbindungslinie der Endpunkte der vorerwähnten Hülfslinien bildet die horizontale Diagonale des Quadrates, dessen zwei fehlende Seiten auch in der axonometrischen Darstellung durch Linien ergänzt werden, welche den zwei konstruierten Seiten parallel laufen.

Noch einfacher erhält man die 4 Eckpunkte dieses Quadrates in der Weise (vergleiche Fig. 24 mit Fig. 22a), dass man von einem gegebenen Eckpunkte *a* aus eine Linie unter 30° gegen die Horizontale zieht, auf der Länge jener Linie fünf Teile der gegebenen 7teiligen Quadratseite*) aufträgt und somit in *a c* die Länge der verkürzten senkrechten Diagonale bestimmt. Zieht man durch den Halbierungspunkt dieser Diagonale eine Horizontale, deren Länge, nach rechts und links vom Durchschnittspunkte mit der Senkrechten aus, fünf Massteile der gegebenen 7teiligen Seite enthalten, so ergeben sich in den Endpunkten dieser horizontalen Diagonale die noch fehlenden Eckpunkte des Quadrates.

Quadratischer Rahmen in der Übereckstellung.

Will man einen quadratischen Rahmen von einer gewissen Breite, z. B. *g h* Fig. 22b in der Übereckstellung axonometrisch darstellen, so hat man 7/5 der rechtwinkligen Breite *g h* rechts und links von den Endpunkten der horizontalen Diagonale des Quadrates nach aussen, bezw. innen anzutragen und von den Endpunkten dieser Masse Parallelen mit den Quadratseiten zu ziehen bis zu den Durchschnitten der verlängerten senkrechten Diagonale. Siehe axonometrische Darstellung in Fig. 25a, Tafel V.

Die Rahmendicke wird lotrecht in den äusseren und inneren Eckpunkten nach unten abgetragen, Fig. 25b.

Parallel zur Bildfläche stehendes Quadrat, auf einer Seite ruhend.

Steht ein senkrechtes Quadrat parallel zur Bildfläche, Fig. 26a, Tafel V, so wird es axonometrisch gezeichnet unverkürzt seine Gestaltung behalten. Die Dimensionen der Dicke einer quadratischen Platte werden bei der axonometrischen Darstellung in halber Grösse auf Linien abgetragen, welche von den

*) Es ist bei dieser zweiten Konstruktion des Quadrates unterstellt, dass sich die Seite zur Hypotenuse des Quadrats wie 7 : 10 verhält. Mit Rücksicht auf die erste Annahme würde sich demnach die Proportion bilden 5 : 7 = 7 : 10, welche einen Fehler enthält, der bei der axonometrischen Zeichnung nicht in Betracht kommt.

Eckpunkten des Quadrates unter 30° der Bildfläche zustreben. Da diese Art der axonometrischen Darstellung als Vorbereitung für das perspektivische Zeichnen dienen soll, so sind die Dimensionen der Dicke resp. der Höhe möglichst gering anzunehmen, um die bildliche Darstellung nicht unwahrscheinlich erscheinen zu lassen.

Auf der Spitze stehendes Quadrat, welches senkrecht zur Bildfläche gedreht ist.

Betrachten wir endlich noch die axonometrische Darstellung eines Quadrates, welches auf seiner Spitze stehend, senkrecht zur Bildfläche gedreht ist, so ergiebt sich folgende Konstruktion. Vergl. Fig. 22b, Tafel IV. Die eine Diagonale wird lotrecht zur Bildfläche stehen, die andere eine hierauf senkrechte Richtung haben. Ist die Seite des Quadrats *a p* gegeben, Fig. 27a, Tafel VI, so teile man dieselbe in fünf gleiche Teile, mache die senkrechte Diagonale gleich 7 dieser Teile, halbiere dieselbe, ziehe durch die Halbierung eine Linie, welche unter 60° von der Senkrechten abweicht, und trage auf dieser, rechts und links vom Halbierungspunkte Stücke auf, deren Längen gleich einem Viertel der Senkrechten sind. Die Verbindung der Eckpunkte giebt das Bild des Quadrates, welches sich zum vierseitigen Prisma von der Seitenlänge des Quadrates, also zum Würfel, ausdehnt, sobald man an den gefundenen Eckpunkten der Seitenansicht Horizontale von der Länge der Quadratseite *a p* anträgt und wieder deren Endpunkte verbindet. In ganz ähnlicher Weise wird man auch ein ebenso gestelltes, hohles Prisma zeichnen, Fig. 28a u. 28b, Tafel VI, indem man auf der Verlängerung der senkrechten Diagonale oben und unten gleiche Stücke anträgt und von diesen Endpunkten Parallelen zu den Seiten des inneren Quadrates zieht. Um die Dicke des Prismas zu erhalten, ziehe man von den Eckpunkten des äusseren und inneren Quadrates gleich lange Horizontalen und verbinde deren Endpunkte.

Anmerkung. Es ist bereits darauf hingewiesen, dass Körper von grosser Dicke oder Höhe, axonometrisch dargestellt, ein unnatürliches Aussehen erhalten, wodurch das natürliche Auge des Schülers irre geleitet resp. verbildet wird, wenn auch seine verstandesgemässe Vorstellung des Räumlichen zunimmt. Es erscheint mir aber als wichtigste Aufgabe alles Zeichnens das verständige Sehen auszubilden und schon die Jugend bei ihren ersten Zeichenübungen auf eine Darstellungsart der Körper hinzuweisen, welche den Verstand und das Auge in gleicher Weise befriedigt. Bei der Betrachtung der geometrischen Figuren wird hauptsächlich der

Verstand beschäftigt; werden dieselben Figuren axonometrisch dargestellt, so wird hierdurch das räumliche Vorstellungvermögen des Schülers ausgebildet. Es fehlt also nur noch eine das natürliche Sehen befriedigende Darstellung der Körper anzubahnen, welche das axonometrische Zeichnen derselben ersetzt. Der Versuch hierzu wurde, nach meinen Erfahrungen, mit leichter Mühe durch überraschende Resultate gekrönt und erlaube ich mir daher in dem Nachfolgenden die einfachsten Überlegungen, welche sich jedem Menschen bei aufmerksamer Betrachtung eines oder mehrerer gleicher Körper aufdrängen, hier einzufügen. Der Schüler soll hierbei durchaus nicht über komplizierte Gesetze der Perspektive belehrt werden, sondern nur, seinem natürlichen Sehen folgend, die axonometrische Darstellung in ein perspektivisches Bild des Körpers umwandeln. Bei den bezüglichen Zeichnungstafeln habe ich die drei verschiedenen Darstellungsarten desselben Körpers untereinander gestellt, um einerseits die gemeinschaftlichen Eigenschaften in seiner geometrischen, axonometrischen und perspektivischen Zeichnung klarzulegen, andererseits den Gegensatz in der Darstellung derselben deutlich hervorzuheben; im Texte dagegen habe ich es dem Verständnisse des Schülers für angemessen erachtet, erst in dem zweiten Teile dieses Werkchens die perspektivischen Gesetze des Sehens aus den Erscheinungsformen der Körper zu folgern.

Die allgemeinen Anschauungen, auf die Umwandlung der axonometrischen Darstellung eines Körpers in das perspektivische Bild desselben angewandt, ergeben folgende Resultate.

