Schattirungskunde

Riess, Karl

Stuttgart, 1871

I. Abtheilung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76877

I. Abtheilung *).

§. 1.

Die Lichtstrahlen verbreiten sich, so lange sie sich in einem Medium von gleicher Dichtigkeit bewegen, bekanntlich in geradliniger Richtung von der Lichtquelle aus nach allen Seiten hin.

Ist demnach die Lichtquelle z. B. ein leuchtender Punkt A (Fig. 1. Tafel I.) so ergibt sich daraus unmittelbar, dass die einen Körper ac erleuchtenden Lichtstrahlen innerhalb eines Kegels liegen, dessen Spitze im Punkt A liegt und dessen Mantellinien den Körper ac berühren. Die Berührungslinie abcd ist die Schattengrenze und der Schnitt a′b′c′d′ des Kegelmantels mit der Fläche F ist der Schlagschattenumriss des Körpers ac auf F.

Ist die Lichtquelle ein leuchtender Körper, so ist jedes Element seiner Oberfläche als ein leuchtender Punkt zu betrachten; die Wirkung eines jeden derselben wird die nemliche sein, wie die des Punktes A, nur mit dem Unterschied, dass sich für jeden einzelnen Lichtpunkt die Lage des Schlagschattens auf der Fläche F und die Berührungslinie des betreffenden Lichtkegels am Körper ac also die betreffende Schattengrenze ändert.

---

*) Für solche Leser, welche den in dieser 1. Abtheilung vorkommenden mathematischen Entwicklungen etwa nicht zu folgen im Stande sind, sei hiemit bemerkt, dass sie die betreffenden Paragraphen überschlagen und ohne desshalb dem Zusammenhang des Ganzen zu schaden, folgende Paragraphen verfolgen können:

§. 1—6, §. 7 Eingang, §. 10, 11, 17, 21 (22, 23, 24) 33, §. 35. Schluss, §. 36, 37, 38, 39.

Die Gesammtheit dieser Einzelwirkungen bringt die Erscheinung des Kernschattens und Halbschattens hervor, deren Bestimmung durch Construction zwar nicht unmöglich, aber immerhin sehr umständlich wäre.

Denken wir uns den leuchtenden Körper in sehr bedeutender Entfernung vom beleuchteten Gegenstand befindlich, diesen aber im Verhältniss zu jener Entfernung sehr klein, so wird der Unterschied in der Richtung der Lichtstrahlen sehr klein. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn wir uns irgend einen Gegenstand durch die Sonne beleuchtet denken; denn die Dimensionen der Körper auf unserer Erde sind im Vergleich zu ihrer Entfernung von der Sonne so verschwindend klein, dass wir die einen solchen Körper treffenden Sonnenstrahlen ohne Fehler unter sich parallel annehmen können. Beträgt ja doch derjenige Winkel, den zwei von einem Punkt der Sonne nach den beiden Polen der Erde gehende Lichtstrahlen einschliessen, nur ungefähr 17 Sekunden, ein Winkel von solcher Kleinheit, dass er für das praktische Zeichnen keinen Werth mehr hat.

Der scheinbare Durchmesser der Sonnenscheibe beträgt ungefähr 32 Minuten; denken wir uns von dem äussersten Rande der Sonnenscheibe S (Fig. 2. Taf. I.) zwei Lichtstrahlen ac und bd gezogen, welche den sphärischen Körper F in a und b berühren, und ist r der Krümmungshalbmesser in dem Theil ab der Oberfläche, so ist

$$\sphericalangle\ aob = \sphericalangle\ cad = 0^0 32'$$

und wegen der Kleinheit dieses Winkels

$$\text{arc} \,.\, ab = r \,.\, \text{tg.}\ 0^0 32' = \frac{r}{107}$$

d. h. auf einem auf unserer Erde befindlichen von der Sonne erleuchteten Körper beträgt die Breite der vom Halbschatten eingenommenen Zone den 107. Theil des Krümmungshalbmessers. Auch der Umstand, dass die Sonne kein leuchtender Punkt ist, sondern als eine leuchtende Fläche zu betrachten ist, hat demnach ebensowenig einen wesentlichen Einfluss auf die Richtung der Lichtstrahlen und die Form der Schatten.

Wir werden nun im folgenden für unsere Construktionen stets parallele Lichtstrahlen annehmen, und so in der Beleuchtung von Flächen und Körpern eine Wirkung hervorbringen, die der durch das Sonnenlicht bewirkten ähnlich ist. Diese Annahme hat ausserdem noch den Vortheil, dass die Construktionen wesentlich einfacher und leichter auszuführen sind, als dies bei nicht parallelen, von einem näher liegenden Centrum ausgehenden Lichtstrahlen der Fall ist.

Die Richtung der Lichtstrahlen, beziehungsweise ihre Lage gegen die Projektions-Ebenen, ist zwar ganz beliebig, man nimmt jedoch fast allgemein beim Schattiren architektonischer oder gewerblicher Gegenstände diese Richtung so, dass die Projektionen der Lichtstrahlen mit dem Grundschnitt (Axe) Winkel von 45° einschliessen, weil man auf diese Weise erfahrungsmässig die schönsten und deutlichsten Bilder erhält. Wir werden im folgenden ebenfalls, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, stets diese Richtung der Lichtstrahlen voraussetzen.

§. 2.

Es sei AB (Fig. 3. Taf. I.) die H. Proj. und das Rechteck A'B' die V. Proj. einer Ebene, die von den Lichtstrahlen L senkrecht getroffen wird; die Masse der auf die Flächeneinheit treffenden Lichtstrahlen sei durch m, und die Intensität des Lichtes durch f ausgedrückt, bezeichnen wir ferner die Höhe des Rechtecks (AB, A'B') mit h, so ist die Gesammtmasse der dieses Rechteck treffenden Lichtstrahlen $= AB \,.\, h \,.\, m$ und die Helligkeit H ausgedrückt durch

$$H = AB \,.\, h \,.\, m \,.\, f.$$

Bringen wir das Rechteck durch Drehung um die senkrechte Kante (A, A'A'') in die Lage AC, so wird es von einer Lichtmasse getroffen, die sich zu der vorigen verhält wie der normale Querschnitt $AC \,.\, h$ des betreffenden Lichtprismas zu dem Querschnitt $AB \,.\, h$, folglich ist die Helligkeit H' des Rechtecks (AB, A'B') wenn es in die Lage AC gebracht wird

$$H' = Ac \,.\, h \,.\, m \,.\, f.$$

Ebenso ist auch die Helligkeit H'' des Rechtecks in der Lage AD

$$H'' = Ad \,.\, h \,.\, m \,.\, f.$$

Es verhält sich demnach

$$H' : H'' = Ac \,.\, h \,.\, m \,.\, f. : Ad \,.\, h \,.\, m \,.\, f.$$
$$= Ac : Ad.$$

Nun ist aber $Ac = AC \,.\, \cos CAB = AB \,.\, \cos CAB$

$Ad = AD \,.\, \cos DAB = AB \,.\, \cos DAB;$

folglich

$$H' : H'' = AB \,.\, \cos CAB : AB \,.\, \cos .\, DAB$$
$$= \cos CAB : \cos DAB.$$

Ist ef parallel zur Richtung der Lichtstrahlen und fg senkrecht auf AC, so ist der Winkel efg der **Einfallswinkel** des Lichts gegen die Ebene AC; dieser Winkel, den wir mit φ bezeichnen wollen, ist gleich dem Winkel CAB; ebenso ist der Einfallswinkel des Lichts gegen die Ebene DA gleich dem Winkel DAB; bezeichnen wir diesen Winkel mit φ', so ist

$$H' : H'' = \cos \varphi : \cos \varphi';$$

d. h.: **die Helligkeiten von Ebenen, welche gegen die Lichtstrahlen verschiedene Richtungen haben, verhalten sich wie die Cosinusse der Einfallswinkel.**

§. 3.

Durch den im §. 2 ausgesprochenen Satz sind wir in den Stand gesetzt die Lagen von Ebenen beliebiger Helligkeit, also auch von Ebenen zu bestimmen, deren Helligkeiten stetig abnehmen, d. h. deren Hellendifferenzen gleich sind. Gesetzt, wir sollten die Lagen von Ebenen angeben, deren Helligkeit je um $^1/_6$ abnimmt, so hätten wir, wenn AB (Fig. 4. Taf. I.) diejenige Lage einer Ebene ist, in welcher sie von den Lichtstrahlen senkrecht getroffen wird, mit AB einen Kreis zu beschreiben, AB in 6 gleiche Theile zu theilen, durch die Theilpunkte c, d, e, f, g die Linien cC, dD, eE, fF, gG parallel zur Richtung der Lichtstrahlen zu ziehen bis zum Durchschnitt mit dem Kreise und die Schnittpunkte C, D, E, F, G, H mit dem Punkt A zu verbinden. Bringt man nun die Ebene AB nach einander in die Lage AC, AD, AE... so verhalten sich die Helligkeiten derselben in diesen verschiedenen Lagen wie die Längen AB : Ac : Ad : Ae : Af : Ag oder wie $^6/_6 : {}^5/_6 : {}^4/_6 : {}^3/_6 : {}^2/_6 : {}^1/_6$, und die Hellendifferenz ist daher je $^1/_6$.

Der Einfallswinkel des Lichtstrahls gegen die Ebene AB ist $= 0^0$, der gegen die Ebene $AH = 90^0$; nun ist aber $\cos 0^0 = 1$ und $\cos 90^0 = 0$, folglich die Helligkeit der Ebene $AB = 1$, und die von $AH = 0$. Die Helligkeit $= 1$ ist die grösste, da $\cos \varphi$ niemals grösser als 1 werden kann; es ist diejenige Helligkeit, welche durch senkrecht auffallende Lichtstrahlen erzeugt wird.

§. 4.

Die Helligkeit H' der Ebene AC (Fig. 5. Taf. I.) verhält sich, wie im Vorhergehenden nachgewiesen, zur Helligkeit H'' der Ebene AB.

$$\begin{aligned} H' : H'' &= 1 : \cos CAB \\ &= 1 : \cos dfg \\ &= AB : Ac \end{aligned}$$

Ist daher z. B. $Ac = \frac{2}{3} AB$, so ist auch die Helligkeit der Ebene AC $^2/_3$ von der, welche die Ebene AB hat; ebenso ist die Helligkeit der Ebene $AG = {}^1/_3$, wenn $Ad = {}^1/_3\, AB$ ist.

Drehen wir die Ebene AC um die mit den Lichtstrahlen parallele Gerade AD als Axe so, dass sie mit dieser stets den Winkel CAD einschliesst, so erzeugt sie bei dieser Drehung eine Kegelfläche CAE, die sie fortwährend berührt, und die daher auch durchweg gleiche Helligkeit nemlich die Helligkeit der Ebene AC haben muss. Ist daher die Helligkeit der Ebene A C $= \frac{2}{3}$, so ist auch die Helligkeit der Kegelfläche A E C $= \frac{2}{3}$.

Ebenso ist die Helligkeit der durch Drehung der Ebene A D entstandenen Kegelfläche A G F gleich der Helligkeit der Ebene A D $= \frac{1}{3}$ u. s. f. Dass man sich auf diese Weise Kegelflächen von jeder beliebigen Helligkeit verschaffen könnte, ist selbstverständlich.

Berührt eine Ebene eine krumme Fläche, sei es in einem Punkt, sei es in einer geraden oder krummen Linie, so hat die Fläche in dem Berührungspunkt oder längs der Berührungslinie stets dieselbe Helligkeit, wie die Berührungsebene. Dasselbe gilt auch für sich berührende krumme Flächen. Wir sind daher mit Hilfe obiger Kegelflächen im Stande, die Helligkeit eines beliebigen Punktes a einer krummen Fläche zu bestimmen, wenn wir an die Fläche im Punkt a eine Berührungs-Ebene und parallel mit ihr durch die gemeinschaftliche Kegelspitze eine zweite Ebene legen; die von letzterer berührte Kegelfläche, die wir mit K bezeichnen wollen, ergibt, wie leicht einzusehen, die Helligkeit des Punktes a.

Ausser dem Punkt a wird aber auch jeder andere Punkt b, c, d... einer krummen Fläche, an welchen eine Berührungs-Ebene gelegt werden kann, die zugleich an der Kegelfläche K eine parallele Berührungs-Ebene zulässt, die gleiche Helligkeit haben. Die Punkte a, b, c, d.... bilden auf stetig gekrümmten Flächen immer stetige Curven, deren Form und Lage von der Gestalt der Fläche selbst abhängt. Diese Curven, längs deren die Helligkeit einer Fläche durchweg dieselbe ist, nennen wir Curven gleicher Helligkeit oder kurz Helligkeitscurven.

§. 5.

Obgleich nun die Bestimmung der Helligkeitscurven mit Hilfe der im vorigen §. beschriebenen Kegelflächen stets möglich sein wird, macht man von diesem Verfahren doch nur ausnahmsweise Gebrauch, da es in den meisten Fällen zu schwierigen und zeitraubenden Constructionen führt. Man wird zu diesem Zwecke besser eine Kugel wählen, weil auf einer solchen überhaupt jede irgend mögliche Helligkeit vorkommen muss. Sind die Helligkeiten für alle Punkte einer Kugeloberfläche bestimmt, so dient sie uns ebenso als Massstab zur Bestimmung der Helligkeit jedes beliebigen Flächenpunktes, wie ein Längenmassstab für lineare Dimensionen. Es wird sich demnach zunächst darum handeln, zu bestimmen, in welcher Art die Helligkeiten sich auf der Kugel verbreiten und wie die Hellencurven auf derselben zu verzeichnen sind.

Es sei L (Fig. 6. Taf. I.) die Richtung des Lichts, F eine Kugelfläche. Der Punkt a der Kugel hat bekanntlich dieselbe Helligkeit wie die Berührungs-Ebene mn; diese Helligkeit H ist aber nach §. 2. H = cos . eaf. Der Winkel eaf (der Einfalls-Winkel des Lichtstrahls) ist aber = ∢ adb, folglich ist auch

$$H = \cos . adb.$$

Aus demselben Grund ist auch die Helligkeit H′ des Punktes t

$$H' = \cos . tdb$$

und wir können demnach schreiben

$$H : H' = \cos . adb : \cos . tdb$$

oder wenn wir die rechte Seite der Gleichung mit dem Radius R der Kugel multipliciren

$$H : H' = R . \cos . adb : R . \cos . tdb .$$
$$= dc : du$$

Die Berührungs-Ebene mn schneidet in ihrer Erweiterung die mit L parallele Linie dg in r; drehen wir sie um die Achse dg, so dass sie stets durch den Punkt r geht und zugleich die Kugel berührt, so ändert sie während dieser Drehung ihre Helligkeit nicht; da aber die Berührungspunkte an der Kugel dieselbe Helligkeit haben, wie die berührende Ebene, so ist auch in diesen die Helligkeit durchweg gleich. Alle in diesem Falle möglichen Berührungspunkte liegen aber im Kreis ak, welcher demzufolge eine Curve gleicher Helligkeit ist, dasselbe gilt auch vom Kreis tw. Die Helligkeiten dieser Kreise verhalten sich nun wie die der Punkte a und t, d. h. wie dc : du oder wie die Abstände ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt.

Dass die Ebenen der Kreise gleicher Helligkeit auf der Kugel stets senkrecht zu dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius stehen, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst.

Im Punkt b, in welchem die Kugel vom Lichtstrahl senkrecht getroffen wird, ist der Einfallswinkel des Lichtstrahls = 0, folglich cos . $\varphi = \cos 0^0 = 1$ und daher hier die Helligkeit am grössten. Der Punkt a ist der hellste Punkt der Kugel.

Die Berührungs-Ebene am Punkt h der Kugel ist parallel zum Lichtstrahl, der Einfallswinkel φ ist $= 90^0$ und da $\cos 90^0 = 0$, so ist die Helligkeit im Kreis hi, d. in der Schattengrenze = 0.

§. 6.

Da die Helligkeiten der Hellencurven auf der Kugel den Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt proportional sind, so müssen nothwendig für gleiche Hellendifferenzen derselben auch die Differenzen ihrer gegenseitigen Abstände gleich sein.

Theilt man demnach den mit dem Lichtstrahl parallelen Radius ab (Fig. 7.

Taf. I.) (in eine beliebige Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile und legt durch die Theilpunkte a, c, d, e Ebenen senkrecht zu ab, so sind die durch diese Ebenen erzeugten Schnittkreise 1.1, 2.2, 3.3, 4.4 Kreise gleicher Helligkeit, deren Intensitäten sich verhalten wie ab : ae : ad : ac oder wie $^4/_4 : ^3/_4 : ^2/_4 : ^1/_4$; die Hellendifferenz beträgt daher je $^1/_4$.

Wollte man die Schattirung der Kugel wirklich ausführen, so müsste man einen Tuschton so wählen, wie er für die Dunkelheit der Schattengrenze geeignet erscheint; lässt man zugleich die Helligkeit des weissen Papieres als diejenige des hellsten Punktes gelten, so müsste jener Ton so verdünnt werden, dass er nach einmaligem Auftrag die Helligkeit $^1/_4$ u. s. f. und nach viermaligem Auftrag wieder die ursprüngliche Dunkelheit der Schattengrenze gäbe, alsdann die Kugelfläche vom Kreis 44 bis zum Kreis 11 einmal, bis zum Kreis 22 zweimal, bis zum Kreis 33 dreimal und bis zum Kreis 44 viermal damit anlegen. Dass die Körper in der Natur auf der vom Licht abgewandten, also auf der Schattenseite bis zur Schattengrenze nicht absolut dunkel oder schwarz sind, ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt. Es ist dies eine Folge der Wirkung des Reflexlichtes, dessen Einfluss auf die Helligkeit der im Selbst- und Schlagschatten befindlichen Theile der Körper in den folgenden Paragraphen speciell nachgewiesen werden soll.

