UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch

Hammer, Ernst

Stuttgart, 1898

§ 12. Genauigkeit des Rechenschiebers.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76882

Visual Library

gegenüberliegende Winkel $10^0\ 14'$; was ist die Hypotenuse? $a = \frac{b}{sin\,\beta}$; Zunge in normaler Lage; Einstellung von $10^0\ 14'$ an **i**; nun aber nicht Ablesung an der **B-1**, sondern sogleich bei 836 von **B** giebt 471; Resultat also 47,1 m (genauer 47,058 m).

2) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 12,34 m lang, der eine Winkel ist $37^0\ 25'$; was sind die zwei Katheten?

3) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten 8,36 und 16,48 m lang; was ist der Winkel des Dreiecks und wie lang ist die Hypotenuse? ($tg\,\beta = \frac{b}{c}$; dann $a = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{cos\,\beta}$; wie am einfachsten zu rechnen? Prüfe die Hypotenuse auch mit der **D**-Teilung durch $a = \sqrt{b^2 + c^2}$).

4) *Sinus*-Satz im ebenen Dreieck: Eine Seite eines Dreiecks ist 47,35 m lang; die Winkel des Dreiecks sind $77^0\ 20'$ (Gegenwinkel der gegebenen Seite), $37^0\ 25'$ und $65^0\ 15'$. Wie lang sind die zwei andern Seiten?

5) In einem Dreieck sind zwei Seiten 16,5 und 19,7 m lang, der Winkel zwischen beiden ist $62^0\ 5'$; was ist der Flächeninhalt F dieses Dreiecks? ($F = \frac{1}{2} b\,c\,sin\,\alpha$; wie am bequemsten zu rechnen?)

§ 12.

Genauigkeit des Rechenschiebers.

Wichtiger als die praktische Anwendung der § 11 und 10 ist, dass der Leser sich durch eigene Versuche Auskunft verschafft über seine Rechenschieber-Genauigkeit in verschiedenen Stadien seiner Übung in der Rechenschieberanwendung, und zwar hauptsächlich bei den Aufgaben, zu deren Lösung der Rechenschieber vor allem bestimmt ist: einfache Multiplikation und Division, Proportionsrechnung, beliebig zusammengesetzte Multiplikation und Division. Die folgende Betrachtung wird sich auf die einfachsten Fälle beschränken.

1. Wir setzen bei dieser Genauigkeitsbetrachtung einen Rechenschieber voraus, der in Ordnung ist, d. h. bei dem nicht etwa z. B. (bei an sich richtigen Teilungen) die Zunge durch weitres Austrocknen des Holzes u. s. f. kürzer geworden ist als der Stab, so dass wenn man die linke **B-1** an der linken **A-1** anlegt, die rechte **B-1** nicht mit der rechten **A-1** (die rechte **C-1** nicht mit der rechten **D-1**) übereinstimmt; es sollen vielmehr innerhalb der Genauigkeit, mit der man überhaupt zwei scharf gezogene Striche an zwei aneinander verschiebbaren Skalen (mit freiem Auge und Ver-

schiebung von freier Hand) zur Übereinstimmung bringen kann, die Skalenlängen von **A** und **B**, **C** und **D** einander gleich sein, und dies soll auch für alle Zwischenstriche, sowie für die Genauigkeit gelten, mit der jeder einzelne Strich der Skalen an dem ihm zukommenden Ort (Entfernung vom Anfangsstrich der Skale) gezogen ist. (Diese letzte Voraussetzung trifft oft nicht zu; man kann oft mit freiem Auge kleine Unregelmässigkeiten der Teilung konstatiren, ferner sind vielfach die π-Striche nicht genau genug gezogen u. s. f.). Endlich soll auch der Läufer vollständig in Ordnung sein, d. h. er soll (immer unter Voraussetzung derselben Genauigkeitsgrenze) gleichzeitig die Striche $^2/_4$, $^3/_9$, $^4/_{16}$ .... der Teilungen **D/A** decken.

In Beziehung auf die Genauigkeit einer Einstellung oder Ablesung ist es nun selbstverständlich nicht gleichgiltig, ob man bei der Einstellung einen Strich der verschiebbaren Skale auf einen Strich der festen oder auf einen nicht durch einen Strich bezeichneten Punkt zu stellen hat, oder ob man einen nicht durch einen Strich bezeichneten Punkt der beweglichen Skale auf einen ebensolchen Punkt der festen einzustellen hat; ob man bei der Ablesung an einem Strich ablesen kann oder an einem nicht durch einen Strich bezeichneten Punkt abzulesen hat; ob man bei den Einstellungen auf nicht durch Striche bezeichnete Punkte den Läufer benützt oder nicht; ferner kommt wesentlich in Betracht die Zeit, die man einer Einstellung oder Ablesung widmen kann oder will, ob rasch oder langsam gerechnet werden soll, wobei im ersten Fall ein Teil der an sich möglichen Genauigkeit bewusst eingebüsst wird, während im zweiten die Genauigkeit so weit getrieben werden soll, als es der Apparat zulässt; endlich wäre zu berücksichtigen, ob man sich die Skale etwa rein optisch vergrössern will oder nicht (durch eine Lupe), doch soll, wie gleich hier bemerkt sein mag, hier stets nur der zweite Fall (Einstellung und Ablesung mit freiem Auge) vorausgesetzt werden.