Die Umwandlung der vorgenannten und der folgenden axonometrischen Einzeldarstellungen in perspektivische Zeichnungen mit gleichartiger Richtung wird, ohne dass eine genauere Kenntnis der perspektivischen Regeln notwendig ist, einfach dadurch bewirkt, dass man die Höhen und Breiten aller parallelen Linien der axonometrischen Darstellung mit der Tiefe der Fläche oder des Körpers gleichmässig abnehmen lässt, da jede Körper- und Flächengrösse um so kleiner erscheinen muss, je weiter dieselbe von dem Auge entfernt liegt. Fig. 29b, Tafel VI und Fig. 30, Tafel VII.

Es werden daher alle diejenigen Parallelen innerhalb von Horizontalebenen, welche, axonometrisch dargestellt, unter 30° von der horizontalen x-Axe abweichen, Fig. 29a, perspektivisch gezeichnet, nach einem Punkte in der Höhe des Auges zustreben, Fig. 29b, dessen Lage auf der Verlängerung der äussersten rechten Seite der Bildfläche in angemessener Entfernung festzusetzen wäre.

Um von einer gemeinschaftlichen Horizontalen ausgehende Linien zu zeichnen, welche hinreichend verlängert, in einen Centralpunkt zusammenlaufen, der jedoch ausserhalb der Papierfläche liegt, hat man innerhalb der Papierfläche eine zweite, bedeutend kürzere Horizontale zu ziehen, welche eine gleichartige Teilung erhält, wie die ihr parallele Linie und die entsprechenden Teilpunkte dieser beiden Parallelen zu verbinden, Fig. 30. In gleicher Weise wird auch verfahren, wenn die zu zeichnenden Verbindungslinien von einer gemeinschaftlichen Senkrechten ausgehen, Fig. 31, Tafel VII. Haben die Verschwindungslinien gleichen Abstand von einander und nehmen wir an, dass die zweite senkrechte Hülfslinie nur halb so gross sei als die erste, so vereinfacht sich das Verfahren ungemein, da die zweite Hülfslinie nur in ebensoviel gleiche, aber nur halb so grosse Stücke zu teilen ist, wie die erste, Fig. 31.

Den Abstand dieser lotrechten Hülfslinie, welche die halbe Grösse der Seitenkante eines zu zeichnenden Kubus haben soll, nimmt man zu Anfang des Unterrichts vorteilhaft in einer Entfernung von der Kubuskante gleich der anderthalbfachen Länge derselben an, oder man trägt auf der untersten, unter 30° abweichenden Linie das $1\frac{3}{4}$fache der Kubusseite ab und errichtet in diesem Punkte ein Lot von der halben Grösse der Kubuskante, Fig. 32, Tafel VII. Hat man auf diese Weise 2 Verschwindungslinien gezeichnet (welche von einer gemeinschaftlichen Mittellinie gleichen Abstand haben), so fällt es leicht, die Verkürzung dicht aneinandergereihter quadratischer Flächen darzustellen, welche senkrecht zur Bildfläche stehen. Wir erhalten das erste verkürzte Seitenquadrat, indem wir auf der untersten, unter 30° abweichenden Verbindungslinie eine Länge abtragen gleich der Hälfte der wirklichen Quadratseite, und in diesem Endpunkte eine Senkrechte errichten, welche wir bis zur obersten Fluchtlinie verlängern, Fig. 32.

Anmerkung. Da man in vollen Klassen Schüler von der verschiedensten Befähigung und Auffassungsgabe zu unterrichten hat, so macht sich vielleicht im Anfange die Notwendigkeit geltend, den schwächsten Schülern die perspektivische Darstellung des frontal gesehenen Würfels und der sich hieraus entwickelnden Figuren noch in einer einfacheren Art und Weise klar zu machen, insbesondere wenn der disponible Raum des Zeichnungsblattes im Verhältnisse zur Grösse der Darstellung sehr beschränkt ist. — Mit gutem Erfolge habe ich in diesen Fällen folgende Methode angewandt: Man teile die untere Kante der vorderen Quadratseite des Würfels in der Weise aus freier Hand in 8 gleiche Teile, dass man zunächst diese Linie halbiere und dieses halbe Mass auf der unter 30° aufsteigenden unteren Kante der Seiten-Ansicht des Würfels auftrage; halbiert man ferner die Hälften der vorderen Quadratseiten nochmals und teilt auch diese Längen in zwei gleiche Teile, so erhält man in der primitivsten Weise eine Achtel-Teilung der vorderen Flächenkante. Sieben Achtel dieser Teilung nimmt man als Kantenlänge der hinteren Quadratseite des Würfels und erhält durch die Verbindung der Eckpunkte des vorderen und hinteren Quadrates die perspektivische Gestalt des Würfels, sowie einen Anhalt für das centrale Zusammenlaufen der senkrecht zur Bildebene gerichteten Seitenkanten. Aus der Umhüllungsfigur des Würfels würde sich auch in ähnlicher Weise die Gestalt des regulären achtseitigen Prismas, des Cylinders etc. etc. ableiten lassen. Die Zeichnungen der Würfelansichten in verschiedenen seitlichen Entfernungen vom Auge, wie wir dieselben in dem zweiten Teile dieses Werkes kennen lernen, werden sich in ganz entsprechender Weise construieren lassen und geben dem sehr schwachen Schüler, abgesehen von später festzustellenden Gesetzen des natürlichen Sehens, wenigstens zu Anfang ziemlich naturwahre Bilder der Körper, welche er mit den einfachsten Mitteln darzustellen im Stande sein wird. In Handwerker-Fortbildungs- und Baugewerk-Schulen kann diese einfache Methode perspektivischer Darstellung auch zur Zeichnung von Einzelbildern einfacher Tische, Schränke, Zimmer- und Mauerverbänden benutzt werden.

Die Breite des hier anstossenden Seitenquadrates wird wiederum dadurch ermittelt, dass man die Hälfte der senkrechten Hinterseite des ersten Quadrates als Grundlinie des zweiten Quadrates aufträgt. Wird in dem Endpunkte dieser Linie wieder eine senkrechte errichtet, so ergiebt die Hälfte derselben die Breite der Grundlinie des dritten sich anschliessenden Seitenquadrates in perspektivischer Verkürzung.

In dieser Weise fortfahrend, erhalten wir eine beliebige Anzahl dicht aneinander sich anschliessender perspektivischer Quadratformen von ähnlicher Gestalt, welche die gemeinsame geometrische Eigenschaft haben, dass sich die Breitseiten zur vorderen Höhenkante wie $^1/_2 : 1$ verhalten.

Wir können daher für eine elementare perspektivische Darstellung den Anschauungssatz aufstellen:

„Kongruente Flächen, welche in derselben Ebene und zwischen denselben Parallelen liegen, werden perspektivisch gezeichnet für den Anfänger als ähnliche Figuren erscheinen, gleichviel ob dieselben dicht aneinander gereiht sind oder in kleinen Abständen von einander abstehen.“ Fig. 32, Tafel VII, Fig. 34a u. 34b, Tafel VIII.

Ergänzen wir in Fig. 32 die vorderste und zugleich unterste Würfelseite durch zwei Senkrechte und eine Horizontale zu der geometrischen Gestalt eines Quadrates, so erhalten wir die Vorderansicht des ersten Würfels, dessen dritte sichtbare Fläche, welche die Oberansicht bildet, durch das Ziehen der zugehörigen Fluchtlinien und der Horizontalen ersichtlich wird. Fügen wir dieser ersten Aufsichtsfläche vermittelst Horizontallinien, welche von den Endpunkten der Senkrechten der Seitenansichten ausgehen, noch die Aufsichtsflächen der sich an den ersten anschliessenden, folgenden Würfel hinzu, so werden wir obigen Anschauungssatz auch bei der perspektivischen Darstellung horizontal liegender Flächen bestätigt finden. Während aber die vorderen Ansichten der Würfel stets quadratische Form beibehielten, welche sich entsprechend der Entfernung vom Auge verkleinerten, so werden die Ober- und Seitenansichten derselben stets perspektivisch ähnliche Trapezformen, also Vierecke von verkürzter Gestalt bilden, deren Grösse mit der Entfernung vom Auge ebenfalls abnimmt, Fig. 32, Tafel VII.