Die scharfen Uebergänge oder Abstufungen von einer Tuschlage zur andern lassen sich theils dadurch vermeiden, dass man sie nach den helleren Stellen hin allmälig verwascht oder dadurch, dass man statt 4 Hellencurven deren mehrere 6, 8 oder 10 und also ebensoviele Tonlagen annimmt. Dass man aber mit 4, höchstens 6 Lichtcurven in den meisten Fällen ausreicht, werden wir später sehen.

Ueber die Wirkung des Reflexlichtes.

§. 7.

Alle Körper, sowohl die festen als auch die tropfbar- oder elastischflüssigen: das Wasser, die Wolken, die Luft u. s. f. haben die Eigenschaft, dass sie das von irgend einer Lichtquelle, z. B. von der Sonne empfangene Licht mehr oder weniger vollständig wieder zurück werfen, reflektiren. Ohne die Existenz dieses reflektirten Lichtes müssten nothwendig alle diejenigen Theile einer Fläche oder eines Körpers, welche von den unmittelbar von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen nicht getroffen werden, absolut dunkel, für unser Auge u. s. w. nicht sichtbar sein; durch die reflektirten Lichtstrahlen werden aber auch diese Flächen- und Körpertheile noch hinlänglich beleuchtet, um von unserem Auge deutlich wahrgenommen werden zu können.

Es ist ein bekanntes physikalisches Gesetz, dass der Einfallswinkel eines Lichtstrahls dem Reflexionswinkel gleich ist. Wenn demnach eine Fläche MN (Fig. 8. Taf. I.) von einem Lichtstrahl la im Punkt a getroffen wird, so halbirt die Normale ab den Winkel lab′, welchen der einfallende Lichtstrahl l und der reflektirte l′ einschliessen.

Betrachten wir (Fig. 9. Taf. I.) den Kreis gafw als einen zur Horizontalebene senkrecht stehenden Cylinder, dessen Oberfläche gaf von den aus der Richtung L herkommenden parallelen Lichtstrahlen beleuchtet wird. Ist die Höhe des Cylinders = h, so ist die Lichtmasse, welche die Fläche abcdef des Cylinders trifft $. = a'f.'h . m = r . h . m$ (da $a'f' = a'''f = r$); wenn man mit m die auf die Flächeneinheit treffende Lichtmasse bezeichnet.

Denken wir uns diese Lichtmasse in gleichen Abständen $a'b'$, $b'c'$, $c'd', \ldots . = \frac{r}{p}$ durch die Ebenen bb', cc', dd', ... in gleiche Lichtmassen abgetheilt, so werden offenbar die Cylinderflächenstücke ab, bc, cd .... von gleichen Lichtmassen $\frac{r}{p} . h . m = \frac{M}{p}$ getroffen. Ist nun die Cylinderoberfläche vollkommen polirt, reflektirt sie also alle Lichtstrahlen vollkommen und regelmässig, so wird die auf ab fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum $a''abb''$, die auf bc fallende der vorigen gleichen Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum $b''bcc''$, ferner die auf cd fallende Lichtmasse $\frac{M}{p}$ in den Raum $c''cdd''$ u. s. f. reflektirt. Verlängert man die Linien bb'', cc'', dd'' .... rückwärts, bis sie sich schneiden, so können wir uns die einzelnen reflektirten Lichtbüschel von den Axen h, m, n ... der Cylinderausschnitte $a''hb''$, $b''mc''$, $c''nd''$ .... ausgehend denken. Da aber die in diesen Räumen liegenden Reflexlichtmassen für alle dieselben, nemlich $= \frac{M}{p}$ ist, so müssen die denselben entsprechenden Lichtintensitäten offenbar im umgekehrten Verhältniss zu den in gleichen Abständen von den Axen h, m, n ... genommenen Durchschnitten, oder da die Höhe für alle Cylindersektoren dieselbe ist, im umgekehrten Verhältniss zu den Bögen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$ ... stehen.

Der geometrische Ort für die Axen der Cylindersektoren ist die aus dem gegenseitigen Schnitt der Reflexstrahlen $b''b$, $c''c$, $d''d$ .... leicht zu construirende Curve hmnop ... f; schneidet man von den Berührungspunkten aus auf den diese Curve berührenden Strahlen gleiche Stücke (z. B. $= a''h$) ab, so ist die daraus hervorgehende Curve $a''b''c''d''e''f''$ als die Spur einer Cylinderfläche zu betrachten, dessen durch die Reflexstrahlen erzeugten Helligkeiten in den einzelnen Theilen sich verhalten, wie die Masse der dieselben treffenden Lichtstrahlen, oder die durch das Reflexlicht erzeugten Helligkeiten stehen in umgekehrtem Verhältniss zu den Bögen $a''b''$, $b''c''$ $c''d''$ ... da sie von gleichen Lichtmassen erhellt werden.

Die Lichtintensitäten in den einzelnen Ausschnitten sind daher:

$$\left.\begin{aligned} S' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc}\,.\,a''b''} \\ S'' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc}\,.\,b''c''} \\ S''' &= \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{\text{arc}\,.\,c''d''} \\ &\;\;\vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \; 1)$$

und es verhält sich demnach

$$S' : S'' : S''' = \frac{1}{\text{arc}\,.\,a''b''} : \frac{1}{\text{arc}\,.\,b''c''} : \frac{1}{\text{arc}\,.\,c''d''} \quad . \; . \; . \quad 2)$$

Die Curve $a''b''c''d''$.... nimmt um so mehr die Form eines aus dem Mittelpunkt a beschriebenen Kreises an, je grösser man die Längen $a''h$, $b''m$, $c''n$.... macht. Nehmen wir nun die Entfernung $a''h$ u. s. f. sehr gross und den Halbmesser des Cylinders K sehr klein, so wird die Curve $a''b''c''d''e''f''$ ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt in a''', die Curve hmnop... aber wird mit dem Punkt a''' zusammenfallen, und die Reflexstrahlen aa'', bb'', cc'' ... von dem Mittelpunkt a''' herzukommen scheinen. Für diesen Fall ist dann aber

$$\text{arc}\,.\,a''b'' = 2\,.\,\text{arc}\,.\,ab$$

denn es ist $\sphericalangle\, a''hb'' = b'bb'' = 2\,.\,\varphi = 2\,.\,\sphericalangle\, aa'''b$; ferner

$$\begin{aligned} &\text{arc}\; a''c'' = 2\,.\,\text{arc}\,.\,ac \\ &\text{arc}\; a''d'' = 2\,.\,\text{arc}\,.\,ad \\ &\qquad\vdots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{arc}\,.\,a''b'' &= 2\,.\,\text{arc}\,.\,ab \\ \text{arc}\,.\,b''c'' &= \text{arc}\,.\,a''c'' - \text{arc}\,.\,a''b'' = 2\,(\text{arc}\,.\,ac - \text{arc}\,.\,ab) \\ \text{arc}\,.\,c''d'' &= \text{arc}\,.\,a''d'' - \text{arc}\,.\,a''c'' = 2\,(\text{arc}\,.\,ad - \text{arc}\,.\,ac) \\ &\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Nun ist aber arc . ab derjenige Bogen, dessen sin $= a'b'$ folglich

$$\begin{aligned} \text{arc}\,.\,ab &= \text{arc}\,.\,\sin a'b' \\ \text{arc}\,.\,ac &= \text{arc}\,.\,\sin a'c' \\ \text{arc}\,.\,ad &= \text{arc}\,.\,\sin a'd' \\ \vdots\;\; & \quad\;\; \vdots \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \text{arc}\,.\,a''b'' &= 2\,.\,\text{arc}\,.\,\sin\,.\,a'b' \\ \text{arc}\,.\,b''c'' &= 2\,(\arcsin a'c' - \arcsin a'b') \\ \text{arc}\,.\,c''d'' &= 2\,(\arcsin a'd' - \arcsin a'c') \end{aligned}$$

oder, da $a'b' = \frac{1}{p} \cdot r$; $a'c' = \frac{2}{p} \cdot r$; $a'd' = \frac{3}{p} \cdot r$,

so ist: $\text{arc} \cdot a''b'' = 2 \cdot \arcsin \frac{1}{p} \cdot r$

$$\text{arc} \cdot b''c'' = 2 \cdot \left(\arcsin \frac{2}{p} r - \arcsin \frac{1}{p} \cdot r \right)$$

$$\text{arc} \cdot c''d'' = 2 \cdot \left(\arcsin \frac{3}{p} \cdot r - \arcsin \frac{2}{p} \cdot r \right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 1), so ist

$$S' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \text{arc sin} \frac{r}{p}}$$

$$S'' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\arcsin \frac{2}{p} \cdot r - \arcsin \frac{1}{o} \cdot r \right)}$$

$$S''' = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \left(\arcsin \frac{3}{p} \cdot r - \arcsin \frac{2}{p} \cdot r \right)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

oder allgemein

$$S = \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{2 \left(\arcsin \frac{n+1}{p} \cdot r - \arcsin \frac{n}{p} \cdot r \right)}$$

der Coefficient $\frac{M}{p} = \frac{1}{p} \cdot r \cdot h \cdot m$ ist offenbar abhängig von der Intensität des direkten Lichtes L; setzen wir ihn gleich F und den Radius $r = 1$ so ist

$$S = F \frac{1}{2 \cdot \left(\arcsin \frac{n+1}{p} - \arcsin \frac{n}{p} \right)} \quad . \; . \; . \quad 3)$$

worin p jede beliebige ganze Zahl bedeutet und n jeden Werth von 0 bis p annehmen kann. Nimmt man p sehr gross, so nähert sich der

Ausdruck $\left(\arcsin\frac{n+1}{p} - \arcsin\frac{n}{p}\right)$ der Grenze

$$\lim . \frac{\arcsin(x + dx) - \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

wenn man x statt $\frac{n}{p}$ setzt, und die Gleichung 3 nimmt die Form an:

$$S = F . \frac{1}{2 . \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}} = F . \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

$\sqrt{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2}$ ist aber $= \cos\ \varphi$; folglich ist

$$S = \frac{F}{2} . \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun für jeden beliebigen Einfallswinkel φ die erzeugte Reflexwirkung berechnen.

Ist z. B. $\varphi = 0^0$, so ist $\cos\ \varphi = 1$ und daher

$$S = \frac{F}{2}$$

d. h. der vom Lichtstrahl senkrecht getroffene Punkt a reflektirt das Licht mit einer Intensität, die gleich der Hälfte von der des direkten Lichtes ist.

Ist $\varphi = 90^0$, so ist $\cos\ \varphi = 0$ und daher die Intensität des vom Punkt f reflektirten Lichtes $= 0$.

Lässt man den Winkel φ stetig (etwa von 9^0 zu 9^0) wachsen, so erhält man aus Gleichung 5) folgende Intensitäten des Reflexlichtes:

für	$\varphi = 0^0$	S	= 0,500 . F
„	$\varphi = 9^0$	„	0,494 . F
„	$\varphi = 18^0$	„	0,476 . F
„	$\varphi = 27^0$	„	0,445 . F
„	$\varphi = 36^0$	„	0,404 . F
„	$\varphi = 45^0$	„	0,354 . F
„	$\varphi = 54^0$	„	0,294 . F
„	$\varphi = 63^0$	„	0,227 . F
„	$\varphi = 72^0$	„	0,154 . F
„	$\varphi = 81^0$	„	0,078 . F
„	$\varphi = 90^0$	„	0,000 . F

§. 8.

Aus der Vergleichung dieser Zahlenwerthe geht unmittelbar hervor, dass die Intensität des vom Punkt a reflektirten Lichtes am grössten, dass sie von da an erst langsamer und dann rascher gegen den Punkt F hin abnimmt.

Wäre g a f w eine Kugel, so müsste nothwendig die Reflexion des Lichtes in jedem durch a w gehenden grössten Kreis in ganz gleicher Weise stattfinden, wie im Kreis g a f. Drehen wir den Kreis a b c . . . f . . w um a w als Axe, so beschreiben sämmtliche Punkte desselben Kreise; da aber bei dieser Drehung der Einfallswinkel des Lichtstrahls für die betreffenden Punkte derselbe bleibt, so müssen offenbar die Kreise $b b_0$, $c c_0$, $d d_0$ . . . Kreise von gleichem Reflexionsvermögen sein.

Betrachten wir den Kreis a″ b″ c″ d″ als den Durchschnitt einer concaven Kugel, welche von dem von der Kugel K ausgestrahlten Reflexlicht beleuchtet wird, so muss offenbar der Punkt a″ ein hellster Punkt sein, da er das stärkste Licht empfängt. Von da an nimmt, wie oben nachgewiesen, die Wirkung des Reflexlichtes, d. h. die Reflexhelligkeit bis zur Schattengrenze F F′ stetig ab. Da die Kegelfläche B h b″ durchweg gleiche Helligkeit hat, so muss auch die Beleuchtung des Kreises B b″, resp. dessen Helligkeit die nemliche sein, und zwar wird sie sich zur Helligkeit des Punktes a″ verhalten, wie die Lichtintensität des Punktes a zu der des Kreises $b_0 b$, dasselbe gilt von den Kreisen C c″, D d″ . . . .

Ist die Kugel K sehr klein, so können wir uns vorstellen, dass die Reflexstrahlen vom Punkt a‴ herkommen, und die die Schattengrenze F F′ beleuchtenden Reflexstrahlen kommen von Punkten des Kügelchens K her, für welche $\varphi = 45^0$ ist; für $\varphi = 45^0$ ist aber $S = 0{,}354 \,.\, F$. Es nimmt daher die Reflexhelle der Kugel F a″ F′ vom hellsten Punkt a″ bis zur Schattengrenze F F′ von 0,5 . F bis zu 0,354 . F oder von $\frac{F}{2} \,.\cos.0^0$ bis $\frac{F}{2} \,.\cos 45^0$ stetig ab.

§. 9.

Um nun auf der Kugel F a″ F′ die Lage von Kreisen gleicher Reflexhelle zu erhalten, deren Helligkeit in gleichen Abstufungen vom hellsten Punkt bis zur Schattengrenze abnimmt, wird man aus der Gleichung $S = \frac{F}{2} \,.\cos\varphi$ diejenigen Winkel zu bestimmen haben, für welche der Werth von $\cos\varphi$ stetig zunimmt. Da, wie in §. 8 nachgewiesen, die Werthe von S zwischen

$$S = \frac{F}{2} \,.\, \cos . 0^{\circ} = 0{,}5 \,.\, F \text{ und}$$

$$S = \frac{F}{2} \,.\, \cos . 45^{\circ} = 0{,}3535 \,.\, F$$

oder die von $\cos\varphi$ zwischen 1 und 0,707 liegen müssen, so hat man zwischen 1 und 0,707 soviele Zahlwerthe in gleichen Intervallen zu substituiren, als man Helligkeitscurven auf der Kugel haben will. Nimmt man beispielsweise deren 10 an, so ist die jedesmalige Differenz $d = \frac{1}{10}\,(1 - 0{,}707) = 0{,}0293$ und daher

$\cos\varphi = 0{,}707$	$= 0{,}707$	folglich	$\varphi = 45^{\circ}$ —
„ $= 0{,}707 + 1 . 0{,}0293$	$= 0{,}7363$		„ $= 42^{\circ}\,35$
„ $= 0{,}707 + 2 . 0{,}0293$	$= 0{,}7656$		„ $= 40^{\circ}$ —
„ $= 0{,}707 + 3 . 0{,}0293$	$= 0{,}7919$		„ $= 37^{\circ}\,40$
„ $= 0{,}707 + 4 . 0{,}0293$	$= 0{,}8242$		„ $= 34^{\circ}\,30$
„ $= 0{,}707 + 5 . 0{,}0293$	$= 0{,}8535$		„ $= 31^{\circ}\,25$
„ $= 0{,}707 + 6 . 0{,}0293$	$= 0{,}8628$		„ $= 28^{\circ}$ —
„ $= 0{,}707 + 7 . 0{,}0293$	$= 0{,}9121$		„ $= 24^{\circ}\,10$
„ $= 0{,}707 + 8 . 0{,}0293$	$= 0{,}9414$		„ $= 19^{\circ}\,45$
„ $= 0{,}707 + 9 . 0{,}0293$	$= 0{,}9707$		„ $= 14^{\circ}$ —
„ $= 0{,}707 + 10 . 0{,}0293$	$= 1{,}0000$		„ $= 0^{\circ}$ —

Da die Entfernungen der Helligkeitscurven-Ebenen Bb″, Cc″ u. s. f. vom Kugelmittelpunkt $= \cos 2\varphi$, $\cos 2\varphi'$ u. s. f. sind, so ist

$2\varphi = 90^{\circ}$ —	und daher $\cos . 2\varphi$	$= 0{,}0000$
„ $85^{\circ}\,10$	„	0,0843
„ 80° —	„	0,1736
„ $75^{\circ}\,20$	„	0,2532
„ 69° —	„	0,3584
„ $62^{\circ}\,50$	„	0,4566
„ 56° —	„	0,5592
„ $48^{\circ}\,20$	„	0,6648
„ $39^{\circ}\,30$	„	0,7716
„ 28° —	„	0,8829
„ 0° —	„	1,0000

Diese Werthe von $\cos 2\varphi$ verhalten sich aber sehr nahe wie die Zahlen 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 ..... 0,9; 1; es theilen demnach die Ebenen der Curven gleicher Reflexhelle unter der Voraussetzung gleicher Hellendifferenzen den zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius sehr nahe in gleiche Theile.

§. 10.