2. Ohne alle diese Fälle zu unterscheiden, und mit Beschränkung der Anwenduug des Schiebers auf die einfachsten und wichtigsten Rechnungen, Multiplikation und Division (ohne also auf die **D**-Teilung oder gar die übrigen Teilungen einzugehen), mag unter Zugrundlegung der **A**- und

B-Skale (Teilungseinheit 125 mm) und unter der Annahme, dass mittlere Genauigkeit angestrebt werde (also weder ganz flüchtig, mit Ablesung nur auf zwei Stellen, noch auch mit dem an einzelnen Stellen der Skalen möglichen Versuch der Ablesung auf vier Stellen, gerechnet werden soll), folgende Betrachtung genügen:

Die Stelle für eine bestimmte gegebene Zahl auf einer durch feine Striche geteilten Skale (wobei nun selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass nicht ein Strich selbst die Zahl bezeichne) schätzt man zwischen die Teilstriche hinein mit einer Genauigkeit, die (unter der eben gemachten Annahme über die Geschwindigkeit der Einstellung oder Ablesung) im Mittel etwa $^1/_{20}$ mm beträgt, wenn die Teilstriche nicht über 1 mm von einander entfernt sind, wie es auf den Skalen **A** und **B** des Rechenschiebers (abgesehen von der Stelle zwischen 2 und 3) der Fall ist.

Hat man nun am Rechenschieber $p = a \times b$ oder $q = \frac{a}{b}$ zu bilden, so kommt diese Schätzungsgenauigkeit dreimal in Betracht (bei Einstellung von a, bei Einstellung von b, endlich bei Ablesung von p oder q). In der Ausgleichungsrechnung wird nun gezeigt, dass wenn $\pm m$ den mittlern Fehler bedeutet, dem irgend ein Messungsvorgang ausgesetzt ist, der mittlere Fehler eines Ergebnisses, das durch Summirung oder Subtraktion der Einzelergebnisse des $n$mal ausgeführten Messungsvorgangs entsteht,

$$\pm m \sqrt{n} \text{ beträgt.}$$

Im vorliegenden Fall wäre also die „mittlere Unsicherheit" in der Strecke, die p oder q, d. h. ein aus zwei Faktoren gebildetes Produkt oder eine als einfachen Quotienten zu rechnende Zahl vorstellt, angegeben durch

$$\pm \frac{1}{20} \sqrt{3} \text{ Millimeter} = \pm \frac{1{,}732}{20} \text{ mm} = \pm 0{,}087 \text{ mm}.$$

Diese Fehlerstrecke von $\pm 0{,}05$ mm bei einer einzelnen Einstellung oder Ablesung und demnach $\pm 0{,}087$ mm bei einer einfachen Multiplikation oder Division ist nun aber gemäss der Teilungslänge des Rechenschiebers (Einheit $= 125$ mm) in einen Fehlerkoeffizienten (Unsicherheitskoeffizienten) zu verwandeln. Das logarithmische Differential $\left(d\,lx = \frac{1}{x}\,dx,\right.$ oder hier $d \log x = M \frac{dx}{x} =$

$0{,}4343 \frac{dx}{x}\Big)$ führt sofort zum Ziel; mit Rücksicht auf den Leserkreis dieser Anleitung mag folgende ganz elementare Ableitung genügen:

Denken wir uns eine beliebige Strecke der **A**- und **B**-Teilung, z. B. die Strecken (1)(2), (1)(5), (1)(10) um 0,05 mm $= \frac{1}{20}$ mm zu lang aufgetragen, d. h. (bei 125 mm Teilungslänge) statt der Strecken:

$$125 \times 0{,}30103 = 37{,}629 \text{ mm} \qquad 125 \times 0{,}69897 = 87{,}371 \text{ mm} \qquad 125 \times 1{,}00000 = 125{,}000 \text{ mm}$$