Ganz ähnliche Eigenschaften würden wir auch bei der perspektivischen Darstellung einer Reihe von rechtwinkligen Prismen finden, oder von Würfeln, deren körperliche Ecken in der Weise abgestumpft sind, dass die Seitenflächen regelmässige Achtecke bilden, oder von Kreisen, welche die Quadratseiten dieser Würfel tangieren. Wir können daher diese Eigentümlichkeit der perspektivischen Erscheinung in den zwei Lehrsätzen zusammenfassen:

1. Alle der Bildebene parallele Flächen werden, wie weit sie sich auch vom Auge entfernen mögen, stets eine der geometrischen Form ähnliche Gestalt zeigen.
2. Alle zur Bildfläche senkrecht gerichtete Flächen erscheinen stets in einer verkürzten, von der geometrischen Form abweichenden Gestalt. Fig. 35, 36, 37, Tafel IX, Fig. 38 bis 44, Tafel X, XI, XII.

Aus einem früheren Anschauungssatze geht aber hervor, dass diese Gestaltungen perspektivisch ähnlich erscheinen, wenn kongruente Flächen zwischen parallelen Linien hintereinander gereiht sind.

Anmerkung. Für ein weitergehendes Studium dienen noch einige theoretische Betrachtungen, welche im zweiten Teile dieses Büchleins näher besprochen werden.

Hierdurch wird eine Annäherungs-Perspektive gegeben, welche für eine ziemlich naturgemässe perspektivische Darstellung einfacher Körper in Handwerker-Fortbildungs-, Baugewerk- und Bürgerschulen ausreicht und sich durch Zusammensetzung einfacher Körper beliebig erweitern lässt.

Zur ferneren Übung dient noch ein übereck gezeichneter Würfel, sowie eine aus dem Würfel und dem Octaëder kombinierte

Krystallform, welche infolge ihrer elementaren Zusammensetzung aus regulären Dreiecken und Quadraten ein ebenso lehrreiches als interessantes Modell für das perspektivische Zeichnen von Körpern abgiebt, Fig. 47 und 48. Das übereck gezeichnete perspektivische Quadrat, welches die Grundseite des Würfels bildet, wird unter Berücksichtigung der perspektivischen Regeln ganz ähnlich konstruiert, wie die bereits beschriebene axonometrische Darstellung dieses Quadrates, dessen eine Diagonale eine horizontale Richtung hat, während die andere nach dem Augenpunkte zuläuft, die Seitenlinien flüchten aber nach den beiden Distanzpunkten. Die Diagonalen und Seitenlinien des oberen Würfelquadrates erhalten die gleichen Fluchtpunkte wie die des Grundquadrates, während der Abstand zwischen dem vorderen Eckpunkte des unteren und des oberen Quadrates gleich der geometrischen Länge der Quadratseite ist, Fig. 45 und 46.

Die oben erwähnte kombinierte Körperform, deren Vorderfläche zunächst parallel der Bildfläche angenommen ist, Fig. 47 und 48, entsteht einfach dadurch, dass man innerhalb sämtlicher Seitenflächen eines Würfels die Mittelpunkte der Seitenkanten mit einander verbindet und somit innerhalb der senkrechten und horizontalen Quadratseiten übereck stehende Quadrate bildet. Hierdurch entsteht ein Körper, welcher sich aus 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, somit 12 körperliche Ecken besitzt, dessen kombinierte Form sich nach allen Vorangegangenem sehr leicht perspektivisch entwickeln lässt.

Während in der eben beschriebenen ersten Stellung die Vorderseite dieses Zwölfecks die geometrische Gestalt eines auf die Spitze gestellten Quadrates zeigt, wird dasselbe, unter einem Winkel von 45° horizontal gedreht gedacht, eine perspektivische Verkürzung dieses Quadrates als Vorderansicht zeigen, welcher eine noch stärkere Verkürzung der Seitenansicht entspricht, Fig. 49. Die perspektivische Konstruktion desselben ergiebt sich in der vorher beschriebenen Weise, indem man sich als Ableitungsfigur eines übereck stehenden Würfels bedient und die Mittelpunkte sämtlicher Seitenkanten der 6 quadratischen Flächen mit einander verbindet.

Weitere interessante Stellungen dieses Körpers, auf die Spitze (Fig. 50a, 50b und 51) gestellt, parellel zur Bildfläche oder unter 45° zu derselben gedreht, finden hinreichende Erklärung in den beigegebenen Zeichnungen. Die verschiedenen Darstellungen dieser abgestumpften Würfelform dienen als einfaches Beispiel, in welcher mannigfachen Weise man den Würfel als Hülfsform für die verschiedenartigsten Zeichnungen benutzen kann, ganz analog dem Quadrate, aus welchem das Rechteck, das reguläre Acht- und Zwölfeck, sowie der Kreis herzuleiten ist.

Nachdem somit an dem Würfel in seinen einfachsten Stellungen die elementarsten perspektivischen Regeln erläutert worden sind, ist eine hinreichende Anleitung gegeben, auch die nächstfolgenden axonometrischen Darstellungen, deren Eigenschaften wir näher zu untersuchen haben, in perspektivische Bilder umzuwandeln. — Wir beschäftigen uns daher zunächst mit den Eigentümlichkeiten des regulären Fünfecks, Fig. 52.

Das reguläre Fünfeck.

Die axonometrische Darstellung des regulären Fünfecks basiert auf der Eigenschaft, dass seine Polygonwinkel 108^0, somit der Nebenwinkel desselben 72^0 beträgt, ferner dass die in der Mitte der Grundlinie errichtete Höhe des Fünfecks nahezu das $1\frac{1}{2}$fache der Seitenlänge beträgt. Durch diese letztere Bestimmung erhält man den der Grundlinie gegenüberliegenden Eckpunkt des Fünfecks. Die beiden seitlichen Eckpunkte konstruiere man unter Berücksichtigung der Eigenschaft, dass sich die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, siehe Fig. 2 und Fig. 8, welches einen Winkel von $71\frac{1}{2}^0$ enthält, sich wie 1 : 3 resp. 9 : 27 verhalten. Siehe Fig. 53a.

Teilt man daher die Grundlinie in drei gleiche Teile und trägt auf der Verlängerung derselben nach rechts und links einen Teil ab, in deren Endpunkten zwei parallele Hülfslinien unter 30^0 von der Horizontallinie abweichen, welche die Hälfte der dreiteiligen Grundlinie zur Länge haben, so erhält man die noch fehlenden zwei Eckpunkte des axonometrischen Fünfecks. Siehe Fig. 53b.

Um die axonometrische Zeichnung eines gleichseitigen fünfeckigen Rahmens zu erhalten (siehe Fig. 53c), dessen Rahmenbreiten von der Grundlinie nach der Spitze stufenmässig zunehmen sollen, trage man die untere Rahmenbreite auf der Mittellinie des axonometrisch dargestellten Fünfecks von der Grundlinie aus nach aussen in halber Breite an, verbinde einen auf der Mittellinie unterhalb des gemeinsamen Durchschnittes der Verbindungslinien der diagonal gegenüberliegenden Ecken gelegenen Punkt mit den 5 Eckpunkten des inneren Polygons, verlängere diese Hülfslinien über die Ecken dieses Fünfecks hinaus, und ziehe von dem äusseren Endpunkte der unteren Rahmenbreite eine Parallele mit der unteren horizontalen Fünfecksseite, bis diese die beiden untersten der oben erwähnten Hülfslinien schneidet. Von diesen Schnittpunkten ziehe man Parallelen zu den zwei sich anschliessenden inneren Seiten des Fünfecks, wodurch man auf den zwei folgenden Hülfslinien neue Schnittpunkte erhält, von denen man abermals Parallelen zu der vierten und fünften Seite des inneren Fünfecks zieht, welche sich oberhalb der verlängerten Mittellinie in einem Punkte derselben schneiden. Siehe geometrische Zeichnung Fig. 54.

Die fünflappige Blattform.

Die Darstellung des regulären Fünfecks kommt vielfach zur Verwendung bei der Zeichnung fünflappiger Baum- und Strauchblätter.

Die Natur hat auch bei diesen Gebilden ein mathematisches Gesetz zu Grunde gelegt, welches allerdings nur bei ganz normal ausgebildeten Blättern deutlich erkennbar wird.

Anmerkung. Sowohl die aus 5 Blättchen zusammengesetzten Blätter, als auch die einfachen fünflappigen, handförmig geteilten Blattformen bilden meistenteils in ihren Umhüllungsformen ein unregelmässiges Fünfeck, in welchem sowohl die beiden an der Spitze zusammenstossenden Seiten, den entprechenden Seiten des regulären Fünfecks, als auch die unterste der Grundseite dieses Fünfecks gleich sind, während die beiden anderen Seiten (die zweite und dritte) kleiner, aber wiederum unter sich gleich sind (siehe Fig. 55c). Auch bei dieser unregelmässigen Umhüllungsform der Blattbildung gilt noch folgendes Gesetz:

Verbindet man den gemeinsamen Knotenpunkt der Mittelrippen oder Hauptnerven eines aus fünf Blättchen zusammengesetzten Blattes mit den Spitzen der Blättchen, so werden diese die Mittellinien der Blättchen ergeben, während die Halbierungslinien der Winkel der im Stielansatze zusammenstossenden Mittellinien den Zwischenraum der Blättchen gleichmässig teilen. — Die im gleichen Verhältnisse mit der Länge der Blättchen abnehmenden

Blattbreiten liegen aber innerhalb eines Hülfs-Fünfecks, dessen Spitze von demjenigen Punkte der Mittelrippe ausgeht, in welchem das längste Blättchen seine grösste Breitenausdehnung hat und dessen Seiten Parallelen bilden zu den Verbindungen der Blattspitzen. (Siehe Fig. 54.) In ganz gleicher Weise überträgt sich dieses Gesetz auf die Zeichnung eines einfachen fünflappigen Blattes.

Hat man es daher nicht mit einem zusammengesetzten, sondern einfachen handförmig geteilten Blatte zu thun, welches eine mittlere volle Blattfläche zeigt, von der fünf Blattlappen abzweigen, so bedarf man für die Zeichnung dieser Blattform noch eines zweiten kleineren Hülfsfünfecks, welches von dem Trennungspunkte zweier Blattlappen ausgeht und dessen Seiten wiederum Parallelen zu den Seiten der Umhüllungsform des Blattes bilden. Die Bogenlinien der einzelnen Blattlappen werden von den Durchschnittspunkten der vorerwähnten Halbierungslinien mit den Seiten dieses innersten Fünfecks ausgehen und sich zu beiden Seiten dieser Halbierungslinien gleichartig ausdehnend, nach den Spitzen der Blattlappen erstrecken. Siehe Fig. 55a.

Diese Zeichnungsweise in perspektivische Darstellung übertragen, ergiebt auf eine überraschend einfache Weise das Bild horizontaler Blattformen, Fig. 55b, welche je nach der Grösse und Ausbildung der Blattlappen oder der Blättchen verschiedenartig gestaltet sind. Die starren Konstruktionslinien können allerdings nur als Gerippe dienen und müssen bei einer malerischen Darstellung des Blattes in die leicht bewegten Linien der Naturform umgewandelt werden. Die perspektivische Konstruktion, welche dieser Blattzeichnung zu Grunde liegt, ist in Fig. 53d dargestellt.

Das reguläre Sechseck.

Das regelmässige Sechseck ist zusammengesetzt aus sechs kongruenten, gleichseitigen Dreiecken, welche sich um eine gemeinsame Mittellinie derartig gruppieren, dass je zwei Dreiecke ein drittes Dreieck einschliessen, dessen Grundlinie halb so gross ist, als jene gemeinschaftliche Mittellinie, welche die Grundlinien der beiden anderen Dreiecke bildet. Es lässt sich daher um dasselbe ein Rechteck beschreiben, dessen Seiten sich wie 7:8 verhalten. Dieses Rechteck lässt sich wiederum in acht kongruente, kleinere Rechtecke zerlegen, deren Seiten sich wie 4:7 verhalten, Fig. 57a.

Wird nun die eine Seite des Sechsecks horizontal angenommen, so hat man für die axonometrische Darstellung desselben diese horizontale Seite um die Hälfte ihrer Grösse an beiden Seiten zu verlängern, an den Endpunkten dieser Verlängerung zwei parallele Hülfslinien unter 30^0 anzutragen, deren Längen $^7/_8$ der Grundlinie betragen und die Endpunkte derselben durch eine Horizontale zu verbinden, um so das umschriebene Rechteck darzustellen. Halbiert man die zwei schräg laufenden Hülfslinien, so erhält man in den Halbierungspunkten zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Sechsecks; die noch fehlenden zwei Eckpunkte, welche den Eckpunkten der Grundlinie gegenüber liegen, ergeben sich als Durchschnittspunkte zweier den ersten parallelen Hülfslinien auf der gegenüberliegenden Rechtecksseite. Fig. 57b vgl. mit der perspektivischen Darstellung Fig. 57c und 57d.

Haben zwei gegenüberliegende Seiten der axonometrischen Darstellung des umschriebenen Rechtecks eine vertikale Richtung zur Bildfläche, Fig. 59b vergl. mit Fig. 59a, so ziehe man eine horizontale Hülfslinie, deren Länge das zweifache von $^7/_8$ der Sechsecksseite beträgt. Lässt man von den Endpunkten dieser Hülfslinie zwei parallele Linien unter 30^0 abweichen, deren Längen gleich der halben doppelten, somit gleich der einfachen Seite des Sechsecks gemacht werden, so erhält man drei Seiten des umschriebenen Rechtecks, dessen vierte Seite parallel der horizontalen Hülfslinie ist. Halbiert man diese vierte und die ihr gegenüberliegende erste Seite dieses Rechtecks, so erhält man zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Sechsecks, dessen zwei senkrecht zur Bildfläche gerichtete Seiten auf den entsprechenden Rechtecksseiten liegen. Diese Hülfslinien zerlege man in vier gleiche Teile, um in den mittleren zwei Teilen die zwei Sechsecksseiten zu erhalten.

Die axonometrische Zeichnung eines hohlen sechsseitigen Prismas in vorgenannter Lage ist in Fig. 59c, das entsprechende perspektivische Bild eines vollen sechsseitigen Prismas in Fig. 59d dargestellt.

In ganz ähnlicher Weise erhält man die axonometrische Zeichnung eines auf einer Seite stehenden, senkrecht zur Bildfläche gerichteten sechsseitigen Hohlprismas, Fig. 58a, indem man die vier vertikalen, der Bildfläche parallelen Hülfslinien des Umhüllungs-Rechteckes in ihrer wirklichen Länge (vergl. geometrische Fig. 57a), die hierauf senkrechten unter 30^0 aufsteigenden Hülfslinien und Seitenlängen aber nur in ihrer halben Länge aufträgt. Vergl. das perspektivische Bild zweier nebeneinander stehenden vollen sechsseitigen Prismen in gleichen Richtungen, Fig. 58b.

Das reguläre Siebeneck.

Das regelmässige Siebeneck hat für Körperformen eine sehr geringe Verwendung, es sei daher nur die Eigenschaft desselben erwähnt, dass der Abstand einer Seite des regelmässigen Sechsecks vom Mittelpunkte des demselben umschriebenen Kreises nahezu gleich der Siebenecksseite ist (während beim regulären Sechseck die Seite gleich der Grösse des Radius des umschriebenen Kreises ist); es verhält sich daher innerhalb zweier gleichen Kreise die Seite des eingeschriebenen Sechsecks zu der des eingeschriebenen Siebenecks wie die Hypotenuse zur Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, welches einen Winkel von 60° enthält, Fig. 60. Vergl. Fig. 61a und Fig. 62a.

In Fig. 61b ist die axonometrische Darstellung des horizontal liegenden Siebenecks einfach durch das Herunterklappen des stehenden Siebenecks bewirkt, indem von den Schnittpunkten der senkrechten Hülfslinien, welche von den Eckpunkten des Siebenecks auf die gemeinschaftliche Drehungsaxe der Vertical- und Horizontalebene gefällt sind, wiederum Hülfslinien unter 30° zur Horizontale gezogen werden, deren Längen die Hälfte der entsprechenden Senkrechten betragen. Die Verbindung der Endpunkte dieser Hülfslinien ergiebt die Gestalt des horizontal liegenden Siebenecks. Diese Art und Weise der Entwickelung der axonometrischen und perspektivischen Darstellung aus der geometrischen Figur wird vielfach angewandt; besonders vorteilhaft zeigt sie sich bei der Horizontallegung unregelmässiger Figuren, denen kein bestimmtes Bildungsgesetz zu Grunde liegt. In ganz ähnlicher Weise sind Hülfskonstruktionen zu den axonometrischen Zeichnungen, Fig. 61a und 62c aus der entsprechenden geometrischen Figur entwickelt und erstere in perspektivische Darstellungen in Fig. 61c und 62b umgewandelt worden.

Diese Konstruktion genügt für die Anwendung des regelmässigen Siebenecks auf die Zeichnung zusammengesetzter siebenzähliger Blattformen. Wir haben im Allgemeinen die aus breiten Blättchen zusammengesetzten Blattformen von den schmalblättrigen zu unterscheiden, und erkennen bei der sorgfältigen

Betrachtung sehr vieler Exemplare dieser beiden Specialarten, dass trotz der vielen Unregelmässigkeiten, welche hunderte von gleichartigen Blättern zeigen doch allen dasselbe Bildungsgesetz zu Grunde liegt. Bei den aus breiten Blättchen zusammengesetzten Blattformen gehen vielfach die Hauptrippen der beiden mittelsten Blättchen in eine horizontale Grade über; der Mittelpunkt derselben bildet den Stielansatz, von dem die übrigen fünf Mittelnerven auslaufen, Fig. 61d und 61c. Bei den aus schmalen Blättchen zusammengesetzten Blättern dagegen ziehen sich die Hauptrippen dieser mittleren Blättchen nach dem Stielansatze herunter, im Zusammenstosse eine mehr oder weniger stark nach unten geknickte Linie bildend; siehe Fig. 62c und 62b.

Für diese beiden Blattformen ist die der Zeichnung zu Grunde liegende Hülfkonstruktion für die allmählige Zunahme der Längen und Breiten der einzelnen Blättchen ähnlich der des fünflappigen und des aus fünf Blättchen zusammengesetzten Blattes.

Zur Erlangung von Hülfslinien halbiert man auch hier die Winkel der im Stielansatze zusammenstossenden Rippen, dann werden je zwei benachbarte Halbierungslinien den Breitenraum für die gleichartige Entwickelung der einzelnen Blättchen bestimmen, deren allmähliche Breitenabnahme im Verhältnisse zur Länge der Blättchen sich wiederum dadurch ergiebt, dass man in der grössten Breite des längsten Blättchens, von einem Punkte der Hauptrippe ausgehend, Parallelen mit den Siebenecksseiten zieht, welche die vorher erwähnten Halbierungslinien schneiden; Fig. 61d und 61c. Dieselbe Konstruktion lässt sich sowohl auf sieben-, neun- und elflappige Blätter, als auch auf Blattformen übertragen, welche aus 9 oder 11 Blättchen zusammengesetzt sind. Auch hier wird man trotz mancher Unregelmässigkeit dasselbe Gesetz der Formbildung deutlich erkennen.

Anmerkung. Wenn auch die Darstellung der Blattformen nicht in die notwendigen Aufgaben der axonometrischen und perspektivischen Darstellungskunst gehört, so glaube ich doch durch die Mitteilung dieses interessanten Gesetzes über Blattbildungen die Beobachtungsgabe und den Verstand des Schülers auf das Gesetzmässige hinleiten zu dürfen, welches vielfach den Naturformen zu Grunde liegt. Hierzu habe ich einen Gegenstand gewählt, welcher auch dem ärmsten Schüler leicht zugänglich ist. Übrigens soll das Blatt- und Blumenzeichnen nach ministerieller Anordnung auch schon in den Volksschulen gelehrt werden, um eine strenge Naturbeobachtung in dem Schüler anzuregen.

Die angeführten Beispiele von Blattformen sind gewählt als Ersatz für die axonometrische resp. perspektivische Darstellung von Flächen oder Körperformen mit bogenförmigen Begrenzungen. Bei der Zeichnung dieser Art von Flächen oder von Körperformen wird man ebenfalls ein geradliniges Tangenten- oder Sekanten-Vieleck irgend welcher Art als Hülfskonstruktion zu Grunde legen.

Das hierbei anzuwendende Verfahren ist bei der Zeichnung obiger Blattformen hinreichend angedeutet worden.

Liegendes reguläres Achteck, parallel zur Bildebene gerichtet.

Die am häufigsten vorkommende Form unter den regelmässigen Polygonen ist die des Achtecks. Das regelmässige Achteck lässt sich entstanden denken aus einem Quadrate, dessen abgeschnittene Eckseiten die Länge der geraden Seiten haben. Diese Eckseiten bilden aber die Hypotenusen zu vier gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecken, und ihre Länge verhält sich zu der ihrer entsprechenden Katheten wie 7 : 5, Fig. 63a. Unter Benutzung dieser Eigenschaft wird die axonometrische Darstellung des regelmässigen Achtecks eine sehr einfache. Wird eine Seite des regulären Achtecks horizontal angenommen, so verlängere man dieselbe nach beiden Seiten um $^5/_7$ ihrer Grösse und lasse sowohl von den Endpunkten der gegebenen Achteckseite, als auch von den zwei Eckpunkten der durch beiderseitige Verlängerung der Achteckseite entstandenen Quadratseite vier Hülfslinien unter 30^0 abweichen, welche die Hälfte der Quadratseite zur Länge haben. Die Horizontale, welche die Endpunkte dieser vier Hülfslinien verbindet, bildet die vierte Seite des Hülfsquadrates. Zieht man in diesem Hülfsquadrat eine Diagonale und legt durch die Durchschnittspunkte dieser Diagonale mit den mittleren Hülfslinien zwei Horizontale, welche man bis zu den gegenüberliegenden Quadratseiten verlängert, so erhält man auf letzteren die noch fehlenden vier Eckpunkte des regulären Achtecks; Fig. 63b und 63c.

Liegendes übereck gestelltes reguläres Achteck.

Mehr Schwierigkeiten bietet die axonometrische Darstellung eines übereck gestellten Achtecks, das durch eine Horizontale und eine hierauf stehende Mittellinie in vier kongruente, unregelmässige Vierecke geteilt wird, welche einen rechten und einen stumpfen Winkel enthalten. Verbindet man die Scheitelpunkte dieser vier stumpfen Winkel mit einander, so erhält man in dem Achteck ein eingeschriebenes Hülfsquadrat, dessen Seitenlänge sich zu der entsprechenden Diagonale wie 5 : 7 resp. 10 : 14 verhält. Diese Diagonale bildet den Durchmesser des dem Achtecke umschriebenen Kreises und ist daher gleich der senkrechten und horizontalen Mittellinie dieses Achtecks; Fig. 64a.

Um dieses Achteck axonometrisch darzustellen, halbiere man die horizontale Mittellinie, teile jede Hälfte in 7 gleiche Teile und ziehe von dem je fünften Teilpunkte auf der rechten und linken Seite, nach oben und unten axonometrisch gezeichnete Senkrechte, welche um 30° von der gemeinsamen Horizontalen abweichen. Macht man die Längen dieser axonometrischen Senkrechten gleich der Hälfte der zwischen ihnen liegenden Horizontalen, so erhält man durch die Verbindung der bezüglichen Endpunkte die axonometrische Zeichnung des eingeschriebenen Hülfsquadrates, somit vier Eckpunkte des Achtecks. Zieht man ferner durch den Halbierungspunkt der horizontalen Mittellinie eine Parallele mit den unter 30° aufsteigenden Quadratseiten und trägt auf deren Verlängerung nach oben und unten den vierten Teil der ganzen horizontalen Mittellinie ab, so erhält man in den Endpunkten dieser Hülfslinien die noch fehlenden zwei Eckpunkte des Achtecks, welche den auf der horizontalen Mittellinie liegenden entsprechen. Fig. 64b und Fig. 64c, vergl. geometrische Figur 64a.

Stehendes reguläres Achteck mit senkrecht zur Bildfläche gerichteter Ansicht.

In ganz entsprechender Weise lässt sich ein stehendes reguläres Achteck axonometrisch darstellen, das auf einem Eckpunkt stehend, senkrecht zur Bildfläche gerichtet ist. Die senkrechten Höhenlinien werden hierbei in wirklicher Grösse, die horizontalen Breitenlinien, welche unter 60° von den Senkrechten abweichen, in halber Grösse aufgetragen. Diese Konstruktion ist in Fig. 65a zur axonometrischen Darstellung eines hohlen, achtseitigen Prismas benutzt, welches, auf einer Kante ruhend, gleiche Richtung hat. Das perspektivische Bild desselben ist in Fig. 65b dargestellt.

Dieses hohle reguläre Achteck stellt man mit Hülfe der Verbindungslinien der diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte, welche sich im Mittelpunkte schneiden und in ihrer Verlängerung die Ausdehnung der inneren und äusseren Achtecksseiten begrenzen, in der Weise axonometrisch dar, dass man das geometrische Mass auf der senkrechten Mittellinie unten oder oben nach aussen hin anträgt und von einem dieser Endpunkte Parallelen mit den inneren Seiten des Achtecks zieht.

Perspektivisches Bild des Kreises resp. des Halbkreises aus dem regulären Achteck entwickelt.

Die axonometrische Zeichnung dieses übereck stehenden regulären Acktecks lässt sich jedoch auch auf eine andere, allgemeinere Weise finden, welche auch bei der axonometrischen Darstellung des regulären Zehnecks und Zwölfecks benutzt werden kann. Ist der Durchmesser des dem regelmässigen Achtecke umschriebenen Kreises gegeben, so fasse man denselben als Drehaxe eines senkrecht stehendes Halbkreises auf, welchen man nach vorn und hinten in die Horizontalebene herabklappen kann, um das perspektivische Bild des ganzen Kreises in einer horizontalen Lage zu erhalten. Diesen Halbkreis teile man geometrisch in vier gleiche Bogenstücke und fälle von den Teilpunkten die bezüglichen drei Senkrechte auf die Drehaxe der Vertikal- und Horizontalebene. Durch die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Drehaxe ziehe man Hülfslinien, welche unter 30^0 von der Horizontalen abweichen und mache deren Längen, oberhalb und unterhalb der Horizontalen, gleich der Hälfte der entsprechenden Senkrechten. Die Verbindung der Endpunkte dieser Hülfslinien liefert die axonometrische Zeichnung des Achtecks. Vergleiche Fig. 66a mit der perspektivischen Darstellung dieses Achtecks und des dasselbe umschreibenden Kreises; Fig. 66b.

Zwischen dem regulären Achteck und dem regulären Zehneck findet die eigentümliche Beziehung statt, dass innerhalb desselben Kreises die Seite des Achtecks sich zur Seite des Zehnecks verhält wie 10 : 8; wird daher die Seite eines regulären Achtecks in 10 gleiche Stücke geteilt, so erhält man in der $^8/_{10}$ Grösse dieser Achtecksseite die Seitenlänge eines regulären Zehnecks, welches innerhalb des dem Achteck umschriebenen Kreises liegt. Die Ausführung dieser Konstruktion wird dadurch eine ziemlich einfache, dass man den Quadranten des umschriebenen Kreises halbiert und durch die Verbindung der Endpunkte desselben die Seite des eingeschriebenen Achtecks erhält. Diese zerlege man in zehn gleiche Teile, verbinde den 8ten Teilpunkt mit dem Mittelpunkt des Kreises und verlängere diese Hülfslinie bis zum Durchschnitte mit dem Kreise, so schneidet dieselbe den zehnten Teil seiner Peripherie ab; Fig. 67.

Anmerkung. Hierdurch wird ein erneutes Beispiel (vergl. das Annäherungsverhältnis zwischen regulärem Sechs- und Siebeneck) dafür angeführt, dass, wie in den Zahlen, so auch in den Formen, gewisse Verhältnisse gleichartiger Figuren stattfinden, welche dem Zusammenfassen verschiedener Naturerscheinungen unter ein bestimmtes Gesetz entsprechen.

Das reguläre Zehneck.

Ist nur die Seite des Zehnecks gegeben und somit der Mittelpunkt des demselben umschriebenen Kreises aufzusuchen, so wird für kleinere Zeichnungen folgende Annäherungs-Konstruktion genügen. Der Polygonwinkel des regulären Zehnecks beträgt 144°, somit der halbe Polygonwinkel 72°, da aber ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten sich wie 1 : 3 verhalten, einen Winkel von 71° 30' einschliesst, so errichte man auf der Mitte der halben Zehnecksseite ein Lot, dessen Länge das 3/2fache der Seite beträgt, und erhält sehr nahe ausserhalb des Endpunktes dieses Lotes den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises; Fig. 68.

Die axonometrische Darstellung des regulären Zehnecks wird ganz ähnlich der zweiten Konstruktion des übereck stehenden regulären Achtecks ausgeführt, wenn der umschriebene Kreis desselben gegeben ist, indem man die von den Eckpunkten der geometrischen Darstellung auf den Kreisdurchmesser gefällten, lotrechten Hülfslinien, axonometrisch in halber Länge in die Horizontalebene überträgt; Fig. 69.

Reguläres Zwölfeck.

In gleicher Weise wird das reguläre Zwölfeck, abgeleitet aus dem regulären Sechseck, axonometrisch dargestellt.

Sehr markierend wirkt die axonometrische Verkürzung in den Breitenverhältnissen dieses letzteren Polygons durch die Darstellung eines hohlen 12seitigen regulären Prismas mit geringer Höhe, Fig. 70c.

Hohles 12seitiges Prisma.

Entsprechend der geometrischen Zeichnung wird man auch bei der axonometrischen Darstellung die diagonal gegenüberliegenden Winkelpunkte durch Hülfslinien verbinden, welche alle gemeinschaftlich den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises passieren. Dieselben dienen zur Bestimmung der Seitenbreiten des inneren Polygons. Ist daher die Breite einer inneren horizontalen Polygonseite bekannt, so ergeben sich die Breiten und Richtungen aller anderen Seiten desselben durch Parallellinien mit den äusseren Polygonseiten, während die geringe Dicke gleichmässig von den inneren und äusseren Ecken lotrecht angetragen wird. Das reguläre Polygon nähert sich der Form des Kreises immer mehr und wird mit grossem Vorteil sowohl zur axonometrischen Darstellung des Kreises, als auch zur perspektivischen Zeichnung der Ellipse verwandt. Vergl. die perspektivische Darstellung der inneren Kreishöhlung in Fig. 70b.

Wie schon aus der axonometrisch gezeichneten 12teiligen regulären Polygonform hervorgeht, wird die axonometrische Darstellung des Kreises eine elliptische Form haben. Der Kreis stellt aber nur den speciellen Fall der Ellipsenform dar, in welchem die zwei Brennpunkte der Ellipse so nahe an einander gerückt sind, dass sie zusammenfallend das Centrum des Kreises bilden; Fig. 71.

Eigenschaften und Darstellung der Ellipse.

Der Kreis, als specielle Ellipsenform, teilt auch alle Eigenschaften der Ellipse, welche hier nur in vereinfachter Form auftreten. Ein kreisförmiger Stahlring wird durch eine starke Pressung von oben her in eine elliptische Ringform übergehen und wir unterscheiden in dieser eine grosse Längenausdehnung, die **grosse** Axe der Ellipse und eine starke, rechtwinklig hierzu gerichtete Verkürzung, die kurze oder **kleine** Ellipsen-Axe. Die gleichmässige Spannung aller Punkte der Stahlellipse wird jedoch dem Gesetze unterworfen sein, dass alle Punkte der Peripherie gleich weit entfernt sind von **zwei** bestimmten Punkten auf der grossen Axe, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte derselben (dem ursprünglichen Kreis-Centrum) haben.

Diese beiden Punkte heissen die Brennpunkte der Ellipse; die **Summe** der Abstände jedes Peripheriepunktes von diesen beiden Brennpunkten ist **gleich** der grossen Axe; Fig. 72a.

Anmerkung. Hierauf beruht das bekannte Verfahren, ganze oder halbe Ellipsen von grossem Umfange auf dem Fussboden vorzureissen, welches Gärtner und Bauhandwerker mit grossem Nutzen verwerten können.

Ist das tangierende Rechteck, innerhalb dessen die Ellipse gezeichnet werden soll (siehe Fig. 74a), resp. die grosse und kleine Axe der Ellipse gegeben (Fig. 72a), so suche man zunächst die beiden Brennpunkte derselben dadurch auf, dass man von einem Endpunkte der kleinen Axe mit der halben grossen Axe als Radius (mittelst einer Latte oder Schnur) rechts und links gleiche Bogen schlägt, welche die lange Axe in den betreffenden Brennpunkten trifft. Schlägt man in diesen Punkten Nägel oder Holzpflöcke etc. ein und befestigt an denselben mittelst zweier Schlingen eine Schnur, deren Länge genau mit der grossen Axe übereinstimmt, so hat man nur durch einen festanliegenden Stab oder Reissbleistift diese Schnur anzuspannen und den Stab, in den Boden einreissend, so lange fortzubewegen, bis er seinen ursprünglichen Standpunkt wieder erreicht, um die genaue Form der Ellipse auf dem Erdboden oder der hölzernen Bodenunterlage verzeichnet zu haben.

Je stärker die Ellipse zusammengedrückt wird, desto weiter werden sich diese beiden Brennpunkte von dem ursprünglichen Centrum des Kreises entfernen und um so grösser wird die Krümmung der Ellipse in der Nähe dieser Punkte sein; Fig. 72b u. 72c. Bei der geometrischen, axonometrischen und perspektivischen Darstellung der Ellipsenform wird es daher vor allen Dingen darauf ankommen, diejenigen Peripheriepunkte der Ellipse, resp. solche Tangentenrichtungen zu erhalten, welche in der Nähe dieser stärksten Krümmung der Ellipse liegen.

Da die Zeichnung der Ellipse in der graphischen Darstellungskunst unendlich oft vorkommt, so bedingt diese vielfache Anwendung eine möglichst einfache Darstellungsart. Die zu- und abnehmende Bewegung in der Ellipsenform wird sich jedoch viel deutlicher durch eine Tangentenumschliessung markieren, als durch Bestimmung einzelner Punkte, deren innerer Zusammenhang erst durch die Vollendung ihrer Verbindungslinie klar vor die Augen tritt.

Wenn man auf den Kreis zurückgeht, wird sich als einfachstes Tangentenviereck das Quadrat ergeben; die Mitten der Quadratseiten sind dann die Berührungspunkte. Die Verbindungslinien von diesen zwei gegenüberliegenden Berührungspunkten bilden zwei aufeinander rechtwinklig stehende Durchmesser, und axonometrisch oder perspektivisch gezeichnet, die grosse und kleine Axe der

Ellipse. Um nun diejenigen Berührungspunkte, resp. die diesen entsprechenden Tangenten zu finden, welche axonometrisch oder perspektivisch gezeichnet, in der Nähe der grössten Ellipsenkrümmung liegen, muss man in der geometrischen Zeichnung des Kreises diejenigen Tangenten aufsuchen, welche in der Nachbarschaft des horizontalen Durchmessers den Kreis berühren; siehe Fig. 73a. Zu diesem Zwecke verlängere man die horizontalen Quadratseiten nach aussen rechts und links um die Hälfte ihrer Länge, teile die bez. gegenüberliegende Quadratseite in vier gleiche Teile und verbinde die Mitten dieser halben Quadratseiten mit den Endpunkten der Verlängerungen der gerade gegenüberliegenden Quadratseiten. Diese vier Verbindungslinien, nach oben und unten hinreichend verlängert, werden in der Verlängerung der senkrechten Axe nach oben und unten je einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben, welcher sich als sehr brauchbarer Kontrollierungspunkt für die genaue Konstruktion der Tangenten erweist.

Die Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Kreise erhält man hinreichend genau durch eine das Centrum des Kreises durchschneidende Linie, welche man von dem Halbierungspunkte einer der oben erwähnten Verlängerungen nach dem Halbierungspunkte der schräg gegenüberliegenden Verlängerung zieht. Diese Konstruktionsweise empfiehlt sich besonders dadurch, dass man es hier nur mit einer Zwei- oder Vierteilung zu thun hat, um in zuverlässiger Weise die geeignetsten Tangenten und Berührungspunkte der Ellipse zu erhalten. Dieselbe lässt sich in der jetzt als bekannt vorausgesetzten Zeichnungsweise sowohl auf die axonometrische als auch auf die perspektivische Darstellung des Kreises in jeder beliebigen Lage und Stellung der Ellipse übertragen; siehe Fig. 73b, 73c und 73d; Fig. 74a und 74b. In Fig. 73d ist die perspektivische Zeichnung eines liegenden Ringes von rechteckigem Querschnitte in sehr grossem Massstabe dargestellt; es ist hier besonders darauf hinzuweisen, dass die der Bildfläche parallelen Querschnitte des horizontalen Mittelschnittes auf beiden Seiten **gleich** gross, die verkürzten Querschnitte des senkrecht zur Bildebene gerichteten Mittelschnittes aber von vorn nach hinten sehr stark **abnehmen**. Die perspektivische Konstruktion ist der geometrischen Figur 73a genau entsprechend.