Die Atmosphäre ist stets mehr oder weniger mit Wasserdampf erfüllt, und dieser ist es hauptsächlich, welcher das atmosphärische Reflexlicht erzeugt. Die einzelnen Dampfbläschen aber sind als unendlich kleine Kügelchen zu betrachten, welche das Licht in der im vorigen §. beschriebenen Weise reflektiren und in ihrer Gesammtwirkung den atmosphärischen Reflex hervorbringen. Da die Intensität desjenigen Lichtes, welches die Dampfbläschen in der dem direkten Licht gerade entgegengesetzten Richtung reflektiren, am stärksten ist, so wird auch die Intensität des atmosphärischen Reflexlichtes in dieser Richtung am grössten sein. Man nennt diese Richtung den atmosphärischen Hauptstrahl.

Das atmosphärische Reflexlicht bewirkt nun auf der Selbstschattenseite der Körper eine ähnliche Abstufung der Helligkeit, wie im vorigen §. für die Kugelfläche F a″ F′ nachgewiesen wurde. Allerdings haben wir dort von der Kugelfläche K vorausgesetzt, dass sie das Licht vollkommen reflektire, was für die das Sonnenlicht reflektirenden Dampfbläschen der Atmosphäre nicht ganz zutreffen wird, da sie einen grossen Theil des Lichtes absorbiren und durch sich hindurch lassen. Die Intensität des atmosphärischen Reflexlichtes wird demnach beträchtlich geringer sein, als im §. 7 nachgewiesen wurde. Ueberhaupt wird das Verhältniss der Intensität des direkten zu der des reflektirten atmosphärischen Reflexlichtes nicht leicht zu bestimmen möglich sein, da letztere von so manchen Zufälligkeiten, als z. B. von dem Dichtigkeits- und Feuchtigkeitsgrad der Luft u. s. w. abhängig ist. Selbstverständlich ist das Verhältniss der Helligkeit des hellsten Punktes im Reflexlicht zu der des hellsten Punktes im direkten Licht das nemliche wie das, welches zwischen den Intensitäten des direkten und des reflektirten Lichtes stattfindet.

§. 11.

Stehen die Körper nicht ausschliesslich unter dem Einfluss des atmosphärischen Reflexlichtes, sind sie vielmehr von andern Körpern umgeben, welche das Licht reflektiren (terrestrisches Reflexlicht), so wird dadurch die Wirkung des atmosphärischen Reflexes mannigfach alterirt. Eine genaue Bestimmung jener zufälligen durch beliebige Körper und Flächen erzeugten Reflexwirkung ist kaum oder wenigstens nur im Allgemeinen möglich, da sie von vielen Zufälligkeiten abhängt, als z. B. von der Form, von der Lage, von der Textur der Oberfläche, von der Farbe und der Entfernung der reflektirenden Fläche u. s. f. Die Berücksichtigung dieses Einflusses muss daher in jedem speciellen Fall bei der Schattirung von Flächen und Körpern dem Ermessen und dem künstlerischen Gefühl des Einzelnen überlassen bleiben. Das Studium der Natur wird für diesen Fall die sichersten Anhaltspunkte geben.

Es wird mit der Wirklichkeit, wenn auch nicht vollkommen, so doch sehr nahe übereinstimmen, wenn wir annehmen, dass von den reflektirenden matten Flächen das Licht ähnlich ausgestrahlt wird, wie von selbstleuchtenden Flächen. Die dadurch erzeugte Helligkeit wird dann namentlich, ausser von der Lage, von der Entfernung der reflektirenden Fläche abhängen, und auch hier das physikalische Gesetz in Anwendung kommen können, dass die Intensität des Lichtes im Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt.

Ist z. B. der mit seiner Grundfläche auf einer Ebene E stehende Cylinder (Fig. 10. Taf. II.) durch das aus der Richtung l herkommende Sonnenlicht beleuchtet, ist ab die Schattengrenze und bfe der Schlagschatten, so wird das von der Ebene E reflektirte Licht namentlich auf den untern Theil des Cylinders seinen Einfluss äussern, während der obere Theil mehr und mehr diesem Einfluss sich entzieht und schliesslich fast nur durch atmosphärisches Reflexlicht beleuchtet wird: der untere Theil des Cylinders muss daher durchweg heller sein als der obere, mit Ausnahme desjenigen Theils, welcher um den Punkt d herum liegt, da derselbe von der Ebene E (wegen des Schlagschattens bef) fast gar keines und jedenfalls nur sehr spärliches atmosphärisches Reflexlicht empfängt.

§. 12.

In den zunächst folgenden Paragraphen soll nunmehr der Einfluss des atmosphärischen Reflexlichtes nachgewiesen werden, welchen dasselbe auf die im Selbstschatten und im Schlagschatten befindlichen Körperflächen ausübt.

Ist b (Fig. 11. Taf. II.) ein sehr kleines Kügelchen (also etwa ein Wassertheilchen oder Dampfbläschen der Atmosphäre), welches vom Sonnenstrahl l unter dem Winkel φ so getroffen wird, dass der reflektirte Strahl i die Kugel K im hellsten Punkt a unter dem Winkel β trifft, so ist die dadurch erzeugte Helligkeit des Punktes a

$$H_a = \left(\frac{F}{2} \cdot \cos\varphi\right) \cdot \cos\alpha$$

denn $\frac{F}{2} \cdot \cos\varphi$ ist die Intensität des Reflexstrahls l (s. §. 7 Gleichung 5) und $\sphericalangle\ \alpha$ der Einfallswinkel dieses Strahls.

Nun ist aber $\sphericalangle \alpha = 180 - 2\varphi$ folglich

$$H_a = \left(\frac{F}{2} . \cos\varphi\right) . \cos . 180 - 2\varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} . \cos\varphi . (-\cos . 2\varphi) = -\frac{F}{2} \cos\varphi . \cos . 2\varphi . \quad . \quad . \quad 1)$$

Aendert das Kügelchen b seine Lage, so muss nothwendig auch der Winkel φ sich ändern. Wir können uns aber unendlich viele Lagen des Kügelchens b denken, in welchen jedesmal ein von demselben ausgehender Reflexstrahl die Kugel K im Punkt a trifft; alle diese Strahlen zusammen müssen daher eine Helligkeit erzeugen, welche ausgedrückt ist durch

$$H_a = \Sigma\left(-\frac{F}{2} . \cos\varphi . \cos . 2\varphi\right)$$

folglich ist

$$H_a = -\frac{F}{2} \int . \cos\varphi . \cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Es ist aber

$$\int \cos\varphi . \cos 2\varphi = \int \cos\varphi . (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$
$$= \int \cos\varphi\,(1 - \sin\varphi^2) - \cos\varphi . \sin\varphi^2$$
$$= \int \cos\varphi - 2\cos\varphi . \sin\varphi^2$$
$$= \sin\varphi - 2 \cdot \frac{\sin\varphi^3}{3}$$

$$H_a = -\frac{F}{2}\left(\sin\varphi - 2\,\frac{\sin\varphi^3}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

oder

$$H_a = -\frac{F}{2} \sin\varphi\left(1 - \frac{2}{3}\sin\varphi^2\right) \quad . \quad 4)$$

Nimmt das Kügelchen die Lage b'' an, so kann nur derjenige Reflexstrahl die Kugel im Punkt a erreichen, für welche $\varphi = 90^0$ ist; seine Intensität ist aber $= 0$. Desgleichen kann nur derjenige Reflexstrahl b'a die Kugel im Punkt a erreichen, für welchen $\varphi = 45^0$ ist. Für diesen Strahl ist aber Winkel $\alpha = 90^0$, folglich seine Wirkung $= 0$. Die Lagen b'' und b' des reflektirenden Kügelchens sind daher zwei Grenzen, innerhalb deren diejenigen Kügelchen liegen müssen, welche einen Reflexstrahl nach a senden können. Nimmt z. B. das reflektirende Kügelchen die Lage b''' an, so kann von hier aus kein Reflexstrahl den Punkt a mehr erreichen. Wir haben daher das Integral Gleich. 2 innerhalb der Grenzen $\varphi = 45^0$ und $\varphi = 90^0$ zu nehmen oder in Gleich. 3 für φ diese Werthe einzusetzen, wodurch sich ergibt

$$H_a = -\frac{F}{2}\left(\sin 45^0 - \sin 90^0 - \frac{2}{3}(\sin 45^3 - \sin 90^3)\right)$$

$$= -F\left(\frac{1}{2}(0{,}7071 - 1) - \frac{1}{3}(0{,}3534 - 1)\right)$$

$$= F\,(0{,}2159 - 0{,}1464)$$

$$H_a = 0{,}0691 \,.\, F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Dies ist die Helligkeit des Punktes a, erzeugt durch die Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen innerhalb des Raumes b′ab″ herkommen; allein diejenigen Kügelchen, welche innerhalb des Raumes b″ag liegen, werden die gleiche Wirkung auf den Punkt a herzorbringen und die Gesammtwirkung wird demnach das Doppelte, also

$$H_a = 0{,}1382 \,.\, F \,.$$

sein.

Ist also der hellste Punkt a der Kugel im Schlagschatten, so ist die Helligkeit in Folge der Wirkung des Reflexlichtes nicht Null, sondern ca. $^1/_7$ F.

§. 13.

In derselben Weise lässt sich nun auch die Wirkung des Reflexlichtes auf die Schattengrenze bestimmen.

Ist l (Fig. 12. Taf. II.) die Richtung des Lichtstrahls, also ac die Schattengrenze, und sind b, b′, b″ . . . verschiedene sehr kleine Kügelchen, Dampfbläschen der Atmosphäre, so wird jedes derselben einen Reflexstrahl nach dem Punkt a der Schattengrenze senden. Für das Kügelchen b z. B. ist aber offenbar die Intensität des Reflexstrahls ba $S = \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi$; die dadurch erzeugte Wirkung auf den Punkt a der Kugel

$$H_a = \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\alpha.$$

Nun ist aber $\sphericalangle\, \alpha = 90 - \beta$; $\sphericalangle\, \beta = 180 - 2\,\varphi$, folglich $\sphericalangle\, \alpha = 90 - (180 - 2\,\varphi) = 2\,\varphi - 90$. und

$$\cos . \,\alpha = \cos . \,(2\,\varphi - 90) = \sin 2\,\varphi \,.$$

folglich

$$H_a = \frac{F}{2} \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin 2\,\varphi$$

Die Gesammtwirkung aller nach a gerichteten Reflexstrahlen, welche von den Kügelchen b, b′, b″ . . . . herkommen wird, daher ausgedrückt sein durch

$$H_a = \Sigma \left(\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi \right)$$

oder da für das Kügelchen b′ der $< \varphi = 90^0$ für $b^{IV} < \varphi = 0^0$ ist, diese beiden Lagen der reflektirenden Kügelchen aber Grenzlagen sind, so ist

$$H_a = \int_{90^0}^{0^0} \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi$$

oder

$$H_a = \frac{F}{2} \int_{90^0}^{0^0} \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Es ist aber

$$\int \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi = -\frac{2}{3} \cos \varphi^3$$

folglich

$$H_a = \left[-\frac{F}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \varphi^3 \right]_{\varphi = 90}^{\varphi = 0} \; . \quad . \quad . \quad 2)$$

Setzt man für φ die Werthe 0^0 und 90^0 in diese Gleichung ein, so ist, da $\sin 0^0 = 0$ und $\sin 90^0 = 1$

$$H_a = 0 - \left(-\frac{F}{3} \right) = \frac{F}{3} \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die durch das atmosphärische Reflexlicht erzeugte Helligkeit ist in der Schattengrenze $= \frac{F}{3}$

§. 14.

Ist wieder l (Fig. 13. Taf. II.) die Richtung des Sonnenlichtes, also der Punkt c der hellste Punkt im Selbstschatten, so können wir auch für diesen Punkt die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit berechnen.

Der von dem Kügelchen b c ausgehende Reflexstrahl b c, dessen Insität $S = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi$ ist, trifft die Kugel im Punkt c, der Einfallswinkel ist α, folglich wieder die dadurch erzeugte Helligkeit

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha$$

Es ist aber $< \alpha = 2\varphi$, folglich

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi .$$

b' und b'' sind wieder zwei Grenzlagen, und zwar ist für b' $\sphericalangle\ \varphi = 45^\circ$ und für b'' $\sphericalangle\ \varphi = 0^\circ$; also die Gesammtwirkung aller von den reflektirenden Dampfbläschen der Atmosphäre nach dem Punkt c gerichteten Reflexstrahlen ausgedrückt durch

$$H_c = \frac{F}{2} \cdot \int_{45^0}^{0^0} \cos\varphi \,.\, \cos . \, 2\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

also mit Rücksicht auf die Grenzen

$$H_c = \frac{F}{2} \left(\sin\varphi - \frac{2}{3} \sin\varphi^3 \right)_{\varphi = 45}^{\varphi = 0} \quad . \quad . \quad 2)$$

setzt man die Gegenwerthe für φ ein, so ist da $\sin 0^\circ = 0$ und $\sin 45^\circ = 0{,}7071$ ist.

$$H_c = \frac{F}{2} \left(0{,}7071 - \frac{2}{3} . \, 0{,}7071^3 \right)$$
$$= 0{,}2357 \,.\, F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Auch hier werden wir wieder, wie in §. 12, für die Helligkeit des Punktes c das Doppelte von 0,2357 F zu nehmen haben, weil die innerhalb des Raumes g c b'' liegenden reflektirenden Kügelchen den Punkt c in gleicher Weise erhellen, wie die innerhalb des Raumes b'' c b' liegenden und erhalten demnach als grösste Helligkeit auf der Selbschattenseite der Kugel, d. h. für die Helligkeit des hellsten Punktes c

$$H_c = 0{,}4714 \,.\, F \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

§. 15.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen die durch den atmosphärischen Reflex erzeugte Helligkeit in den hellsten Punkten a und c und in der Schattengrenze nachgewiesen haben, soll noch gezeigt werden, wie diese Helligkeit für jeden beliebigen, z. B. für den Punkt e der Kugel berechnet werden kann.

Der von den Kügelchen b (Fig. 14. Taf. II.) ausgehende Reflexstrahl b e hat, wie bekannt, eine Intensität $= \frac{F}{2} . \cos\varphi$; er trifft die Kugel unter dem Einfallswinkel α. Die Lage des Punktes e sei gegeben durch die auf dem Bogen gemessene Entfernung e c oder durch den Winkel β.

Es ist nun die Helligkeit des Punktes e, welche durch den Reflexstrahl b e hervorgebracht wird

$$H_e = \frac{F}{2} . \cos\varphi \,.\, \cos\alpha$$

Ist b′b″ Tangente im Punkt e, so ist offenbar

$$< 2\,\varphi + \varepsilon + \delta + (\gamma + \xi) = 360^0$$

es ist aber

$$< \varepsilon = 90^0;\ < \delta = 90 - \beta;\ < \gamma + \xi = 180 - \alpha$$

folglich

$$2\,\varphi + 90 + 90 - \beta + 180 - \alpha = 360^0$$

oder

$$\alpha = 2\,\varphi - \beta$$

daher

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \cos\varphi \cdot \cos(2\,\varphi - \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und die Gesammtwirkung aller auf den Punkt e treffenden Reflexstrahlen

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \int \cos\varphi \cdot \cos(2\,\varphi - \beta) \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Offenbar sind die beiden Kügelchen b′ und b″ in einer solchen Lage, dass die von ihnen ausgehenden Reflexstrahlen die Kugel in e eben noch berühren; die Linie b′b″ ist daher eine Grenzlinie, d. h. alle Kügelchen unterhalb derselben als: b′, b″, b‴, b^{IV} .... senden Reflexstrahlen nach dem Punkt e, während alle oberhalb liegenden z. B. b^{VI} keine Reflexstrahlen nach e mehr senden können.

Es ist

$$< \varphi' = \frac{\beta + 90}{2};\ \varphi'' = \frac{\beta - 90}{2} \text{ und } \varphi''' = \frac{\beta}{2}$$

da ck // l‴; hat also der Winkel φ die Grösse φ' und φ'' erreicht, so ist das Integral (Gleichung 2) an seinen Grenzen angekommen.

Der unterhalb b′b″ liegende Raum wird durch kb‴ in zwei Theile getheilt; die Wirkung der Reflexstrahlen, welche von den innerhalb des Raumes b′eb‴ liegenden Kügelchen ausgehen, ist nur ausgedrückt durch

$$\frac{F}{2} \cdot \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta + 90}{2}} \cos\varphi \cdot \cos(2\,\varphi - \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Desgleichen ist die Reflexwirkung der innerhalb des Raumes b‴eb″ liegenden Kügelchen ausgedrückt durch

$$\frac{F}{2} \cdot \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta - 90}{2}} \cos\varphi \cdot \cos(2\,\varphi - \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

folglich die Gesammtwirkung aller auf den Punkt e wirkenden Reflexstrahlen

$$H_e = \frac{F}{2} \cdot \left[\int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta + 90}{2}} \cos\varphi \,.\, \cos(2\varphi - \beta) + \int_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta - 90}{2}} \cos\varphi \,.\, \cos(2\varphi - \beta) \right] \quad 3)$$

Der Ausdruck $\cos\varphi \,.\, \cos(2\varphi - \beta)$ lässt sich nun auf die Form bringen $\cos\varphi \,.\, \cos(2\varphi - \beta) = \cos\beta \,.\, \cos\varphi - 2 \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\varphi^2 + 2\sin\beta \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi^2.$ und es ist daher

$$\int \cos\beta \,.\, \cos(2\varphi - \beta) = \cos\beta \,.\, \sin\varphi - 2 \,.\, \cos\beta \,.\, \frac{\sin\varphi^3}{3} - 2 \,.\, \sin\beta \,.\, \frac{\cos\varphi^3}{3}$$

$$= \cos\beta \,.\, \sin\varphi - \frac{2}{3}(\cos\beta \,.\, \sin\varphi^3 - \sin\beta \,.\, \cos\varphi^3.)$$

folglich:

$$H_e = \frac{F}{2}\left[\cos\beta \,.\, \sin\varphi - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \sin\varphi^3 - \sin\beta \,.\, \cos\varphi^3 \right) \right]_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta + 90}{2}}$$

$$+ \frac{F}{2}\left[\cos\beta \sin\varphi - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \,.\, \sin\varphi^3 - \sin\beta \cos\varphi^3 \right) \right]_{\varphi = \frac{\beta}{2}}^{\varphi = \frac{\beta - 90}{2}}$$

Setzt man die dem Winkel φ entsprechenden Grenzwerthe ein, so erhält man:

$$H_e = \frac{F}{2}\Big\{ \left[\cos\beta \,.\, \sin\frac{\beta}{2} - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \left(\sin\frac{\beta}{2} \right)^3 - \sin\beta \left(\cos\frac{\beta}{2} \right)^3 \right) \right] -$$

$$- \left[\cos \,.\, \beta \sin\frac{\beta + 90}{2} - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \left(\sin\frac{\beta + 90}{2} \right)^3 - \sin\beta \left(\cos\frac{\beta + 90}{2} \right)^3 \right) \right] \Big\}$$

$$+ \frac{F}{2}\Big\{ \left[\cos\beta \,.\, \sin\frac{\beta}{2} - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \left(\sin\frac{\beta}{2} \right)^3 - \sin\beta \left(\cos\frac{\beta}{2} \right)^3 \right) \right] -$$

$$- \left[\cos\beta \,.\, \sin\frac{\beta - 90}{2} - \frac{2}{3}\left(\cos\beta \left(\sin\frac{\beta - 90}{2} \right)^3 - \sin\beta \left(\cos\frac{\beta - 90}{2} \right)^3 \right) \right]$$

oder

$$H_e = \frac{F}{2}\Big\{ 2 \,.\, \left[\cos\beta \left(\sin\frac{\beta}{2} - \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\beta}{2} \right)^3 \right) + \frac{2}{3}\sin\beta \left(\cos\frac{\beta}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \cos\beta \left(\sin\frac{90 + \beta}{2} + \sin\frac{\beta - 90}{2} - \frac{2}{3}\left(\sin\frac{90 + \beta}{2} \right)^3 + \left(\sin\frac{\beta - 90}{2} \right)^3 \right) \right]$$

$$- \frac{2}{3}\sin\beta \left[\cos\left(\frac{90 + \beta}{2} \right)^3 + \left(\cos\frac{\beta - 90}{2} \right)^3 \right] \Big\} \quad 5)$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann nun für jeden beliebigen Punkt der Kugel die durch das atmosphärische Reflexlicht erzeugte Helligkeit berechnet werden. So wird man z. B. die oben in §§. 12, 13 und 14 berechneten Reflexhellen a und c der hellsten Punkte und der Schattengrenze b d (Fig. 15. Taf. II.) aus obiger Gleichung erhalten, wenn man $\beta = 0^0$, 90^0 oder 180^0 setzt.

1) Reflexhelligkeit im Punkt c; $\beta = 0$

$$H_c = \frac{F}{2}\left[\left[0{,}7071 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}3534\right] - \left[\frac{2}{3} \cdot 0{,}3534 - 0{,}7071\right]\right]$$
$$= 0{,}4714 \, . \, F \quad (\text{s. §. 12.})$$

2) Reflexhelligkeit der Schattengrenze b d; $\beta = 90^0$

$$H_{bd} = \frac{F}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}3534 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}3534 + \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \, . \, F \quad (\text{s. §. 13.})$$

3) Reflexhelligkeit im Punkt a; $\beta = 180$.

$$H_a = \frac{F}{2} \, . \, 2\left(-\frac{1}{3} + 0{,}7071 - \frac{2}{3} \, 0{,}3534\right)$$
$$= 0{,}1381 \, . \, F \quad (\text{s. §. 14.})$$

§. 16.

Wir haben oben bereits erwähnt, das der atmosphärische Reflex nicht ganz die Intensität $f = \frac{F}{2} \, . \cos \varphi$ haben kann, aus den dort angeführten Gründen. Wir werden demnach in den Gleichungen der vorhergehenden Paragraphen für F einen etwas kleineren Coefficienten, den wir mit f bezeichnen wollen, substituiren müssen. Das Verhältniss von f zu F wird jedoch kaum zu bestimmen möglich sein, wenigstens ist es bis jetzt noch nicht gelungen, dasselbe festzustellen. Nehmen wir an, dass derjenige Theil des Lichtes, welcher die atmosphärischen Wasseratome theils absorbiren, theils durch sich hindurchlassen, dem Theil gleich ist, welchen sie reflektiren, so ist $f = \frac{F}{2}$ und daher, wenn die Helligkeit des hellsten Punktes a im Licht = 1 gesetzt wird, die Reflexhelligkeit im hellsten Punkt a, sofern er sich im Schlagschatten befindet

$$H_a = 0{,}0696 \text{ (oder ungefähr} = {}^1/_{14})$$

in der Schattengrenze b d

$$H_{bd} = 0{,}1666 \text{ (oder ungefähr} = \tfrac{1}{6})$$

im hellsten Punkt c des Selbstschattens

$$H_c = 0{,}2357 \text{ (oder ungefähr} = \tfrac{1}{4}.)$$

§. 17.

Nachdem wir oben (§. 5.) nachgewiesen haben, dass die Abstände der Helligkeitscurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt den Helligkeiten einfach proportional sind, dass demnach die Differenzen dieser Abstände für gleiche Hellendifferenzen gleich sind; nachdem wir ferner die Reflexhelligkeit für die hellsten Punkte im Licht- und Selbstschatten und im Schlagschatten festgestellt haben, wird es sich nun darum handeln, zu bestimmen, wie viel Töne die Kugel in den einzelnen Helligkeitscurven erhalten muss, damit sie die entsprechenden Dunkelheiten und somit die geeignete Schattirung erhält.

Die Helligkeiten sind (s. Fig. 16. Taf. II.)

im Punkt $a' = 1$
in $bd = \frac{1}{6}$
im Punkt $c = \frac{1}{4}$
im Punkt $a = \frac{1}{14}$.

Da der Punkt a die geringste Helligkeit, also die grösste Dunkelheit hat, so muss er auch, wenn wir überhaupt grössere oder geringere Dunkelheiten durch mehr oder weniger häufigen Auftrag eines und desselben Tuschtons hervorbringen, die grösste Anzahl von Tönen erhalten. Nehmen wir an, dass die grösste Dunkelheit im Schlagschatten (also im Punkt a) durch 14 Töne erreicht wird, und dass die grösste Helligkeit (also im Punkt a') die des weissen Papieres sei, so erhält offenbar der Punkt c 4 Töne, bd 6 und a' keinen Ton.

Ist der Halbmesser ak der Kugel durch die Ebenen + 1, + 2, + 3 in 4 gleiche Theile getheilt, so nimmt die Helligkeit in den dadurch auf der Kugeloberfläche erzeugten Schnittkreisen von a' bis zu k um je $\frac{1}{4}$ ab. Da nun aber der Punkt a' 0 Ton und + 4 oder die Schattengrenze bd 6 Töne erhält, so muss offenbar

der Kreis + 1 $\frac{1}{4} \cdot 6 = 1\frac{1}{2}$ Töne
„ „ + 2 $\frac{2}{4} \cdot 6 = 3$ „
„ „ + 3 $\frac{3}{4} \cdot 6 = 4\frac{1}{2}$ „
„ „ + 4 $\frac{4}{4} \cdot 6 = 6$ „

erhalten.

Aehnlich verhält sichs im Körperschatten der Kugel. Da der Punkt c 4 Töne, die Schattengrenze bd 6 Töne erhält, so muss

der Kreis — 1	$4 + \frac{1}{4}(6-4) = 4\frac{1}{2}$	Töne
„ „ — 2	$4 + \frac{2}{4}(6-4) = 5$	„
„ „ — 3	$4 + \frac{3}{4}(6-4) = 5\frac{1}{2}$	„
„ „ — 4	$4 + \frac{4}{4}(6-4) = 6$	„

erhalten.

Ferner erhält die Kugel in b d einen 6fachen, in a einen 14fachen Tonauftrag, folglich werden die Tonaufträge im Schlagschatten folgende sein:

im Kreis + 4	6	Töne
„ „ + 3	$6 + \frac{1}{4}(14-6) = 8$	„
„ „ + 2	$6 + \frac{2}{4}(14-6) = 10$	„
„ „ + 1	$6 + \frac{3}{4}(14-6) = 12$	„
im Punkt a	$6 + \frac{6}{4}(14-6) = 14$	„

Da jedoch Bruchtheile von Tönen nicht wohl ausführbar sind, so wird man besser obige Zahlen mit 2 multipliciren und einen Grundton von halber Stärke des vorigen anwenden; demzufolge würden dann die Tonaufträge in den Hellencurven nachstehende sein:

im Licht . . .	in a'	0	Ton
	„ + 1	3	Töne
	„ + 2	6	„
	„ + 3	9	„
	„ + 4	12	„
im Selbstschatten	„ + 4	12	„
	„ — 3	11	„
	„ — 2	10	„
	„ — 1	9	„
	„ — c	8	„
im Schlagschatten	„ + 4	12	„
	„ + 3	16	„
	„ + 2	20	„
	„ + 1	24	„
	„ + a	28	„

Dabei setzen wir allerdings voraus, dass 0, 1, 2, 3, 4 .... nmaliger Auftrag d e s s e l b e n Tuschtones den Helligkeiten $\frac{n}{n}$, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{u}$, $\frac{n-4}{n}$ . . . . $\frac{3}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{0}{n}$ entspreche. Es ist dies jedoch nicht der Fall, wie nachstehende Untersuchung zeigen wird.

Ueber die durch mehrfachen Auftrag eines gleich starken Tones erzeugte Helligkeit.

§. 18.

a) Nach Leroy (Stereotomie §. 230) ist „das Gesetz, durch welches das Verhältniss zwischen den Werthen der Helligkeiten c und der Zahl der Tuschlagen n, durch welche jene Helligkeiten erzeugt werden, bestimmt wird, dasjenige, welches zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen für eine nur wenig unter der Einheit genommene Grundzahl besteht."

b) Nach den vom Verfasser selbst angestellten Versuchen ist dieses Verhältniss zwischen c und n sehr nahe ausgedrückt durch die Gleichung:

$$c = \left(\frac{1}{1 + a \, . \, n}\right)^2$$

worin der Coefficient a von der Stärke des einfachen Tones (Grundtones) abhängt, mit derselben in einfachem Verhältniss wächst und für einen Grundton, wie er bei vorliegender Methode gewöhnlich zur Anwendung kommt, zwischen 0,1 und 0,05 liegen mag.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt. Es wurde von 6 ca. 2□ Dm. grossen, mit weissem Papier überzogenen Täfelchen das erste einmal, das zweite zweimal, das dritte dreimal.... das sechste sechsmal mit dem gleichen Tuschton bemalt und dann nach einander einem Licht in der Entfernung von 0,572 M. gegenübergestellt; alsdann ein zweites mit weissem Papier beklebtes Täfelchen demselben Licht in solche Entfernung gegenüber gebracht, bis es mit den ersteren jedesmal gleiche Dunkelheit zeigte; diese Entfernungen sodann gemessen und notirt.

Bezeichnen wir das weisse Täfelchen mit T_0 (Fig. 17. Taf. II.), die andern der Reihe nach mit T_1, T_2, T_3.... T_6 die entsprechende Helligkeiten mit H_1, H_2, H_3.... H_6 und die Entfernungen, welche man dem Täfelchen T_0 geben musste, dass es mit den andern gleiche Dunkelheit zeigte, mit e_1, e_2, e_3.... e_6 und die Entfernung, in welcher die Täfelchen T_1, T_2, T_3.... T_6 aufgestellt wurden mit e (= 0,572 M.), so ist offenbar z. B. für T_5

$$H_5 : H_0 = \frac{1}{e_5^2} : \frac{1}{e^2}$$
$$= e^2 : e_5^2$$

folglich

$$H_5 = H_0 \, . \, \frac{e^2}{e_5^2}$$

oder wenn man die Helligkeit $H_0 = 1$ setzt:

$$H_5 = \frac{e^2}{e_5^2} = \left(\frac{e}{e_5}\right)^2$$

ebenso ist

$$H_1 = \left(\frac{e}{e_1}\right)^2$$

$$H_2 = \left(\frac{e}{e_2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$H_6 = \left(\frac{e}{e_6}\right)^2$$

Die Versuche lieferten nun nachstehende Resultate:

für T_0	betrug	die	Entfernung	$e = 0{,}572$	Met.
„ T_1	„	„	„	$e_1 = 0{,}615$	„
„ T_2	„	„	„	$e_2 = 0{,}658$	„
„ T_3	„	„	„	$e_3 = 0{,}701$	„
„ T_4	„	„	„	$e_4 = 0{,}744$	„
„ T_5	„	„	„	$e_5 = 0{,}787$	„
„ T_6	„	„	„	$e_6 = 0{,}830$	„

Vergleicht man die Werthe von e mit einander, so findet man, dass die Differenzen δ derselben gleich sind; es ist nemlich $e_1 - e = 0{,}043 = \delta$; $e_2 - e_1 = 0{,}043$; $e_3 - e_2 = 0{,}043$ u. s. f., folglich $e_1 = e + \delta$; $e_2 = e + 2\,\delta$; $e_3 = e + 3\,.\,\delta \ldots\ldots e_6 = e + 6\,\delta$, woraus man schliessen muss, dass überhaupt $e_n = e + n\,\delta$ als allgemeines Glied dieser Reihe (arithmetischen Progression) zu betrachten ist, und da nothwendig $H_n = \left(\frac{e}{e_n}\right)^2$ oder, wenn wir c statt H_n setzen:

$$c = \left(\frac{e}{e + n\,.\,\delta}\right)^2$$

ist, so erhalten wir, wenn wir mit e dividiren

$$c = \left(\frac{1}{1 + n\,.\,\frac{\delta}{e}}\right)^2$$

Nun ist aber $\delta = 0{,}043$ und $e = 0{,}572$, folglich

$$c = \left(\frac{1}{1 + n\,.\,\frac{0{,}043}{0{,}572}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + 0{,}0752\,.\,n}\right) = \left(\frac{1}{1 + a\,n}\right)^2 \quad . \quad . \quad 1)$$

oder, wenn wir für eine gegebene Helligkeit c die Anzahl Töne suchen wollen, erhalten wir aus Gleichung 1)

$$n = 13{,}3 \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Aus der Gleichung 1) kann nun für jede beliebige Anzahl von Tönen (n) die entsprechende Helligkeit von c berechnet werden. Man findet z. B.

für n = 0	ist c = 1	für n = 13	ist c = 0,256
„ n = 1	„ c = 0,866	„ n = 14	„ c = 0,237
„ n = 2	„ c = 0,755	„ n = 15	„ c = 0,221
„ n = 3	„ c = 0,666	„ n = 16	„ c = 0,206
„ n = 4	„ c = 0,591	„ n = 17	„ c = 0,193
„ n = 5	„ c = 0,528	„ n = 18	„ c = 0,181
„ n = 6	„ c = 0,475	„ n = 19	„ c = 0,169
„ n = 7	„ c = 0,429	„ n = 20	„ c = 0,160
„ n = 8	„ c = 0,389	„ n = 30	„ c = 0,094
„ n = 9	„ c = 0,355	„ n = 40	„ c = 0,062
„ n = 10	„ c = 0,326	„ n = 50	„ c = 0,044
„ n = 11	„ c = 0,299	„ n = 100	„ c = 0,014
„ n = 12	„ c = 0,276	„ n = ∞	„ c = 0 *)

Aus der Vergleichung der Werthe von c ergibt sich, dass die Abnahme der Helligkeit oder die Zunahme der Dunkelheit durchaus nicht gleichmässig ist, dass die Dunkelheit nicht in einfachem Verhältniss mit den Tonaufträgen zunimmt, dass die Wirkung je eines weiteren Tones um so schwächer ist, je grösser n genommen wird, d. h. dass, wenn man auf eine sehr helle und auf eine verhältnissmässig dunkle Fläche einen Ton von gleicher Stärke aufträgt, die dadurch erzeugte Abnahme der Helligkeit auf der hellen Fläche ungleich grösser ist als auf der dunkleren Fläche.

Zusatz 1). Wir haben schon oben bemerkt, dass der Werth von δ also auch der des Coefficienten a in der Gleichung 1) von der Stärke des Grundtones abhängt. Aus der obigen Zusammenstellung der Werthe

*) Nach dem oben sub a von Leroy aufgestellten Gesetz ist das Verhältniss zwischen n und c folgendes:

n = 0,000	c = 1	n = 6,932	c = 0,5
n = 1,054	c = 0,9	n = 9,163	c = 0,4
n = 2,232	c = 0,8	n = 12,040	c = 0,3
n = 3,567	c = 0,7	n = 16,095	c = 0,2
n = 5,108	c = 0,6	n = 23,026	c = 0,1

von c ist ersichtlich, dass der einmalige Auftrag des Grundtones die Helligkeit 0,866 oder die Dunkelheit $\delta = 1 - 0,866 = 0,134$ hervorbrachte, dieser Werth von δ bezeichnet offenbar die Intensität oder die Stärke des Grundtons.*)

Würde man diese Tonstärke $\delta = 0,1$ anstatt 0,134 nehmen, so müsste offenbar $c_1 = 1 - 0,1 = 0,9$ und der Coefficient $a = 0,054$ werden. Denn aus

$$c = 0,9 = \frac{1}{(1 + n \cdot a)^2}$$

oder weil für den vorliegenden Fall $n = 1$ ist,

$$0,9 = \frac{1}{(1 + a)^2}$$

ergibt sich unmittelbar

$$a = \frac{1}{\sqrt{0,9}} - 1 = 0,054.$$

Die Gleichung 1) nimmt daher für diesen Fall die Form an

$$c = \frac{1}{(1 + 0,054 \cdot n)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1^a)$$

Dieselbe liefert für $n = 0$	$c = 1$	für $n = 5$	$c = 0,621$
$n = 1$	$c = 0,9$	$n = 6$	$c = 0,570$
$n = 2$	$c = 0,814$	$n = 7$	$c = 0,527$
$n = 3$	$c = 0,741$	$n = 8$	$c = 0,488$
$n = 4$	$c = 0,676$	$n = 9$	$c = 0,453$
		$n = 10$	$c = 0,422$

Da der Coefficient $a = \frac{\delta}{e}$ oder $\delta = a \cdot e$, so ist da $a = 0,054$ und $e = 0,572$; $\delta = 0,054 \cdot 0,572 = 0,031$ Met.

Zusatz 2. Würde man den Coefficienten $a = 0,01$ setzen, so erhielte man für δ den Werth $\delta = a \cdot e = 0,01 \cdot 0,572 = 0,0057$ Met. und demnach für c die Gleichung:

$$c = \frac{1}{(1 + 0,0057 \cdot n)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1^b)$$

---

*) Der Werth von δ kann auch unmittelbar aus Gleichung 1) berechnet werden, denn die durch einmaligen Tonauftrag erzeugte Helligkeit ist

$$c = \frac{1}{(1 + a)^2} \quad (\text{da } n = 1)$$

folglich

$$\delta = 1 - c = 1 - \frac{1}{(1 + a)^2}$$

Dieselbe liefert:

für $n = 1$ $c = 0{,}980$	für $n = 6$ $c = 0{,}892$
„ $n = 2$ $c = 0{,}962$	„ $n = 7$ $c = 0{,}875$
„ $n = 3$ $c = 0{,}944$	„ $n = 8$ $c = 0{,}859$
„ $n = 4$ $c = 0{,}926$	„ $n = 9$ $c = 0{,}843$
„ $n = 5$ $c = 0{,}909$	„ $n = 10$ $c = 0{,}827$

Die durch die Tonaufträge erzeugten Helligkeiten c nehmen im vorliegenden Fall (wenigstens für die ersten 10 Tonaufträge) fast ganz gleichmässig ab, wie die Differenzen der Werthe von c zeigen; welche durchschnittlich $= 0{,}017$ ist.

Zusatz 3. Die aus Gleichung 1 §. 18 berechneten Werthe von c ergaben eine Tonstärke . . . . . . $\delta = 0{,}1344 \left(= \frac{1}{7}\right)$

Gleichung 1^a Zusatz 1. . . . . . $\delta = 0{,}1000 \left(= \frac{1}{10}\right)$

Gleichung 1^b Zusatz 2. $\delta = 1 - 0{,}980 = 0{,}0200 \left(= \frac{1}{50}\right)$

Die zuletzt angenomme Tonstärke war also die schwächste, ergab aber eine mit den Tonaufträgen fast ganz gleichmässige Abnahme der Helligkeiten. Daraus geht hervor, dass **die Helligkeiten mit den Tonaufträgen um so gleichmässiger abnehmen, je schwächer die verwendete Tonstärke und je geringer die Anzahl der Tonaufträge ist.**

§. 19.

Trägt man die der Gleichung 1 §. 18 genügenden Werthe von c und n als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf (Fig. 18. Taf. II.) und zeichnet die sich hieraus ergebende Curve m n o p . . ., so gibt dieselbe ein anschauliches Bild von der durch mehrfachen Tonauftrag erzeugten ungleichförmigen Abnahme der Helligkeiten, gibt aber auch, wenn man bei der praktischen Anwendung dieser Theorie jene ungleichförmige Wirkung berücksichtigen wollte, ein einfaches Hilfsmittel an die Hand, die Lage derjenigen Helligkeitscurven auf der Kugel zu bestimmen, in welchen die Töne in einfacher Progression aufgetragen werden dürfen.

Wir haben in §. 16 die Helligkeit der Schattengrenze zu $1/6$, die des hellsten Punktes im Selbstschatten zu $1/4$, die des dunkelsten Punktes im Schlagschatten zu $1/14$, wenn die des hellsten Punktes im Licht $= 1$ ist, festgestellt; diese Helligkeiten entsprechen aber, wie sich aus der Gleichung 1 §. 18 leicht berechnen oder aus den dort berechneten Werthen von c unmittelbar ablesen lässt, folgenden Tonaufträgen:

Die Helligkeit $^1/_6$ wird erzeugt durch 20 Töne
„ „ $^1/_4$ „ „ „ 13 „
„ „ $^1/_{14}$ „ „ „ 41 „
„ „ 1 „ „ „ 0 „

a) Da die Ordinate ($c = K$ 20) (Fig. 18. Taf. II.) die Helligkeit der Schattengrenze und $PR = 1$ die des hellsten Punktes a' der Kugel repräsentirt, so verlegen wir die n-Axe nach eK, beschreiben mit KA' den Kreis A'B und betrachten A'BK als einen Kugelquadranten. Um nun auf demselben die Lage von Curven gleicher Helligkeit zu erhalten, theilen wir eK in 4, 6, 8 ... gleiche Theile, je nachdem wir 4, 6, 8 ... Hellencurven auf der Kugel haben wollen (im vorliegenden Beispiel deren 4) ziehen die den Theilpunkten entsprechenden Ordinaten m_0m, n_0n, o_0o ... und durch die Schnittpunkte m, n, o ... der Curven die Linien mm'', nn'', oo'' ... so sind m'm'', n'n'', o'o'' Curven gleicher Helligkeit der Art, dass auf denselben die Töne in einfacher arithmetischer Progression aufgetragen werden dürfen; es erhält z. B. die Kugel im Kreis m'm'' 5 Töne, in n'n'' 10, in o'o'' 15 und in KB 20 Töne.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens gründet sich auf den früher nachgewiesenen Satz, dass die Entfernungen der Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt den entsprechenden Helligkeiten einfach proportional sind. Die durch die Ordinaten mm_0, nn_0, oo_0 ... repräsentirten Helligkeiten sind daher zugleich die Entfernungen der betreffenden Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt. Bezeichnet man diese mit x, so ist offenbar

$$x = \frac{1}{(1 + a\,n)^2} - 0{,}166$$

in welcher Gleichung für n jede ganze Zahl von 0 bis 20 gesetzt werden kann.

Es wird aber auch möglich sein, jene 20 Töne durch eine beliebige andere Anzahl von Tönen, sofern man nur den Grundton entsprechend wählt, zu ersetzen. Nehmen wir z. B. 4 Töne an, so muss offenbar der Grundton 5 mal stärker als der ursprüngliche gemacht werden, damit nach 4maligem Auftrag eine Stärke von $4 . 5 = 20$ Tönen erreicht wird. Der Grundton ist daher für diesen Fall $^1/_5 . 20$; bei zweimaligem Auftrag $^2/_5 . 20$, bei dreimaligem Auftrag $^3/_5 . 20$ oder es ist allgemein $\frac{p}{q} . 20 = n$ zu setzen. Dieser Werth in obige Gleichheit gesetzt, gibt:

$$x = \frac{1}{\left(1 + a . \frac{p}{q} . 20\right)^2} - 0{,}1666$$

oder da $a = 0{,}0752$

$$x = \frac{1}{\left(1 + 1{,}504 . \frac{p}{q}\right)^2} - 0{,}1666 \quad . \quad 1)$$

worin für $\frac{p}{q}$ nach einander die Werthe 0, $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^4/_4$ zu setzen sind, falls man auf der Kugel 4 Helligkeitscurven annimmt.

Der Maassstab für die so erhaltene Länge x ist der Kugelhalbmesser r; für $\frac{p}{q} = 0$ gibt die Gleichung 1)

$$x = 0{,}83 = r.$$

Sollen aber die Werthe von x auf den Radius r = 1 bezogen werden, so sind dieselben mit $\frac{1}{0{,}83} = 1{,}205$ zu multipliciren, folglich ist:

$$x = \frac{1{,}205}{\left(1 + 1{,}504\,\frac{p}{q}\right)^2} - 0{,}2007 \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

wofür die vereinfachte Gleichung in den meisten Fällen genügen mag:

$$x = \frac{1{,}2}{\left(1 + 1{,}5\,.\,\frac{p}{q}\right)^2} - 0{,}2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{Ia.}$$

b) Um die Lage der Lichtcurven auch auf der Selbstschattenseite zu finden, verfahren wir ganz ähnlich. Für die Schattengrenze ist die Helligkeit c = 0,166, ausgedrückt durch 20 Töne, für den hellsten Punkt im Selbstschatten c = 0,256, ausgedrückt durch 13 Töne. Die entsprechenden Ordinaten sind K 20 und i l (denn P l ist = 13 = n). Theilt man nun wieder I K in so viele gleiche Theile, als man Lichtcurven haben will (z. B. in 4), zieht die entsprechenden Ordinaten, beschreibt ferner mit K c = I i den Kreisbogen C D, so hat man nur durch die Punkte p, q, r .... mit P Q parallele Linien zu ziehen, alsdann sind, wenn wir K C D als einen Kugelquadranten betrachten, die Schnitte der letztgenannten Linien die Projektionen der verlangten Helligkeitskreise.

Wollte man auch für diesen Fall die Entfernungen x der Curven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt durch Rechnung finden, so hätte man den Ursprung der Coordinaten in den Punkt J zu verlegen; die Coordinaten dieses Punktes sind n = 13 und c = 0,166, folglich

$$x = \frac{1}{(1 + 0{,}0752\,(n + 13))^2} - 0{,}1666$$

Da die Schattengrenze 20, der hellste Selbstschattenpunkt 13 Töne erhält, können die zwischen 20 und 13 liegenden 7 Töne durch eine andere beliebige Anzahl gleicher Töne ersetzt werden, und es ist daher $\frac{p}{q}\,.\,7$ statt n in obige Gleichung zu setzen; folglich ist

$$x = \frac{1}{\left(1 + 0{,}0752\left(7\,.\,\frac{p}{q} + 13\right)\right)^2} - 0{,}1666$$

oder

$$x = \frac{1}{\left(1{,}9776 + 0{,}5264\,\frac{p}{q}\right)^2} - 0{,}1666 \quad . \quad . \quad 2)$$

Der Radius der Kugel, welcher für diese Werthe von x die Maasseinheit bildet, ist offenbar $r = KC = 0{,}256 - 0{,}166 = 0{,}09$; sollen aber die Werthe von x auf den Radius $r = 1$ bezogen werden, so sind dieselben mit $\frac{1}{0{,}09} = 11{,}11$ zu multipliciren und Gleichung 2 erhält sodann die Form

$$x = \frac{11{,}11}{\left(1{,}9776 + 0{,}5264\,.\,\frac{p}{q}\right)^2} - 1{,}851 \quad . \quad \text{II.}$$

oder vereinfacht

$$x = \frac{11}{\left(2 + 0{,}5\,.\,\frac{p}{q}\right)^2} - 1{,}75. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IIa.}$$

c) Befindet sich der hellste Punkt der Kugel im Schlagschatten, so ist seine Helligkeit = 0,069 mit 41 Tönen, die der Schattengrenze ist 0,166 mit 20 Tönen. Trägt man auch hier wieder die entsprechenden Ordinaten K 20 und A h auf, zieht A g, theilt diese Linie in so viele Theile, als man Helligkeitscurven haben will, und zieht durch s, t, u .... Parallelen mit A g, so erhält man auf AK′ die verlangte Theilung, oder auf der Lichtseite der Kugel, sofern sie sich im Schlagschatten befindet, die entsprechende Theilung.

Verlegen wir den Ursprung des Coordinatensystems in den Punkt g, so ist:

$$x = \frac{1}{\left(1 + 0{,}0752\left(21\,\frac{p}{q} + 20\right)\right)^2} - 0{,}069$$

Dieser Werth von x entspricht aber den Längen ss_0, tt_0 . . . und gibt also die Entfernung der Hellencurven vom hellsten Punkt A der Kugel; um auch hier die Entfernungen vom Kugelmittelpunkt, d. h. die Längen ss′, tt′ . . . . zu erhalten, hat man jene Werthe von gK abzuziehen; gK aber ist $= K20 - Ah = 0{,}1666 - 0{,}069 = 0{,}0976$, folglich ist:

$$x = 0{,}0976 - \left[\frac{1}{\left(1 + 0{,}0752\left(21\,\frac{p}{q} + 20\right)\right)^2} - 0{,}069\right]$$

$$= 0{,}1666 - \frac{1}{\left(1{,}5792\,\frac{p}{q} + 2{,}504\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Der Radius der Kugel, welcher für diese Werthe x die Maasseinheit bildet, ist $= AK' = gK = 0{,}1666 - 0{,}069 = 0{,}0976$; sollen sie aber auf den Radius $r = 1$ bezogen werden, so müssen wir jene Werthe mit $\frac{1}{0{,}0976} = 10{,}246$ multipliciren und erhalten demnach die Gleichung

$$x = 1{,}707 - \frac{10{,}246}{\left(1{,}579 \cdot \frac{p}{q} + 2{,}504\right)^2} \quad \ldots \quad \text{III.}$$

oder vereinfacht:

$$x = 1{,}6 - \frac{10}{\left(2{,}5 + 1{,}5\,\frac{p}{q}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{IIIa.}$$

Zusatz. Soll nun die Kugel (Fig. 19. Taf. II.) unter Zugrundlegung von 4 Hellencurven schattirt werden, so finden wir die Entfernungen x der Curven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt, die selbstverständlich auf dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius aufzutragen sind, wenn wir in obige Gleichungen I, II, III für $\frac{p}{q}$ nach einander die Werthe 0, $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^4/_4$ einsetzen. Dieselben ergeben

auf der Lichtseite . . .	für $\frac{p}{q} = 0$	die Entfernung	$x = 1$
	„ $- = {}^1/_8$	„ „	„ $= 0{,}851$
	„ $- = {}^1/_4$	„ „	„ $= 0{,}438$
	„ $- = {}^2/_4$	„ „	„ $= 0{,}2$
	„ $- = {}^3/_4$	„ „	„ $= 0{,}066$
	„ $- = {}^4/_4$	„ „	„ $= 0$
auf der Selbstschattenseite	„ $- = 0$	„ „	„ $= 1$
	„ $- = {}^1/_4$	„ „	„ $= 0{,}69$
	„ $- = {}^2/_4$	„ „	„ $= 0{,}42$
	„ $- = {}^3/_4$	„ „	„ $= 0{,}2$
	„ $- = {}^4/_4$	„ „	„ $= 0$
im Schlagschatten . . .	„ $- = 0$	„ „	„ $= 0$
	„ $- = {}^1/_4$	„ „	„ $= 0{,}387$
	„ $- = {}^2/_4$	„ „	„ $= 0{,}65$
	„ $- = {}^3/_4$	„ „	„ $= 0{,}84$
	„ $- = {}^4/_4$	„ „	„ $= 1$

Ueber den Einfluss der Intensität des Lichtes auf die Lage der Hellencurven.

§. 20.

Nach Gleichung 2 §. 18 ist: $n = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1\right)$. Der Werth von n ist demnach abhängig von dem Coefficienten $\frac{1}{a}$, und zwar der Art, dass n um so gröser wird, je kleiner a genommen wird und umgekehrt. Nun ist aber $a = \frac{\delta}{e}$, also $\frac{1}{a} = \frac{e}{\delta}$, e aber eine constante Grösse, folglich ist a resp. n abhängig von δ; d. h. a nimmt proportional mit δ zu oder ab, während n umgekehrt ab- oder zunimmt, oder die Anzahl der Tonaufträge ist um so kleiner, je grösser die Intensität des Grundtones ist.

Da n nur von dem Coefficienten $\frac{1}{a}$ abhängig ist, so müssen offenbar alle Curven, welche der Gleichung $n = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} - 1\right)$ entsprechen, einander ähnlich sein.

Da nun aber a von δ und δ von der Intensität des Grundtones abhängt, so müssen auch die Werthe von x für verschiedene Intensitäten des Grundtons einander ähnlich sein, d. h. die Theilung des Kugelradius ist immer die nemliche, die Intensität oder Stärke des Grundtones mag sein, welche sie will.

Zusatz. Aus den in §. 18 beschriebenen Versuchen geht hervor, dass, wenn parallele Ebenen, $T, T_1, T_2, T_3 \ldots$ (Fig. 20 Taf. III.) einem Licht so gegenübergestellt werden, dass sie unter sich gleiche Abstände δ haben, sie die nämlichen Helligkeiten zeigen, welche durch progressives Auftragen eines gleichmässigen Tones hervorgebracht wird. Die Stärke δ dieses Tones (s. §. 18. Zusatz) ist aber abhängig von den Entfernungen e und δ; nun ist

$$d = 1 - c_1 = 1 - \frac{1}{\left(1 + n\frac{\delta}{e}\right)^2}$$

oder da für c_1 $n = 1$ ist,

$$d = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{e}\right)^2}$$

die den Entfernungen δ und e entsprechende Tonstärke.

Ueber den Einfluss der Intensität des Lichtes auf die Lage der Hellencurven.

§. 21.

Ausgehend von dem physikalischen Gesetz, „dass die Helligkeit einer Ebene im umgekehrten quadratischen Verhältniss zu ihrer Entfernung von der Lichtquelle zu- oder abnehme“ und daraus folgernd, „dass die Helligkeit von Ebenen, welche gegen den Lichtstrahl verschiedene Neigungen haben, sich verhalten, wie die cosinusse der Einfallswinkel der Lichtstrahlen“ hat man bis jetzt allgemein bei den Beleuchtungsconstructionen die Helligkeitscurven-Ebenen der Kugel in gleichen gegenseitigen Abständen von einander angenommen, und sich mit den Beweisen, wie sie in §. 5 und 6 gegeben sind, begnügt. Obgleich nun diese Methode brauchbare Bilder von plastischer Wirkung liefert, so wird man doch bei aufmerksamer Vergleichung derselben mit der Beleuchtung und Schattirung der natürlichen Körper finden, dass sich die Lichtmasse (namentlich im Sonnenlicht) viel weiter über die Kugelfläche verbreitet, dass die Helligkeitscurven gegen die Schattengrenze hin mehr und mehr zusammen gedrängt werden, und in Folge dessen letztere viel schärfer hervortritt.

Dass das zweite am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene physikalische Gesetz in Wirklichkeit nicht vollständig sich bewährt, werden nachstehende Versuche zeigen. Was der eigentliche Grund dieser Erscheinung, ob es die für verschiedene Lichtintensitäten verschiedene Intensität des Reflexlichtes ist, oder ob der Grund darin liegt, dass die natürlichen Körperoberflächen keine mathematischen Flächen, sondern als ein Conglomerat mehr oder weniger deutlich erkennbarer verschiedenartig gestalteter Erhöhungen zu betrachten sind, die nur im Allgemeinen die Form mathematischer Flächen haben, mag dahingestellt bleiben.

§. 22.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt. Von zwei mit weissem Papier überzogenen Täfelchen T und T^1 (Fig. 21. Taf. III.) wurde das eine T einem Licht senkrecht gegenübergestellt und zwar in solchen Entfernungen, dass die Abnahme der Helligkeit eine stetige war, alsdann das zweite um die Axe b drehbare Täfelchen T^1 jedesmal in eine solche Lage gebracht, dass es mit dem ersten gleiche Helligkeit zeigte; der Drehungswinkel wurde notirt und aus mehrfachen Versuchen der Mittelwerth genommen.

Bringt man beide Täfelchen in die Lage T'' und T_0, also in gleicher Entfernung $ab = a'b' = x^1$ je einem Licht von gleicher Intensität gegenüber, so ist offenbar die Helligkeit beider Täfelchen die gleiche. Diese Helligkeit bilde die Maasseinheit für die übrigen Helligkeiten; bringen wir das zweite Täfelchen T_0 nach T, also in die Entfernung x vom Licht, so verhält sich offenbar die Helligkeit von T_0 zu der von T, nemlich:

$$\underset{T_0}{H} : \underset{T}{H} = x^2 : x'^2$$

oder da zugleich x^1 die Maasseinheit für die Entfernungen ist

$$1 : H_T = x^2 : 1$$

oder

$$H_T = \frac{1}{x^2}$$

folglich

$$x = \sqrt{\frac{1}{H_T}}$$

Sollen nun diejenigen Entfernungen x des Täfelchens T gesucht werden, in welchen die Helligkeit z. B. je um $^1/_8$ abnimmt, so sind für H_T in diese Gleichung nach einander die Werthe $\frac{8}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{8} \ldots\ldots \frac{1}{8}$, 0 oder für $\frac{1}{H_T}$ die Werthe $\frac{8}{8}, \frac{8}{7}, \frac{8}{6} \ldots\ldots \frac{8}{1}, \frac{8}{0}$ einzusetzen; daraus ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{8}{8}};\ \sqrt{\frac{8}{7}};\ \sqrt{\frac{8}{6}};\ \sqrt{\frac{8}{5}};\ \sqrt{\frac{8}{4}};\ \sqrt{\frac{8}{3}};\ \sqrt{\frac{8}{2}};\ \sqrt{\frac{8}{1}};\ \sqrt{\frac{8}{0}}$$
$$= 1;\ 1{,}067;\ 1{,}118;\ 1{,}265;\ 1{,}414;\ 1{,}631;\ 2{,}000;\ 2{,}828;\ \infty$$

wofür wie schon erwähnt $a'b' = x'$ die Maasseinheit abgibt.

Wird das drehbare Täfelchen T'' um den Winkel α in die Lage T' gedreht und es zeigt in dieser Stellung die gleiche Helligkeit wie das Täfelchen T, dessen Helligkeit in dieser Stellung $= {}^4/_8 = {}^1/_2$ sei, so müsste offenbar dem mehrfach erwähnten physikalischen Gesetz zufolge der Winkel α, der dem Einfallswinkel φ gleich ist, eine solche Grösse haben, dass er der Gleichung $\cos \varphi = {}^1/_2$ entspricht. Berührt die mit T' parallele Ebene M die Kugel im Punkt δ, so hat diese nicht nur im Punkt δ, sondern auch im Kreis dg dieselbe Helligkeit wie T' resp. T, also ebenfalls die Helligkeit $= {}^1/_2$ und es musste demnach $ef = {}^1/_2\, ke = de . \cos \varphi = ke . \cos . \varphi$ sein. Dass dieses aber nicht der Fall ist, ging aus den Versuchen hervor.

§. 23.

Hiezu wurden zwei c^a 2 □^{dm} grosse mit weissem mattem Zeichnungspapier überzogene Holztäfelchen verwendet und die Beleuchtung durch zwei Stearinkerzen hergestellt, von denen 6 auf 1 ℔ gehen.

Die Entfernung $a b = a'b' = x'$ betrug beim	I. Versuch	0,825	mtr.
	II. „	0,572	„
	III. „	0,286	„
	IV. „	0,202	„

Die Lichtintensitäten s der 4 Versuche verhalten sich demzufolge zu einander wie 0,48 : 1 : 4 : 8. Mehrfach wiederholte Versuche ergaben folgende Mittelwerthe:

Helligkeit y.	$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \varphi$ beim Versuch				$\cos \alpha = \cos \varphi = x$				$\cos \varphi = x$ (= y) nach dem physikalischen Gesetz
					s = 0,48	s = 1	s = 4	s = 8	
	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.	
0	90°	90°	90°	90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$^1/_8$	$80\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	$69\frac{1}{2}$	$64\frac{1}{4}$	0,127	0,195	0,351	0,434	0,125
$^2/_8$	$70\frac{1}{2}$	$67\frac{1}{2}$	$57\frac{1}{4}$	$52\frac{1}{4}$	0,298	0,383	0,541	0,612	0,250
$^3/_8$	61	$56\frac{1}{4}$	$46\frac{3}{4}$	$40\frac{3}{4}$	0,477	0,555	0,686	0,750	0,375
$^4/_0$	$50\frac{1}{4}$	45	$36\frac{3}{4}$	33	0,646	0,707	0,801	0,858	0,500
$^5/_8$	$39\frac{1}{2}$	$33\frac{3}{4}$	$27\frac{1}{4}$	$24\frac{1}{2}$	0,793	0,832	0,889	0,910	0,625
$^6/_8$	$28\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	28	$16\frac{1}{4}$	0,905	0,924	0,951	0,960	0,750
$^7/_8$	13	$11\frac{1}{4}$	9	8	0,976	0,981	0,988	[illegible]	0,875
$^8/_8$	0°	0°	0°	0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Aus der Vergleichung der so gefundenen Werthe von $\cos \varphi$ oder x geht hervor, dass dieselben den entsprechenden Helligkeiten nicht gleich sind, dass sie nicht in einfacher arithmetischer Progression mit den Helligkeiten zu oder abnehmen, dass die Entfernungen x bei gleicher Helligkeit aber verschiedene Lichtintensitäten verschieden sind, und zwar um so grösser, je grösser die Lichtintensität, dass die gegenseitigen Curvenabstände gegen die Schattengrenze zu grösser, gegen den hellsten Punkt zu kleiner werden, und dass demnach die Helligkeitscurven mit der Zunahme der Lichtintensität mehr und mehr gegen den hellsten Punkt zusammengedrängt zu werden scheinen.

§. 24.

Dieses Resultat spricht nun scheinbar **gegen** die oben §. 21 ausgesprochenen Erfahrungssätze; ich sage: **scheinbar**, denn wenn wir diejenige Lage der Helligkeitskreise der Kugel mit einander vergleichen, in welchen die Helligkeit absolut gleich ist, so gestaltet sich das Resultat sofort anders. Es ist offenbar:

die Helligkeit $^2/_8$ bei 0,48 od. sehr nahe $^1/_2$facher Lichtstärke = $^1/_8$ bei einf. Lichtstärke.
$x = 0,298$ $\qquad\qquad$ $x = 0,195$
„ „ $^4/_8$ „ „ „ „ $= ^2/_8$ „ „
$x = 0,646$ $\qquad\qquad$ $x = 0,383$
„ „ $^6/_8$ „ „ „ „ $= ^3/_8$ „ „
$x = 0,905$ $\qquad\qquad$ $x = 0,555$
„ „ $^8/_8$ „ „ „ „ $= ^4/_8$ „ „
$x = 1$ $\qquad\qquad$ $x = 0,707$.

Scheidet man nun die Kugel durch Ebenen in den angegebenen Entfernungen (Fig. 23. Taf. III), so ist die Helligkeit die gleiche in d und d', c und c', b und b', a und a'; oder wenn man das Licht von der Intensität 0,48, welches eine Kugel erhellt, plötzlich auf die Intensität 1 verstärkte, so würde die Helligkeit d sofort nach d', von c nach c', von b nach b' und von a nach a' zurückgedrängt werden. Noch auffallender wird selbstverständlich diese Erscheinung, wenn wir die Intensität noch grösser annehmen, wie dies (Fig. 24. Taf. III.) veranschaulicht, wo die Lage von Hellencurven mit absolut gleicher Helligkeit für 1fache und 8fache Lichtintensität mit einander verglichen sind.

Wir sehen daraus, dass in Uebereinstimmung mit unsern Voraussetzungen, die Dunkelheiten der Schattengrenze um so näher rücken, und hier einen um so schrofferen Uebergang von der Licht- zur Schattenseite der Körper bilden müssen, je grösser die zur Beleuchtung derselben verwendete Lichtquelle ist und können annehmen, dass die Dunkelheiten mit zunehmender Lichtintensität ebenso gegen die Schattengrenze sich zusammendrängen, wie die Helligkeiten gegen den hellsten Punkt.

§. 25.

Um die Stetigkeit der aus den Versuchen gefundenen Werthe von x zu prüfen, wurden dieselben als Abscissen und die zugehörigen Helligkeiten als Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufgetragen und die daraus sich ergebende Curve gezeichnet, welche durch ihre Gestalt unmittelbar als eine Sinus-Curve sich erwiess, so namentlich diejenige Curve, welche die Werthe von x für einfache Lichtintensität enthält, die vollständig der Gleichung

$$x = \sin. \, (y \, . \, 90^0)$$
II

entspricht. Darin bezeichnet y die Helligkeit, deren Werthe stets zwischen 0 und 1 liegen.

§. 26.

Durch mehrfache Versuche ergab sich ferner, dass die Werthe der Reihen von x für die übrigen Lichtintensitäten aus der Reihe $x_{II} = \sin (y . 90^0)$ hervorgehen, wenn man letztere auf eine gewisse Potenz f erhebt, die nothwendig, da die Reihen mit der Intensität s des Lichtes sich ändern, eine Funktion von s sein muss. Die Gleichung für die Werthe von x wären also allgemein

$$x_n = \left(\sin(y.90)\right)^f = x_{II}^f$$

in welcher Gleichung der Werth von f noch näher zu bestimmen ist. Bezeichnet man die Werthe, welche in obiger Tabelle §. 23 zusammengestellt mit x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV}, und die entsprechenden Exponenten mit f_I, f_{II}, f_{III}, f_{IV} so ist offenbar

$$x_I = x_{II}^{f_I} \text{ oder } f_I = \frac{\log. x_I}{\log. x_{II}} \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

$$x_{III} = x_{II}^{f_{III}} \text{ oder } f_{III} = \frac{\log. x_{III}}{\log. x_{II}} \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

$$x_{IV} = x_{II}^{f_{IV}} \text{ oder } f_{IV} = \frac{\log. x_{IV}}{\log. x_{II}} \quad . \quad . \quad . \quad c)$$

und findet nun aus Gleichung a, wenn man die betreffenden Zahlenwerthe obiger Tabelle einsetzt:

$$f_I = \frac{\log. 0{,}127}{\log. 0{,}195} = 1{,}26$$

ebenso ist aber auch

$$f_I = \frac{\log. 0{,}298}{\log. 0{,}383} = 1{,}26.$$

Dieselbe Grösse erhält man, man mag für x aus der Reihe I und II Werthe nehmen, welche man will, sofern sie nur derselben Helligkeit angehören.

Ebenso ist

$$f_{III} = \frac{\log. 0{,}195}{\log. 0{,}351} = 0{,}64$$

und endlich

$$f_{IV} = \frac{\log. 0{,}434}{\log. 0{,}351} = 0{,}511 \;.$$

während selbstverständlich

$$f_{II} = 1$$

ist.

§. 27.

Es ist also:

für $s = 0{,}48$	$f = 1{,}26$
für $s = 1$	$f = 1$
für $s = 4$	$f = 0{,}64$
für $s = 8$	$f = 0{,}511.$

Um die Beziehung zwischen s und f festzustellen, wurden dieselben wieder als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufgetragen und die diesen Werthen entsprechende Curve gezeichnet, welche als eine hyperbolische sich erwiess, deren Gleichung die Form hat:

$$s - b = \frac{a}{f^m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Um die Werthe der Grössen a, b und m zu finden, bilde man drei Gleichungen, indem man für s und f je zwei obiger Zusammenstellung entnommenen Werthe setzt:

$$1 - b = \frac{a}{1^m} \text{ oder } 1 - b = a \quad . \quad 2)$$

$$4 - b = \frac{a}{0{,}64^m} \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$8 - b = \frac{a}{0{,}511^m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Aus diesen 3 Gleichungen lassen sich nun die 3 Unbekannten a, b und m berechnen, wie folgt:

Durch Subtraction der 2. Gleichung von der 3. und 4. erhält man:

$$4 - 1 = a\left(\frac{1}{0{,}64^m} - 1\right) \quad . \quad 5)$$

$$8 - 1 = a\left(\frac{1}{0{,}511} - 1\right) \quad . \quad 6)$$

Dividirt man die 5. Gleichung durch die 6., so ist

$$\frac{4-1}{8-1} = \frac{a\left(\frac{1}{0{,}64^m} - 1\right)}{a\left(\frac{1}{0{,}511^m} - 1\right)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{3}{7} = 0{,}4286 = \frac{\frac{1}{0{,}64^m} - 1}{\frac{1}{0{,}511^m} - 1} \qquad 7)$$

Setzt man in dieser Gleichung $m = 3$, so erhält man den Werth 0,433 statt 0,4286, der aber jedenfalls genügt.

Dieser Werth von $m = 3$ in die Gleichung 5 und 6 eingesetzt, gibt:

$$3 = a\left(\frac{1}{0{,}64^3} - 1\right) = 2{,}814 \,.\, a$$

oder

$$7 = a\left(\frac{1}{0{,}511^3} - 1\right) = 6{,}494 \,.\, a \qquad 8)$$

folglich

$$a = \frac{3}{2{,}814}$$

oder

$$a = \frac{7}{6{,}494} \quad = 1{,}0805 \quad .\ .\ 9)$$

Gleichung 2. ergibt dann sofort durch Einsetzung dieses Werthes von a

$$1 - b = 1{,}0805$$
$$b = 1 - 1{,}0805 = -0{,}0805 \quad 10)$$

Setzt man jetzt die so berechneten Werthe von a, b und m in Gleichung 1, so erhält man als Relation zwischen s und f die Gleichung:

$$s + 0{,}0805 = \frac{1{,}0805}{f^3}$$

oder

$$f = \sqrt[3]{\frac{1{,}0805}{s + 0{,}0805}} \quad .\ .\ .\ 11)$$

Zusatz. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$f = \sqrt[3]{\frac{1 + 0{,}0805}{s + 0{,}0805}}$$

Wird nun s ziemlich gross, so kann der Bruchtheil 0,0805 füglich vernachlässigt werden und wir haben dann

$$f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ 12)$$

Es liefert übrigens für $s = 2$

die Gleichung 11) . . $f = 0{,}80381$

und die Gleichung 12) . $f = 0{,}7937$

Differenz $= 0{,}01011$

also einen so geringen Unterschied, dass die Gleichung 12) überhaupt genügen mag.

§. 28.

Wenn man nun den Werth von f in die Gleichung 1) §. 26 einsetzt, erhält sie die allgemein giltige Form:

$$\text{A)} \qquad x = \left(\sin.\,(y\,.\,90^0)\right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}} - \left(\sin.\,(y\,.\,90)\right)^{s^{-\frac{1}{3}}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich nun für jede beliebige Lichtintensität s und für jede beliebige Helligkeit y eine Reihe von Werthen x berechnen, wie die oben in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten durch Versuche gefundenen. Setzt man s = 0,48; 1; 4; 8; und y = $^8/_8$, $^7/_8$, $^6/_8$ . . . . . in obige Gleichung, so ergeben sich eben jene Werthe x in §. 23.

§. 29.

In §. 24 haben wir nachzuweisen versucht, dass bei zunehmender Lichtintensität, die Dunkelheit ebenso gegen die Schattengrenze hingedrängt wird, wie die Helligkeit scheinbar gegen den hellsten Punkt, wir haben demnach, wenn wir, statt der Helligkeit y, die D u n k e l h e i t z einführen, die Reihen des §. 23 oder die überhaupt aus der Gleichung A §. 28 berechneten Werthe von x als die Entfernungen vom hellsten Punkt zu betrachten; um aber auch hier wieder dem x die ursprüngliche Bedeutung zu geben, ist offenbar 1 — x statt x zu setzen, wodurch die Gleichung A die Form erhält:

$$1 - x = \left(\sin.\,(z\,.\,90)\right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}}$$

oder

$$x = 1 - \left(\sin.\,(z\,.\,90)\right)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}} \qquad \text{B)}$$

Z u s a t z. Gerade so wie die Werthe der Helligkeiten y $\substack{<1 \\ >0}$ sind, ebenso sind auch die Werthe von z d. h. die Dunkelheiten $\substack{>0 \\ <1}$.

Da wir die verschiedenen Grade der Dunkelheiten durch eine denselben proportionale Anzahl von gleichen Tönen ausdrücken, so können wir uns, unter der Voraussetzung, dass die grösste Dunkelheit $1 = \frac{n}{n}$ einem n-fachen Tonauftrag entspricht, unter z auch die Anzahl der Töne vorstellen, durch welche die betreffende Dunkelheit z repräsentirt wird.

Sollte nun aus obiger Gleichung B der Werth von x d. h. die Entfernung derjenigen Hellencurve der Kugel berechnet werden, in welcher z. B. die Helligkeit $y = {}^3/_8$ wäre, gleichviel für welche Lichtintensität s, so ist offenbar $z = 1 - y = 1 - {}^3/_8 = {}^5/_8$ zu setzen; da auch $n = {}^8/_8$, so haben wir uns darunter vorzustellen, dass diese Dunkelheit z durch 5 Töne repräsentirt wird, deren 8 die grösste Dunkelheit auf der Lichtseite, d. h. die der Schattengrenze, hervorbringen.

§. 30.

Setzt man in die Gleichung B §. 29 s = 0,48; 1; 4; 8; 16 und $z = 0,\ {}^1/_8,\ {}^2/_8,\ {}^3/_8 \ldots\ldots {}^7/_8, {}^8/_8$, so erhält man die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe von x, für die Helligkeitsdifferenz der Lichtcurven $= {}^1/_8$.

Dunkelheit z	s = 0,48 (f = 1,26)	s = 1 (f = 1)	s = 4 (f = 0,64)	s = 8 (f = 0,511)	s = 16 (f = 0,406)	Helligkeit y
0	x = 1,000	x = 1,000	x = 1,000	x = 1.000	x = 1,000	1
$^1/_8$	„ 0,872	„ 0,805	„ 0,649	„ 0,566	„ 0,485	$^7/_8$
$^2/_8$	0 0,701	„ 0,617	„ 0,459	„ 0,388	„ 0,323	$^6/_8$
$^3/_8$	„ 0,522	„ 0.447	„ 0,314	„ 0.242	„ 0,212	$^5/_8$
$^4/_8$	„ 0,354	„ 0,293	„ 0,199	„ 0.162	„ 0,131	$^4/_8$
$^5/_8$	„ 0,207	„ 0,168	„ 0,111	„ 0,090	„ 0,072	$^3/_8$
$^6/_8$	„ 0,095	„ 0,076	„ 0,049	„ 0,040	„ 0.032	$^2/_8$
$^7/_8$	„ 0,024	„ 0,019	„ 0,012	„ 0,010	„ 0,008	$^1/_8$
$^8/_8$	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	„ 0,000	0

Anmerkung. Der Exponent f ist, aus der oben §. 27 entwickelten Gleichung 12 berechnet, nemlich: $f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}}$.

§. 31.

Nimmt man die Lichtintensität unendlich klein, also $s = 0$, so wird $\sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0}} = \infty$; nun ist aber $\left(\sin(z.90)\right)^{\infty} = 0$, da $\sin(z.90)$ stets < 1, folglich für diesen Fall

$$x = 1 - 0 = 1$$

d. h. die Helligkeitscurven sind alle im hellsten Punkt der Kugel concentrirt, diese also durchaus dunkel.

Nimmt man die Lichtintensität unendlich gross, also $s = \infty$, so ist $\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}} = 0$; folglich für diesen Fall

$$x = 1 - \left(\sin(z.90)\right)^{0} = 1 - 1 = 0$$

d. h. sämtliche Helligkeitscurven sind in der Schattengrenze vereinigt, oder die Lichtseite der Kugel ist durchweg gleichmässig hell bis zur Schattengrenze, in welcher die Dunkelheit plötzlich beginnt.

Zusatz. Angenommen die Intensität des Sonnenlichts sei gleich 4000, so ist $f = \sqrt[3]{\frac{1}{4000}} = 0{,}063$ folglich

$$x = 1 - \sin\left(z\ .\ 90\right)^{0,063}$$

und daher für:

$z = 0$;	$= 1/8$;	$= 2/8$;	$= 3/8$;	$= 4/8$;	$= 5/8$;	$= 6/8$;	$= 7/8$;	$= 8/8$
$x = 1$;	$= 0{,}0978$	$0{,}0584$	$0{,}0363$	$0{,}0215$	$0{,}0115$	$0{,}0049$	$0{,}0011$	$0{,}0000$

Die Curven-Ebene mit $1/8$ Dunkelheit oder $7/8$ Helligkeit hat demnach vom Kugelmittelpunkt eine Entfernung, die noch nicht $1/10$ von der Länge des Kugelradius beträgt, während die Curven-Ebene mit $7/8$ Dunkelheit oder $1/8$ Helligkeit dem Kugelmittelpunkt bis auf $1/1000$ des Radius nahe rückt.

§. 32.

Es soll nunmehr untersucht werden, welcher Lichtintensität die bisher allgemein eingeführte Methode mit der Annahme gleicher gegenseitiger Abstände der Lichtcurven-Ebenen entspricht.

Da man hiebei von der Voraussetzung ausgeht, dass die Abstände der Lichtcurven-Ebenen vom Kugelmittelpunkt den entsprechenden Helligkeiten proportional sind, so gilt für diesen Fall offenbar die Gleichung:

$$x = y$$

oder wenn wir auch hier statt der Helligkeit y die Dunkelheit z einführen, also 1 — x statt x setzen:

$$1 - x = z \quad \text{oder}$$
$$x = 1 - z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Diese Gleichung ist die einer geraden Linie; die Gleichung B §. 29 kann niemals auf diese Form gebracht werden. Es wird sich daher nur um eine annäherungsweise Bestimmung des Werthes von s handeln können.

Setzt man in die Gleichung B §. 29 aus obiger Gleichung 1 den Werth von x, so ist

$$1 - z = 1 - \left(\sin(z.90)\right)^f$$

oder

$$z = \left(\sin(z.90)\right)^f \quad \ldots \quad 2)$$

Daraus ergibt sich:

$$f = \frac{\log.z}{\log.\sin(z.90)} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

da $f = \sqrt[3]{\frac{1}{s}}$, so ist $s = \frac{1}{f^3} \quad \ldots\ldots \quad 4)$

Setzt man in Gleichung 3 für z irgend einen beliebigen Werth z. B. $z = {}^1/_2$, so ist:

$$f = \frac{\log.\frac{1}{2}}{\log\left(\sin\frac{1}{2}.90\right)} = \frac{\log 0{,}5}{\log.\sin 45^\circ} = \frac{0{,}69897 - 1}{0{,}84948 - 1}$$

$$f = \frac{-0{,}30103}{-0{,}15051} = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Dieser Werth für f in Gleichung 4 gesetzt gibt

$$s = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

d. h.: für besagte Methode beträgt die Lichtintensität s nur ${}^1/_8$ von derjenigen, welche wir oben mit 1 bezeichnet haben und welche man erhält, wenn man die Kugel in 0,572$^{\text{mtr.}}$ (= 2 Fuss württ.) Entfernung zwei Stearinlichtern gegenüber bringt, während im vorliegenden Fall, also für $s = {}^1/_8$, diese Entfernung 1,62$^{\text{mtr.}}$ (= 5,66 Fuss württ.) beträgt.

§. 33.

Nimmt man auf der Kugel nur 4 Helligkeitscurven an, was auch für die praktische Anwendung meistentheils genügt, so hat man von den in der Tabelle (§. 30) zusammengestellten Werthen von x für ein-fache Lichtintensität (s = 1) diejenigen zu nehmen, welche den Dunkelheiten $z = 0, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ entsprechen, also

	für $z = 0$	$\frac{2}{8}$;	$\frac{4}{8}$;	$\frac{6}{8}$;	$\frac{8}{8}$;
	$x = 1$	0,617	0,293	0,076	0,000
oder sehr nahe	$x = 1$	0,6	0,3	0,1	0.

Diese Entfernungen aber verhalten sich sehr nahe wie:

$$10 : 6 : 3 : 1 : 0.$$

Theilt man demnach den zum Lichtstrahl senkrechten Radius (Fig. 25. Taf. III.) in 10 gleiche Theile, und legt Schnitt-Ebenen senkrecht zu diesem Radius durch den 1., 3., 6. Theilpunkt, so sind die dadurch mit der Kugeloberfläche erzeugten Schnittkreise die der einfachen Lichtintensität entsprechenden Helligkeitskreise. Die gegenseitigen Abstände der Schnitt-Ebenen verhalten sich wie 4 : 3 : 2 : 1.

Diese Theilung ist jedoch nur eine näherungsweise; will man eine genauere Theilung haben, so beschreibe man mit dem Radius ab (Fig. 25^a Taf. III.) den Viertelskreisbogen bc, theile diesen in so viele gleiche Theile, als man Helligkeitscurven haben will, und ziehe durch die Theilpunkte d, e, f.. Linien senkrecht zu ab. Denn es ist, wenn $\mathrm{arc.cf} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arc\ bc}$, $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 90^0$ und $\mathrm{hf} = \mathrm{af.sin}\ \alpha = \mathrm{r} \cdot \sin(\frac{1}{4} \cdot 90)$; ferner ist $x = r - hf = r - r \sin(\frac{1}{4} . 90)$ oder wenn $r = 1, x = 1 - \sin(\frac{1}{4} . 90)$. Ebenso ist z. B. $x' = 1 - \sin(\frac{2}{4} . 90)$, wann $\mathrm{arc.ce} = \frac{2}{4} . \mathrm{arc.bc}$ ist; diese Gleichung von x und x' entspricht aber vollkommen der allgemeinen Gleichung B. §. 29, wenn man dort S = 1 setzt.

§. 34.

Trägt man die Werthe von x für 16fache Lichtintensität und die zugehörigen Dunkelheiten als die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf, so stellt die daraus hervorgehende Curve sehr nahe einen Kreis vor, welcher der Gleichung:

$$x = 1 - \sqrt{1 - (1 - z)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

oder:

$$1 - x = \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

entspricht. Denn, setzt man in diese Gleichung nach einander die Werthe $z = 0$, $^1/_8$, $^2/_8$, $^3/_8$ . . . $^7/_8$, $^8/_8$ ein, so erhält man:

für $z =$	$^7/_8$	$^6/_8$	$^5/_8$	$^4/_8$	$^3/_8$	$^2/_8$	$^1/_8$	0
$x =$	0,008	0,033*	0,073	0,134	0,219	0,340	0,515	1,000

während die aus der Gleichung:

$$x = 1 - (\sin z \,.\, 90) \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

berechneten Werthe (s. §. 30) folgende sind:

$x =$ 0,008	0,032	0,072	0,131	0,212	0,323	0,485	1,000

Die Werthe dieser beiden Reihen sind aber, wie man sieht, so wenig von einander verschieden, dass man sie für die Praxis als gleich annehmen kann.

Nun ist in Fig. 26, Taf. III., $ab^2 = ac^2 - bc^2$ oder da $ab = 1 - x$; $ac = 1$; $bc = 1 - z$.

$$(1 - x)^2 = \quad 1 - (1 - z)^2$$

oder:

$$1 - x \quad = \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

woraus wieder obige Gleichung 1) hervorgeht:

$$x = 1 - \sqrt{1 - (1 - z)^2}$$

Beschreibt man demnach mit dem rad. ab. (Fig. 27, Tafel III.) den Viertelskreisbogen bc, theilt bh in so viele gleiche Theile als man Hellencurven auf der Kugel haben will, zieht durch die Theilpunkte d, e, f, g . . . dd′, ee′, ff′ . . . . bis zum Durchschnitt mit dem Bogen bc, so sind die durch die Schnittpunkte d′, e′, f′, g′ . . . . zu ab senkrechten Linien + 4, + 3, + 2 . . . die gesuchten Helligkeitscurven der Kugel für 16fache Lichtintensität.

§. 35.

Es soll die Lage der Helligkeitscurven bestimmt werden für den Fall, dass bei der Annahme von 4 Abstufungen die Curve + 1 mit der Helligkeit $y = {}^3/_4$ (folglich $z = {}^1/_4$) durch den Punkt (b, b′) der Kugel (Fig. 28, Taf. III.) geht.

Projicirt man die Kugel mit dem durch ihren Mittelpunkt gehenden Lichtstrahl (l, l′) auf eine zum letzteren parallele Seiten-Ebene MN, so erhält man in der Umklappung dieser Ebene in die Horizontal-Ebene den Kreis KBP als die Seitenprojection der Kugel und die Gerade CN als die des Lichtstrahls (l, l′); desgleichen entspricht der Punkt B der Seitenprojection dem Punkt (b, b′). Da die verlangte Hellencurve + 1 senkrecht auf CN stehen muss und zugleich durch den Punkt B gehen soll, so ist offenbar PB der Hellenkreis + 1, den man nur noch auf die Grund-Ebenen zu projiciren hat, was ohne besondere Schwierigkeit geschehen kann.

Es ist nun $x = r \cdot \sin\beta$ und da $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha$, auch

$$x = r \cdot \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Es ist ferner $Ne = fb = r \cdot \sqrt{2}$ (Denn $fb^2 = 2\,bg^2 = 2 \cdot r^2$)

$$eO = r = Ne \cdot tg \cdot \alpha$$

$$r = r \cdot \sqrt{2} \cdot tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$$

folglich $\alpha = 35^\circ 16'$ und $\sin\alpha = 0{,}5774$ . . . . 2)

Setzen wir diesen Werth in Gleichung 1), so ist da $r = 1$,

$$x = 0{,}5774.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die Gleichung B. § 29, so erhält man, da $z = {}^1/_4$:

$$x = 0{,}5774 = 1 - (\sin {}^1/_4 \cdot 90^\circ)^f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$0{,}4226 = (\sin 22^1/_2{}^\circ)^f$$

$$f = \frac{\log.\ 0{,}4226}{\log.\sin.\ 22^1/_2{}^\circ} = \frac{0{,}6259295 - 1}{0{,}58284 - 1} = 0{,}9 \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

folglich ist, da $S = \frac{1}{f^3}$

$$S = \frac{1}{0{,}9^3} = 1{,}37 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

Setzt man obigen Werth von f in die Gleichung 3) und ausserdem für z nach einander die Werthe 0, $^1/_8$, $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, 1 so erhält man:

für die Hellencurven	+ 0,	d. h. für $z = 0$	$x = 1{,}0000$
" " "	+ $^1/_2$,	" " $z = {}^1/_8$	$x = 0{,}7703$
" " "	+ 1,	" " $z = {}^1/_4$	$x = 0{,}5787$
" " "	+ 2,	" " $z = {}^2/_4$	$x = 0{,}2680$
" " "	+ 3,	" " $z = {}^3/_4$	$x = 0{,}0688$
" " "	+ 4,	" " $z = 1$	$x = 0{,}0000$

Nach §. 16 ist die Helligkeit des hellsten Punktes im Selbstschatten $= {}^1/_4$ von der des hellsten Punktes im Licht; die Gleichung b) ergab im vorliegenden Fall für die Helligkeit S des hellsten Punktes den Werth $S = 1{,}37$, folglich ist die Helligkeit des hellsten Punktes im Selbstschatten

$= \frac{1,37}{4} = 0,34$ und daher $f = \sqrt[3]{\frac{1}{0,34}} = 1,43$. Substituirt man diesen Werth von f in die Gleichung B, §. 29, so erhält man

für die Hellencurven	— 0,	d. h. für	$z = 0$,	die	Entfernung	$x = 1,0000$
„ „ „	— 1,	„ „	$z = {}^1/_4$	„	„	$x = 0,7467$
„ „ „	— 2,	„ „	$z = {}^2/_4$	„	„	$x = 0,3907$
„ „ „	— 3,	„ „	$z = {}^3/_4$	„	„	$x = 0,1070$
„ „ „	± 4,	„ „	$z = {}^4/_4$	„	„	$x = 0,0000$

Diese Distanzen (vergleiche Fig. 29, Taf. III.) werden wir künftighin stets unseren Beleuchtungsconstructionen zu Grunde legen.

§. 36.

Geben wir dem Lichtstrahl (L, L′) die allgemein gebräuchliche, conventionelle Richtung (§. 1), so sind die Helligkeitscurven der Kugel, unter Zugrundelegung der im vorigen Paragraph berechneten Distanzen x, folgendermassen zu construiren.

Sind die um a und a′ beschriebenen Kreise (Fig. 30, Taf. IV.) die Projectionen einer Kugel, welche die Grund-Ebenen berührt, so werden die Projectionen (L, L′) des durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Lichtstrahls sich im Punkt (S, S′) des Grundschnittes schneiden müssen. Projiciren wir die Kugel auf die zum Lichtstrahl parallele Seiten-Ebene l″ S″, so erhalten wir in der Umklappung derselben den Kreis p n″ a‴ m″ als Projection der Kugel, während L″ S″ die Seitenprojection des durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lichtstrahls ist.

Da die Ebenen der Curven gleicher Helligkeit senkrecht auf der Richtung des Lichtstrahls stehen, die Seiten-Ebene aber eine zu dieser Richtung parallele Lage hat, so müssen jene Ebenen auch senkrecht auf der Seiten-Ebene stehen, also ihre Spuren senkrecht zu L″ S″ sein. Theilen wir demnach den Radius + 0 a″ und — 0 a″ in dem im vorigen Paragraph angegebenen Verhältniss und ziehen durch die Theilpunkte die Linien + ½, + 1, + 2, + 3, ± 4, — 3, — 2, — 1 senkrecht zu + 0 — 0, so sind diess die Seitenprojectionen der Kreise gleicher Helligkeit auf der Kugel. Es sei bei dieser Veranlassung bemerkt, dass die auf der Lichtseite liegenden Hellencurven von nun an stets mit + 1, + 2, + 3..., die auf der Selbstschattenseite liegenden mit — 1, — 2, — 3... bezeichnet sein werden; während + 0 die Bezeichnung des hellsten Punktes im Licht und — 0 die des hellsten Punktes im Selbstschatten sein wird.

Um nun die Curven in Horizontal- und Vertikal-Projection zu bringen, schneide man die Kugel durch Ebenen parallel zur Horizontal-Ebene

z. B. durch die Ebenen I', II', III'... (in der Seitenprojection I'', II'', III''...); die Kreise I, II, III... sind die Horizontal-Projection der betreffenden Schnitte. Bringt man nun die Schnittpunkte dieser Hilfs-Ebenen I'', II'', III'' mit den Curven-Ebenen, z. B. mit — 1 und — 2 auf die betreffenden Hilfskreise I, II, III... und von hier auf I', II', III' in die Vertikal-Projection, so hat man nur noch die so gefundenen Punkte durch stetige Curven zu verbinden.

Die Hellencurven der Kugel sind Kreise, da dieselben aber gegen die Grundebenen geneigt sind, so müssen ihre Projectionen nothwendig Elipsen sein, die sich auch mit Hilfe der beiden Hauptaxen construiren lassen. Die Mittelpunkte der Helligkeitskreise liegen auf der Linie L'' S'', so z. B. der von + 1 in q'', in der Horizontal-Projection auf der Linie LS im Punkt q und in der Vertikalprojection auf L'S' in q'; q und q' sind demnach die Mittelpunkte derjenigen Elipsen, welche den Projectionen der Hellencurve + 1 entsprechen. Der auf der Seiten-Ebene senkrechte Durchmesser des Kreises b'' a''' (oder + 1) ist horizontal und daher seine Horizontal-Projection c d = b'' a''' die grosse Axe der betreffenden Elipse. Der Umriss der Kugel in der Seitenprojection, d. h. der Kreis p m'' a''' n'' ist offenbar die Projection des grössten Kreises m n, es müssen daher die Horizontal-Projectionen b und a der Punkte b'' und a'' auf m n liegen; zugleich ist a b die kleine Axe der Elipse, weil a b die Projection des auf c d senkrechten Durchmessers ist. Auf gleiche Weise kann man auch die Axen der übrigen Elipsen und mit Hilfe derselben diese selbst zeichnen.

Da der Lichtstrahl gegen die Grund-Ebenen gleiche Neigung hat, so muss nothwendig die Form der Helligkeitscurven auf der Kugel, d. h. der Elipsen in der Horizontal-Ebene und in der Vertikal-Ebene, sowie auch ihre Lage gegen die Projection des Lichtstrahls (L, L') die nemliche sein. Macht man daher a' q' = a q = q' b', zieht e f senkrecht zu a' m' durch den Punkt q' und macht e f = c d, so sind wieder e f und a' b' die Axen der Elipse + 1 in der Vertikal-Projection u. s. f.

Von Wichtigkeit sind die Berührungspunkte der Curven mit dem Kugelumriss, wesshalb man dieselben niemals zu construiren unterlassen darf. Die Linie m'' n'' ist offenbar die Seitenprojection des horizontalen Kugelumrisses m h p n r, die Schnittpunkte der Linien + ½, + 1, + 2, + 3... mit der Linie m'' n'' müssen daher nothwendig die Berührungspunkte der Curven + ½, + 1, + 2, + 3... am horizontalen Umriss m h p n r sein. Da z. B. b'' a''' die Linie m'' n'' in h'' schneidet, so ist h der Berührungspunkt der Curve + 1 in der Horizontal-Projection u. s. f.

Da die Vertikal-Projection der Horizontal-Projection ganz gleich ist und die Berührungspunkte der Hellencurven gegen den Punkt m und m' ganz symmetrisch liegen müssen, so kann man dieselben mit dem Zirkel von der Horizontal-Projection in die Vertikal-Projection übertragen.

Der Punkt b'' des Kreises b'' a''' liegt der Horizontal-Ebene am nächsten, wie leicht einzusehen; er ist daher der tiefste, seine Horizontal-Distanz ist = l'' b''; die Horizontal-Projection von b'' ist b; zieht man das Projections-Lot (b, l' k') und macht l' k' = l'' b'', so ist k' der tiefste Punkt der Curve i' k' a' h'. Auf gleiche Weise werden auch die tiefsten Punkte der anderen Curven gefunden.

Es wurde schon oben erwähnt, dass die Beleuchtung der Kugel bezüglich der Projectionen des durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lichtstrahls (L, L') symmetrisch sei, d. h. die Linien L S und L' S' bilden symmetrische Mittellinien für die Helligkeitskreise der Kugel.

Es muss daher auch die Beleuchtung auf dem Bogen a h genau dieselbe sein, wie im Bogen a i. Nun ist aber die Vertikal-Projection von a h die Linie r a' h' und von a i der linkseitige Kugelumriss r i' h'; folglich ist auch hier die Beleuchtung die nemliche, d. h. die Berührungspunkte der Hellencurven am Kugelumriss r i' h' und die Durchgangspunkte derselben durch die Linie r a' h' müssen in gleicher Höhe liegen.

Sind in dieser Weise sämmtliche Hellencurven der Kugel in beiden Projectionen sammt den hellsten Punkten + 0 und — 0, den Berührungspunkten u. s. w. gezeichnet, die Curven und Punkte mit den entsprechenden Bezeichnungen versehen, so ist die Kugel, die wir fortan Normalkugel nennen wollen, zum Gebrauche fertig, und es kann nun mit Hilfe derselben die Helligkeit jedes beliebigen Punktes einer Fläche, sofern diese nur nach einem bestimmten mathematischen Gesetz gestaltet ist, bestimmt, überhaupt die Beleuchtung derselben construirt werden.

Es dürfte nur noch zu bemerken sein, dass man der bessern Uebersicht wegen die Curven der Lichtseite von denen der Selbstschattenseite durch verschiedene Farben unterscheidet, indem man die ersteren etwa roth, die letzteren blau zeichnet.

§. 37.

Es kommt häufig vor, dass man bei den Beleuchtungsconstructionen eine hohle, d. h. concave Normalkugel zu Hilfe nehmen muss. Wir erhalten aber die Beleuchtung einer solchen, wenn wir das Blatt, auf welchem die nach dem vorigen Paragraphen construirte Normalkugel gezeichnet ist (Fig. 30, Taf. IV.) so umdrehen, dass die Zeichnung die in Figur 31 dargestellte Lage einnimmt, die Vertikal-Projection aber wieder als Vertikal-Projection und die Horizontal-Projection wieder als Horizontal-Projection betrachten.

Ueber die practische Ausführung der zu schattirenden, resp. zu tuschenden Zeichnungen.

§. 38.

Es wird sich nunmehr darum handeln, der Kugel durch mehrfachen Auftrag eines gleichmässigen Tuschtones, des Grundtones, die entsprechende Schattirung zu geben. Es geschieht dies erfahrungsgemäss am besten dadurch, dass man den Grundton nach folgender Tabelle systematisch aufträgt.

Ueberarbeitung.	Es ist anzulegen:	
	im Licht- u. im Selbstschatten.	im Schlagschatten.
1	Von $+4$ bis -3 „ $+3$ „ -2 „ $+2$ „ -1 „ $+1$ „ -0	Alles. „ „ „
2^a	Von $+3^1/_4$ bis $-3^1/_3$ „ $+2^1/_4$ „ $-2^1/_3$ „ $+1^1/_4$ „ $-1^1/_3$ „ $+{}^1/_4$ „ $-{}^1/_3$	Alles. „ „ „
2	Von $+3^1/_2$ bis -0 „ $+2^1/_2$ „ -0 „ $+1^1/_2$ „ -0 „ $+{}^1/_2$ „ -0	Alles. „ „ „
2^b	Von $+3^3/_4$ bis $-3^2/_3$ „ $+2^3/_4$ „ $-2^2/_3$ „ $+1^8/_4$ „ $-1^2/_3$ „ $+{}^3/_4$ „ $-{}^2/_3$	Alles. „ „ „
3		Von $+4$ bis $+0$ „ $+3$ „ $+0$ „ $+2$ „ $+0$ „ $+1$ „ $+0$

B e i W e i t e m i n d e n m e i s t e n F ä l l e n r e i c h t m a n m i t d e r 1sten, 2ten und 3ten U e b e r a r b e i t u n g a u s. Ob man auch die mit 2a und 2b bezeichnete Ueberarbeitung ausführen will, hängt theils von der Stärke des verwendeten Grundtones, theils von der beabsichtigten Wirkung im Reflexlicht ab; überhaupt ist die zweite Ueberarbeitung verschiedener Modificationen fähig.

Sind die zu schattirenden Gegenstände s e h r g r o s s, so wird man mit folgender Ueberarbeitung vollkommen ausreichen und einen vortrefflichen Effect erzielen:

Ueberarbeitung.	Es ist anzulegen:	
	im Licht- u. im Selbstschatten.	im Schlagschatten
1.	Von ± 4 bis -3	Alles.
	„ $+3$ „ -2	„
	„ $+2$ „ -1	„
	„ $+1$ „ -0	„
2a	Von $3\frac{1}{3}$ bis -0	Alles.
	„ $2\frac{1}{3}$ „ -0	„
	„ $1\frac{1}{3}$ „ -0	„
	„ $\frac{1}{3}$ „ -0	„
2b	Von $3\frac{2}{3}$ bis $-3\frac{1}{2}$	Alles.
	„ $2\frac{2}{3}$ „ $-2\frac{1}{2}$	„
	„ $1\frac{2}{3}$ „ $-1\frac{1}{2}$	„
	„ $\frac{2}{3}$ „ $-\frac{1}{2}$	„
3.		Von ± 4 bis $+0$
		„ $+3$ „ $+0$
		„ $+2$ „ $+0$
		„ $+2$ „ $+0$

In Folge dieser Ueberarbeitung erhält

der hellste Punkt $+0$ . . . . 0 Töne,
„ „ „ -0 . . . . 5 „
die Schattengrenze ± 4 . . . . . . 12 „
der Punkt $+0$ im Schlagschatten . . 16 „

Diese Töne entsprechen nach den in §. 18 berechneten Werthen von c (Helligkeit) folgenden Helligkeiten:

für 0 Töne ist die Helligkeit $c = 1$,
„ 5 „ „ „ „ $c = 0{,}52$,
„ 12 „ „ „ „ $c = 0{,}27$,
„ 16 „ „ „ „ $c = 0{,}20$,

welche Zahlen sich ziemlich nahe wie $1 : {}^1/_2 : {}^1/_3 : {}^1/_5$, also ziemlich genau wie die in §. 15 am Schluss zusammengestellten Werthe verhalten.

§. 39.

Für die praktische Ausführung mögen noch nachstehende Regeln und Andeutungen von Nutzen sein.

Zuerst werden auf einem besondern Blatt die verschiedenen vorbereitenden Constructionen gemacht, bestehend im Aufsuchen und Uebertragen der Helligkeitscurven von der Normalkugel auf die Betreffenden in der Zeichnung in Grund- und Aufriss dargestellten Gegenstände und in der Construction der Schlagschatten. Diese Zeichnung wird sodann mit sämmtlichen Lichtcurven und Schlagschattenumrissen auf ein zweites Blatt übergepaust und nur mit der Bleifeder so weit fixirt, dass die Linien eben noch sichtbar sind und endlich die Tuschlagen in der im §. 38 angedeuteten Weise aufgetragen.

Bezüglich der zu verwendenden Farben ist zu bemerken, dass man dieselben entweder je nach der natürlichen Farbe, welche die darzustellenden Körper haben, wählt, oder sofern es sich nicht um eigentlich colorirte Zeichnungen, sondern nur um die Formgebung durch Schattirung handelt, verwendet man am besten die verschiedenen Arten von Sepien, Neutraltinte oder Tusch, denen man aber immerhin andere Farben beimischen kann.

Das Papier, auf welchem eine derartige Zeichnung angefertigt werden soll, ist stets auf einem Reissbrett oder auf einer Rahme in der gewöhnlichen Weise aufzuziehen. Jedes Papier, das sonst zum Aquarelliren sich eignet, ist auch für den vorliegenden Zweck brauchbar. Das Brett oder die Rahme sollte stets in schiefe pultförmige Lage gebracht werden, damit beim Auftragen der Töne auf grosse Flächen, was stets mit vollem Pinsel geschieht, die überflüssige Farbe nachfliessen kann.

Nur wenn man die Farbe so nass als möglich, d. h. mit vollem Pinsel aufträgt, wird man namentlich bei grösseren Flächen klare und durchsichtige Töne erhalten. Auch bei kleineren Flächen sollte man nie zu trocken malen, weil die Töne in diesem Fall trübe und unklar werden und zwar um so mehr, je dunkler der verwendete Ton ist.

Ueber Flächen, welche schon mehrere Töne erhalten haben, muss man die folgenden möglichst leicht und flüchtig auftragen, weil man bei hartem Aufsetzen des Pinsels und bei langsamem Ueberpinseln die schon aufgetragenen Töne mehr oder weniger wieder hinweg wäscht, so dass in Folge dessen die Flächen die ihnen zukommenden Dunkelheiten nicht erhalten.

Der Grundton muss in der gehörigen, d. h. in der für die ganze Zeichnung ausreichenden Masse zubereitet werden; namentlich wenn gemischte Farben zur Verwendung kommen, weil sich dieselben nur schwer in gleicher Qualität wieder herstellen lassen. Ist der geeignete Tuschton in der gehörigen Masse zubereitet, so lässt man ihn einige Minuten stehen, damit die schwereren Farbentheile sich setzen; der klare Theil der Farbe wird dann als zum Gebrauche fertig abgegossen.

Sepia und Neutraltinte haben die Eigenschaft, dass wenn sie sehr nass aufgetragen werden, nach dem Auftrocknen am Rande der benetzten Fläche dunkle Conturen hinterlassen und zwar um so mehr, je dunkler zugleich der aufgetragene Ton war. Diese schwarzen Ränder erscheinen namentlich auch dann, wenn eine Fläche öfters bis an dieselbe Grenze angelegt wird, wie z. B. die Schlagschatten. Man kann diesem Uebelstand dadurch begegnen, dass man je den folgenden Ton nicht ganz bis an den Rand des vorhergehenden aufträgt, sondern etwa 1^{mm} davon entfernt bleibt. Uebrigens sind diese dunkeln Ränder auch nachträglich leicht dadurch zu entfernen, dass man sie mit reinem Wasser vorsichtig befeuchtet und dann mit trockenem Finger gegen die dunkle Fläche herein leicht darüber weg fährt.

Der Tusch, der sowohl rein für sich, als auch mit andern Farben, namentlich mit Karmin, preussisch Blau, Gummi guttae u. s. w. gemischt zu vorliegendem Zweck sehr geeignet ist, hat manchmal die schlimme Eigenschaft, dass er, so oft man den Pinsel eingetaucht hat, und wieder auf das Papier bringt, jedesmal einen schmutzigen Fleck zurücklässt, der sich kaum wieder entfernen lässt. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes gebraucht man die Vorsicht, dass man die aus der Schale geschöpfte Farbe immer zuerst auf einem bereitliegenden Papier abstreicht, und erst von da auf die Zeichnung überträgt.

Will man einen ziemlich dunkeln Ton auf eine grosse Fläche auftragen, was nicht mit allen Farben, ohne dass Flecken oder Streifen entstehen, gleich gut geschehen kann, so befeuchtet man erst die ganze Fläche mit reinem Wasser, lässt sie so weit abtrocknen, bis sie nicht mehr glänzt, und bringt nunmehr den Farbenton auf das noch etwas feuchte Papier.

Es ist selbstverständlich, dass man die schönsten Bilder erhält, wenn man möglichst viele Hellencurven und einen schwachen Grundton anwendet, weil auf diese Weise die Abstufungen der einzelnen Tonlagen bei sphärischen Flächen am wenigsten auffallend und sichtbar sein werden. Allein man wird sich in den meisten Fällen mit 4, höchstens 8

Helligkeitscurven (den hellsten Punkt mit eingerechnet) begnügen können, und zwar einestheils, weil das Construiren derselben zu umständlich und zeitraubend wird, und weil anderntheils, wie wir später sehen werden, die Curven um so mehr sich zusammendrängen, je kleiner der Halbmesser der sphärischen Flächen ist, so dass es schliesslich nicht mehr möglich ist, dieselben alle zu zeichnen oder beim Tuschen mit dem Pinsel genau einzuhalten, und endlich weil die, namentlich bei grösserer Intensität des Grundtones, etwas harten Uebergänge und Abstufungen, die jedoch gewöhnlich nur an grösseren Gegenständen besonders auffallend werden, sich durch nachträgliche Ueberarbeitung leicht beseitigen lassen.

Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen, entweder dadurch, dass man dicht an die dunklere Stelle den mit etwas Wasser verdünnten Grundton ansetzt und gegen die hellere Stelle hin verwäscht, und dieses Verfahren bei jedem Uebergang wiederholt; oder dadurch, dass man mit dem, mit dem Grundton benetzten, je nach Umständen mehr oder weniger trockenen Pinsel, die dunklere Fläche mit der helleren zusammenschattirt und zwar in Strichlagen, die man parallel zur Richtung der Lichtcurve macht.