(vgl. § 3, **3.**) aufgetragen als die Strecken:

$$37{,}679 \text{ mm} \qquad 87{,}421 \text{ mm} \qquad 125{,}050 \text{ mm},$$

so kämen, bei Festhaltung von 125,000 mm als Teilungseinheit diese Striche 2, 5, 10 an die Stellen, an denen richtigerweise die Zahlen zu den Logarithmen stehen würden, die, ohne Rücksicht auf die Kommastellung in der Strecke, ohne Rücksicht auf die Kennziffer des Logarithmus, oder also deren Mantissen, so lauten:

$$\frac{37679}{125} = .30143 \qquad \frac{87421}{125} = .69937 \qquad \frac{125050}{125} = .00040;$$

d. h. an Stellen (man benütze zur Aufsuchung dieser Zahlen die 5-stellige Logarithmentafel), wo richtigerweise die Zahlen

2,0019 5,0046 10,0093 und nicht
2,0000 5,0000 10,0000

angeschrieben zu denken wären. Oder, in Verhältniszahlen, die mit 2, 5, 10 bezeichneten Striche würden falsch liegen um

$$\frac{0{,}0019}{2} = 0{,}0009_5 \qquad \frac{0{,}0046}{5} = 0{,}0009_3 \qquad \frac{0{,}0093}{10} = 0{,}0009_3$$

oder also um rund 0,093% oder $\frac{1}{1070}$ des Betrags der an den Strichen stehenden Zahlen. Der Fehler, prozentisch oder als Verhältniszahl ausgedrückt, zeigt sich als konstant (wie auch aus der oben angeschriebenen Differentialformel selbstverständlich viel einfacher hervorgeht). Man benütze, um dies weiter zu begründen, auch die direkte Einstellung und Ablesung der Logarithmen und zugehöriger Zahlen, unter Voraussetzung eines grössern (als des oben angenommenen wirklichen) Fehlers, z. B.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

des zehnmal so grossen 0,5 mm = 1 Teil der **L**-Teilung; mit dieser Fehlerstrecke kann man unter Benützung der **L**- und **D**-Teilung die Konstanz des prozentischen oder verhältnismässigen Fehlers direkt am Stab selbst ablesen. Man findet selbstverständlich das Zehnfache der oben angegebenen, den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Zahlen.

3. Mittlerer Fehler im einfachen Produkte oder Quotienten bei Verwendung von **A** und **B**. Multiplizirt man, wie oben angegeben ist, die für 0,05 mm Fehler bei der Einstellung und Ablesung gefundene Verhältniszahl von $\frac{1}{1070}$ oder 0,093% mit $\sqrt{3} = 1,73$, so erhält man (abgerundet)

$\mathbf{\frac{1}{620}}$ oder **0,16%** des Ergebnisses als mittlern Fehler der einfachen Multiplikation oder Division mit Rechenschieberskalen von 125 mm als Einheit der Teilungslänge.

4. Eigene Versuche. Dieses Ergebnis entspricht der wirklichen Genauigkeit, die man bei mittlerer Übung und bei mittlerer Geschwindigkeit der Rechnung erhält. Man kann aber eigene Genauigkeitsversuche sehr einfach in folgender Art anstellen:

Man rechne eine grössere Anzahl von einfachen (zweizahligen) Produkten und Quotienten mit dem Rechenschieber aus und rechne sodann dieselben Produkte so genau, z. B. mit 5-stelligen Logarithmentafeln, dass diese logarithmische Rechnung als fehlerfrei im Vergleich mit der Rechenschieber-Rechnung gelten darf; bilde sodann die Abweichungen zwischen dem Rechenschieber-Resultat für die Produkte und die Quotienten und deren richtigen Werten, drücke jeden solchen Unterschied als Verhältniszahl (oder in Prozentform) aus (mit Hilfe des Rechenschiebers selbst) und nehme schliesslich aus diesen Verhältniszahlen den quadratischen Mittelwert (d. h. bilde die Quadrate der Verhältniszahlen oder Prozentzahlen, addire sie, dividire die Summe mit n, wenn n Versuche gemacht sind, und ziehe die Wurzel aus), so hat man in dieser Zahl die mittlere Unsicherheit eines mit dem Rechenschieber gerechneten einfachen Produkts oder Quotienten, in Bruchform oder als Prozentzahl des Ergebnisses. Man verfahre also nach folgendem Schema:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Rechenschieber-Resultat	Genaues Ergebnis (mit 5-stell. Log.)	Differenz	Differenz in Bruchform oder in Prozentform des Ergebnisses
$a_1 . b_1 = p_1$	$a_1 . b_1 = \boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_1 - p_1 = d_1$	$e_1 = \frac{d_1}{p_1}$ oder $f_1 = \left(\frac{100 . d_1}{p_1}\right)\,\%$
$a_2 . b_2 = p_2$	$a_2 . b_2 = \boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_2 - p_2 = d_2$	$e_2 = \frac{d_2}{p_2}$ „ $f_2 = \left(\frac{100 . d_2}{p_2}\right)\,\%$
$\frac{a_3}{b_3} = q_3$	$\frac{a_3}{b_3} = \boldsymbol{q}_3$	$\boldsymbol{q}_3 - q_3 = d_3$	$e_3 = \frac{d_3}{q_3}$ „ $f_3 = \left(\frac{100 . d_3}{q_3}\right)\,\%$
$\frac{a_4}{b_4} = q_4$	$\frac{a_4}{b_4} = \boldsymbol{q}_4$	$\boldsymbol{q}_4 - q_4 = d_4$	$e_4 = \frac{d_4}{q_4}$ „ $f_4 = \left(\frac{100 . d_4}{q_4}\right)\,\%$
$a_5 . b_5 = p_5$	$a_5 . b_5 = \boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_5 - p_5 = d_5$	$e_5 = \frac{d_5}{p_5}$ „ $f_5 = \left(\frac{100 . d_5}{p_5}\right)\,\%$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮
$a_n . b_n = p_n$	$a_n . b_n = \boldsymbol{p}_n$	$\boldsymbol{p}_n - p_n = d_n$	$e_n = \frac{d_n}{p_n}$ „ $f_n = \left(\frac{100 . d_n}{p_n}\right)\,\%$.