Für die geometrische Darstellung der Ellipse (siehe Fig. 74a), bei welcher ein ganz beliebiges Verhältnis zwischen der sich rechtwinklig schneidenden grossen und kleinen Axe gegeben sein kann, wird sich diese Konstruktionsweise bei verhältnismässig grösster Genauigkeit ebenfalls als die einfachste empfehlen. In diesem Falle wird das Tangenten-Viereck nicht ein Quadrat, sondern ein Rechteck bilden, dessen Seitenlängen den Axengrössen genau entsprechen.

In Fig. 74b ist die geometrische Konstruktion der Fig. 73a für die perspektivische Darstellung eines stehenden Kreises benutzt, welcher senkrecht zur Bildfläche gerichtet ist. Zu erwähnen ist hierbei, dass die Verkürzungen der halben Hülfsquadrate, welche dem mittleren vollen Tangenten-Quadrate vorn und hinten hinzugefügt werden, durch die Verlängerung der bez. Diagonale eines der vier kleinen Quadrate bestimmt wird, in welche das mittlere Tangenten-Quadrat durch seine beiden Mittellinien zerfällt. Vergl. perspektivische Konstruktionsart mit Fig. 33.

Ferner ist die Zerlegung des Tangenten-Quadrates in vier gleiche Rechtecke hier in der Weise ausgeführt, dass die vordere vertikale Seite dieses Tangenten-Quadrates in vier gleiche Längen geteilt wurde und diese Teilpunkte mit den entsprechenden Teilpunkten einer weiter hinter stehenden, somit stark verkürzten Vertikalen verbunden sind.

Die Durchschnittspunkte dieser perspektivischen Parallelen mit den Diagonalen des Tangenten-Quadrates liefern diejenigen Hülfspunkte, welche für die perspektivische Verkürzung der vier gleichen Rechtecke massgebend sind. Zur Vervollständigung der Rechtecke hat man nur nötig, durch diese Punkte wieder Vertikale zu ziehen. Dieses Teilungsverfahren kann ganz allgemein für die Zerlegung von Quadraten und Rechtecken in eine beliebige Anzahl gleicher Rechtecke benutzt werden und beruht auf der geometrischen Konstruktion, alle Teilpunkte einer Quadrat- oder Rechteckseite mittelst Parallelen zur anderen Quadrat- oder Rechteckseite auf die bezügliche Diagonale zu übertragen, und durch diese Schnittpunkte Parallelen zur ersten Seite zu ziehen. Siehe Fig. 75d und vergl. Fig. 22a.

Als Bedingung der Übertragung der geometrischen Konstruktionsweise auf eine perspektivische gilt, dass diejenige Seite, auf welcher man die **erste** Teilung vornimmt, sich unverkürzt darstellen muss. Bei Erfüllung dieser Bedingung überhebt dieses einfache Verfahren in den gebräuchlichsten Anwendungen der Frontal- und Übereck-Perspektive die umständliche Benutzung der sogenannten Teilpunkte, da hierdurch sowohl gleichmässige als auch ungleichmässige Teilungen perspektivisch verkürzt dargestellt werden können.

In Fig. 75a ist eine andere Konstruktionsweise der Ellipse geometrisch dargestellt, welche allerdings nur annäherungsweise genau ist, sich jedoch durch einen sehr geringen Bedarf von Hülfslinien auszeichnet und daher für die perspektivische Darstellung der Ellipse in kleinerem Massstabe vielfache Verwendung findet. Diese Konstruktion beruht auf der Darstellung eines regulären Achtecks, in welches ein Kreis eingeschrieben ist, wie es Fig. 44 in der Vorder- und Seitenansicht zur klaren Anschauung bringt. Man ist hier von den Annäherungs-Verhältnissen ausgegangen, dass sich die Achtecksseite zu ihrer Vertikal- und Horizontal-Projektion, welche drei Linien zusammen ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bilden, wie 3 : 2 verhält, somit die Seite des Hülfsquadrates, welches durch die Verlängerungen der horizontalen und senkrechten Seiten des Achtecks entsteht, in 7 gleiche Teile zerlegt werden muss, von denen die mittleren 3 Teile die Länge der Achtecksseite bilden. Der eingeschriebene Kreis wird die Mitten der Achtecksseiten berühren und diese Halbierungspunkte der schrägen Achtecksseiten bilden zugleich die Durchschnittspunkte der Diagonalen des Hülfsquadrates und des eingeschriebenen Kreises. Wird die Vertikalseite des Tangenten-Quadrates in die vorerwähnten 7 gleichen Teile zerlegt, und von dem untersten (somit dem 1.) und dem obersten (somit dem 6.) Teilpunkte Parallelen zur horizontalen Quadratseite gezogen, so schneiden letztere die Diagonalen in denjenigen Punkten, durch welche der Kreis seinen Weg nehmen muss. Zu den 4 Teilpunkten, welche hierdurch auf den Diagonalen des Hülfsquadrates gefunden werden, treten noch die Durchschnittspunkte der Mittellinien auf diesen Quadratseiten, man erhält somit 8 Punkte auf der Kreisperipherie. Ist der stehende Kreis senkrecht zur Bildebene gedreht, so wird er als Ellipse erscheinen; nach allem Vorangegangenen können wir aber leicht das Hülfsquadrat darstellen, in demselben die der geometrischen Konstruktion entsprechenden Hülfslinien ziehen und erhalten somit innerhalb des perspektivisch verkürzten Tangenten-Quadrats jene 8 Punkte, welche diese Ellipse passieren muss.

Anmerkung. Behufs Vereinfachung der Konstruktion lässt man das den Kreis tangierende Achteck meistenteils weg und begnügt sich für die Darstellung der Ellipse mit den Teilpunkten auf den Diagonalen mit Hinzunahme der Mittelpunkte der Quadratseiten. (Siehe geometrische Konstruktion in Fig. 75 a.) Dieselben geben jedoch erfahrungsgemäss dem Anfänger nur ungenügende Anhaltspunkte für eine dem Auge wohlthuende Darstellung der perspektivischen Ellipsenform. Letzterem ist die Zuhülfenahme des umschreibenden Achtecks dringend anzuraten, da er durch die perspektivischen Verkürzungen der Achtecksseiten diejenigen Richtungen erhält, welche für die allmähliche zu- und abnehmende Krümmung der Ellipse massgebend sind.

Die vorher beschriebene Konstruktion ist in Fig. 75 b für die perspektivische Darstellung einer stehenden Ringform mit rechtekigem Querschnitte verwendet, welche senkrecht zur Bildfläche gerichtet ist; in derselben sind die Durchschnittsfiguren der beiden Mittelschnitte und eines Diagonalschnittes besonders gekennzeichnet. Siehe geometrische Darstellung des Kreises, Fig. 75 c, und vergleiche in Fig. 75 d die Übertragung einer gleichmässigen Teilung der senkrechten Seite eines stehenden Rechtecks auf die Diagonale und die horizontale Seite desselben.