Bildet man nun:

$$\Sigma e^2 = e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2 + \ldots + e_n{}^2 \qquad \text{oder}$$

$$\Sigma f^2 = f_1{}^2 + f_2{}^2 + f_3{}^2 + \ldots + f_n{}^2,$$

so ist E (der mittlere Fehler der einfachen Multiplikation oder Division, als Verhältniszahl) oder F (der mittlere Fehler in Prozentform):

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n}}\,; \qquad F = \sqrt{\frac{\Sigma f^2}{n}}\ \%.$$

5. Produkte oder Quotienten aus mehr als zwei Zahlen. Bei mehr als zwei Faktoren u. s. f., ist der mittlere Fehler des Produkts oder Quotienten, wenn zusammen k Faktoren und Divisoren da sind, mit Zugrundlegung der oben angegebenen Zahlen:

$$\frac{1}{1070}\sqrt{k+1} \quad \text{oder} \quad (0{,}093\sqrt{k+1})\ \% \text{ des Resultats.}$$

Doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden, ebensowenig auf die **D**-Skale in ihrer Verbindung mit **C** (man stelle hier selbst die Zahlen auf) oder in der Verbindung mit **A**.

6. Das Ergebnis in **3**. entspricht, wie mehrfach angegeben, mittlerer Rechnungsübung und mittlerer Rechnungsgeschwindigkeit. Bei grosser Übung lässt sich (wie dadurch bei derselben Rechnungs-

genauigkeit die Geschwindigkeit der Rechnung erhöht wird, so auch) bei langsamerem Rechnen die Genauigkeit noch bedeutend steigern. Es lassen sich für den Fall einfacher Multiplikation, der dem Ergebnis in **3.** zu Grund liegt, Genauigkeiten von 0,12%, 0,10%, selbst 0,08% $\left(\frac{1}{800}, \frac{1}{1000}, \text{ selbst } \frac{1}{1200}\right)$ erreichen. Anderseits muss allerdings der Anfänger und der mit dem Rechenschieber wenig Geübte sich mit Genauigkeiten von $\frac{1}{500}$ oder $\frac{1}{400}$ (0,2 oder 0,25%) begnügen. Mit einer solchen Genauigkeit von $\frac{1}{500}$ oder $\frac{1}{400}$ wird sich u. U. auch der geübte Rechner begnügen, wenn er *sehr rasch* rechnen will; es giebt Anwendungen genug, in denen diese Genauigkeit noch vollständig ausreicht, und man darf sagen, dass dieser Fall möglichst *rascher* Rechnung (und, damit verbunden, bewusster verminderter Genauigkeit der Ergebnisse) für den Gebrauch des Rechenschiebers noch *wichtiger* ist, als der Fall langsamer Rechnung (und möglichst weit getriebener Genauigkeit). Denn die *Schnelligkeit* der Rechnung, neben ihrer Bequemlichkeit, muss dem Rechenschieber für die Genauigkeitsstufe, für die er überhaupt in Betracht kommen kann, seinen Vorrang sichern.

7. *Jedem Besitzer und Benützer* eines Rechenschiebers ist nochmals *dringend zu raten*, in *verschiedenen Stadien seiner Übung* und bei *verschiedenen Rechnungsgeschwindigkeiten* selbst Versuche über die von ihm erlangte und zu erlangende Genauigkeit anzustellen, wozu in **4.** vollständige Anleitung gegeben ist. Das Individuum kommt dabei selbstverständlich in Betracht, viel mehr, als oft angenommen wird. Solche eigene Versuche bieten das beste Mittel zur Beurteilung der Möglichkeit der Anwendung des Rechenschiebers in dem oder jenem Fall und zur Wahl der Rechnungsart mit dem Schieber.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN