



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Inhalts-Verzeichnis.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

## Inhalts-Verzeichnis.

Vorbemerkungen . . . . .	Seite 1
--------------------------	------------

### Abschnitt I.

#### Schwerpunktsbestimmungen für ebene Flächen.

Allgemeine Formel . . . . .	9
Verschiedene Profile . . . . .	10
Guldinsche Regel für Drehungskörper . . . . .	12
Halbkreisfläche, halber Kreisring, Kreisabschnitt . . . . .	13
Guldinsche Regel für Drehungsflächen . . . . .	15
Kreisbogen, Kreissektor, Ringsektor . . . . .	16
Ellipsensegmente . . . . .	18
Flächen mit Ausschnitten . . . . .	18
Anwendungen auf abgeschrägte Körper, Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks, Centrifugalkraft u. s. w. . . . .	19
Graphische Schwerpunktsbestimmungen . . . . .	21

### Abschnitt II.

#### Die einfachsten Trägheitsmomente ebener Flächen.

Begriff des axialen Trägheitsmoments . . . . .	25
Veranschaulichung durch das statische Moment abgeschrägter Körper . . . . .	25
Veranschaulichung durch parabolisch begrenzte Körper . . . . .	27
Satz über die Parallelverschiebung . . . . .	28
Einfache Beispiele. Dreieck, Rechteck, Parallelogramm . . . . .	29
Begriff des polaren Trägheitsmoments . . . . .	31
Einfache Beispiele, Rechteck, Dreieck, regelmäßiges Vieleck, Ellipse . . . . .	32
Veranschaulichung des polaren Trägheitsmoments . . . . .	34
Dynamisches Trägheitsmoment . . . . .	35
Anwendungen auf Energie drehender Massen, physisches Pendel, excentrischen Stofs, Hydrostatik, Festigkeitslehre . . . . .	36
Schwerpunkt abgeschrägter Prismen und Cylinder . . . . .	38
Schwerpunkt halber Drehungskörper und Centrifugalkraft für solche . . . . .	39
Schwerpunkt des Meridianskeils der Kugel . . . . .	40

## Abschnitt III.

Trägheitsmomente für die wichtigeren Querschnittsformeln  
des Bau- und Maschinenwesens.

	Seite
A. Die Momente . . . . .	42
Rechteck, Quadrat, Gurtungen, I-Eisen . . . . .	43
+-Eisen, C-Eisen, T-Träger, F-Eisen . . . . .	44
Dreieck und Trapez . . . . .	47
Regelmäßiges $n$ -Eck . . . . .	48
Kreisfläche und Kreisring . . . . .	49
Halbkreisfläche und Halbkreisring . . . . .	50
Flügelachse, Viertelkreis, Kreis-Ausschnitt und -Abschnitt . . . . .	50
Ellipse, Halbellipse, elliptischer Ring . . . . .	52
B. Bemerkungen und numerische Beispiele . . . . .	55
Vernietete Träger . . . . .	55
Trägheits- und Widerstandsmomente für Träger und Säulen . . . . .	56
Schleifstein und Schwungrad . . . . .	58
Beschleunigung drehender Massen . . . . .	59
Schwingungen physischer Pendel . . . . .	60
Cylindrische Triebwellen . . . . .	61

## Abschnitt IV.

## Centrifugal- und Trägheitsmomente für beliebige Achsen.

Der Drehungssatz . . . . .	65
Begriff und Veranschaulichung des Centrifugalmoments . . . . .	66
Centrifugalmoment für Rechteck und Kreis . . . . .	67
Anwendung des Centrifugalmoments auf die Schwerpunktsbestimmung ab- geschrägter Körper . . . . .	68
Halbkreis, Halbellipse und symmetrische Fläche . . . . .	69
Schwerpunkt Guldinscher Drehungskörper . . . . .	70
Der Drehungskörper im Symmetriefalle . . . . .	71
Andere Deutungen des Centrifugalmoments . . . . .	72
Dreieck und Viertelkreis . . . . .	73
Fälle, in denen das Centrifugalmoment verschwindet . . . . .	75
Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment . . . . .	76
Trägheitsradius . . . . .	77
Satz über ringförmige Körper . . . . .	78
Radius des Centrifugalmoments . . . . .	80
Satz von der Trägheitsellipse . . . . .	82
Folgerungen dieses Satzes (Hauptachsen und Gleichheitsachsen) . . . . .	83
Centralellipse . . . . .	84
Hauptachsenlage beliebiger Trägheitsellipsen . . . . .	85
Rechteck, Halbkreis, gleichschenkliges Winkeleisen . . . . .	87
Centrifugalmoment für die Gleichheitsachsen . . . . .	89
Drehungssatz für das Centrifugalmoment . . . . .	89
Bestimmung der Hauptträgheitsachsen . . . . .	90
Lemniskate des Centrifugalmoments . . . . .	92
Die Fixpunkte oder Punkte konstanten Trägheitsmoments . . . . .	96

	Seite
Die Culmannsche Trägheitsellipse . . . . .	98
Beispiel des ungleichschenkligen Winkeleisens . . . . .	99
Centralellipse für einige Querschnitte . . . . .	105
Grenzmomente für den Viertelkreis und Achtelkreis . . . . .	105
Eine Beziehung zwischen Trägheits- und Centrifugalmoment . . . . .	107

## Abschnitt V.

### Einige Hilfsmittel der Elementarmathematik.

(Methode der unendlich dünnen Schichten.)

A. Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung	109
Anwendungen auf Mechanik . . . . .	115
Beispiel des Trapezes, der Parabeln zweiter und höherer Ordnung . .	115
B. Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Größe . . . . .	119
Anwendung auf unendliche Reihen . . . . .	121
Anwendungen auf die Mechanik der Halbkugel und Kugel . . . . .	122
Stoß gegen die Erdkugel . . . . .	125
Rollen auf schiefer Ebene, kosmisches Problem . . . . .	128
Allgemeine Folgerungen . . . . .	129
C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten	131
Flächenberechnung mit Hilfe der Entwicklung in unendliche Reihen	131
Konstruktion der Parabeln höherer Ordnung . . . . .	135
Mariottesches, adiabatisches und Potential-Diagramm . . . . .	136
Parabolische Berechnungen . . . . .	137
Tabelle über die Parabeln höherer Ordnung . . . . .	141
Beispiel der Neilschen Parabel . . . . .	144
Restfläche der gewöhnlichen Parabel . . . . .	145
Hakenquerschnitt . . . . .	145
Die gleichseitige Hyperbel, ihre Fläche und ihre verschiedenen Momente	146
Die Gravitationscurve, Fläche und Momente . . . . .	149
Die logarithmische Linie, Fläche und Momente . . . . .	150
D. Die Schichtenformel für concentrische Kreisbogen . . . . .	157
Polarmomente 1. und 2. Ordnung . . . . .	157
Beispiel des Kreises, des Sektors und der Halbkreisfläche . . . . .	158
Archimedische und andere Spiralen . . . . .	160
Kreisbogen und Kreissektor . . . . .	162
Kreisabschnitt, Ringsektor . . . . .	164
E. Einige Aufgaben über Maxima und Minima . . . . .	167
Der Querschnitt größter Tragfähigkeit, aus verschiedenen Flächen ausgeschnitten . . . . .	167
Berechnung der Hauptachsen der Trägheit auf andere Art . . . . .	169
F. Verallgemeinerte Simpsonsche Regel . . . . .	171
Anwendung auf Flächen, Körper, statische Momente, Trägheitsmomente und dgl . . . . .	172

## Abschnitt VI.

**Anwendungen der lemniskatischen Abbildung auf die  
Bestimmung polarer Trägheitsmomente und polarer Momente  
erster Ordnung.**

	Seite
Die lemniskatische Abbildung . . . . .	174
Ihr isogonaler (konformer) Charakter. . . . .	177
Anwendung auf die Berechnung von Trägheitsmomenten, Flächen, Potential- werten, Kurvenlängen und Polarmomenten erster Ordnung . . . . .	179
Die Doppelschar gleichseitiger Hyperbeln . . . . .	182
Die konfokalen Lemniskaten und das Bündel gleichseitiger Hyperbeln . . . . .	187
Die Doppelschar konfokaler Parabeln . . . . .	188
Anwendungen auf Dreieck, Rechteck, parabolische Sektoren, Hyperbel- segmente, Cardioiden, u. s. w. . . . .	189
Hyperbel und Lemniskate als reciproke Kurven. . . . .	195
Cardioide und Parabel als reciproke Kurven . . . . .	195
Das Gesamtergebn des Abschnittes . . . . .	196
Physikalische Betrachtungen . . . . .	196

## Abschnitt VII.

**Graphostatische Methoden zur Bestimmung von Trägheits-  
und Centrifugalmomenten.**

A. Graphische Methode von Nehl's zur Bestimmung des statischen Momentes und Trägheitsmomentes einer Fläche . . . . .	200
B. Graphische Methode von Mohr mit Hilfe des Kräfteplans und des Kräftepolygons . . . . .	203
C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hilfskreises gestützt . . . . .	205
D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land . . . . .	209
E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse . . . . .	211
Geometrische Vorbemerkung . . . . .	211
Antipol der Geraden und Antipolare des Punktes in Bezug auf eine Ellipse . . . . .	212
Eigenschaften der Tangenten Culmannscher Trägheitsellipsen und ent- sprechender Konstruktionen . . . . .	215
Auftreten konfokaler Kegelschnitte . . . . .	218
Auftreten von Lemniskaten und Hyperbeln . . . . .	220
F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche durch drei Massen- punkte nach Reye. . . . .	222
Der allgemeine Fall . . . . .	222
Der Sonderfall gleicher Massenpunkte . . . . .	227
Beispiele: Dreieck, Rechteck, Parallelogramm . . . . .	229
Kreis, Ellipse . . . . .	231
Schlussbemerkungen zu den graphischen Methoden. . . . .	232

## Abschnitt VIII.

**Schwerpunkte und statische Momente homogener Körper.**

	Seite
Polare, axiale und Planmomente erster Ordnung . . . . .	233
Beispiel der Halbkugel . . . . .	233
Schwerpunkt eines Systems homogener Massenpunkte . . . . .	234
Allgemeine Sätze . . . . .	237
Körper von der Ordnung Null. . . . .	238
Körper erster Ordnung und ihre Stumpfe . . . . .	238
Körper zweiter Ordnung . . . . .	239
Kugelsektor . . . . .	240
Stumpfe der Körper zweiter Ordnung . . . . .	241
Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade. . . . .	242
Querschnitte höheren Grades . . . . .	251
Negative und gebrochene Exponenten . . . . .	253
Schraubengewinde . . . . .	254
Parabolisch abgeschnittene Körper. . . . .	256
Anwendungen der Schwerpunktslehre auf Stabilität, Auftrieb bei schwimmenden Körpern, Pendel, einfache Maschinen, kosmische Massen u. dgl. . . . .	257

## Abschnitt IX.

**Die Trägheits- und Centrifugalmomente der wichtigsten Körper.**

A. Allgemeines über Planmomente, Axialmomente und Polarmomente zweiter Ordnung . . . . .	262
B. Die einfachsten Formen, besonders von der Ordnung Null. . . . .	265
Prisma, Cylinder, Anwendung auf Atwoods Fallmaschine. . . . .	265
Anwendung auf Fadenspannung bei von Fäden ablaufenden Cylindern. . . . .	268
Anwendung auf Körper, die zugleich rollen und gleiten . . . . .	271
Korrektur des Reibungswinkels bei solchen Problemen . . . . .	272
Rollen und Gleiten der Kugel auf schiefer Ebene . . . . .	273
Rollen und Gleiten des Cylinders auf horizontaler Ebene . . . . .	274
Rollen und Gleiten beliebig gestalteter Körper auf schiefer Ebene. . . . .	278
Ein dynamisches Übungsbeispiel . . . . .	280
Senkrechte Prismen und Cylinder, Veranschaulichung ihrer Trägheitsmomente . . . . .	282
Konstruktion der Ausdrücke $a^n$ . . . . .	283
C. Körper von der Ordnung 1. . . . .	283
Dreieckskörper . . . . .	284
Drehungsparaboloid . . . . .	285
D. Körper von der Ordnung 2. . . . .	286
Senkrechte Kreisegel . . . . .	286
Parabolischer Cylinder . . . . .	287
E. Körper gemischter Ordnung bis zur zweiten Potenz . . . . .	288
Drehungsellipsoid . . . . .	289
Dreiaxsiges Ellipsoid . . . . .	290
Segmente und Schichten der Kugel und des Ellipsoids . . . . .	291
Hyperboloid . . . . .	294

	Seite
F. Einige Körper höherer Ordnung . . . . .	295
Allgemeine Körper $n^{\text{ter}}$ Ordnung . . . . .	295
Drehungskörper höherer Ordnung . . . . .	296
Der Drehungskörper mit symmetrischer Schnittfläche . . . . .	297
G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen . . . . .	298
Hilfsaufgaben . . . . .	298
Trägheitsmoment für beliebig gerichtete Achsen . . . . .	300
Bedeutung des Centrifugalmoments . . . . .	300
Das Trägheitsellipsoid . . . . .	301
Bestimmung der Hauptachsen aus gegebenen Momenten . . . . .	303
Dynamische Bedeutung der Hauptachsen . . . . .	304
Symmetriefälle . . . . .	304
Beziehungen zwischen Plan-, Axial- und Polarmomenten . . . . .	306
Verschiebungssätze . . . . .	307
Drehungssatz für Planmomente . . . . .	308
Möglichkeit von Fixpunkten . . . . .	309
Fixpunkte bei regelmässigen Prismen . . . . .	310
Bemerkungen über Planmomente . . . . .	311
Beispiele von Centrifugalmomenten . . . . .	312
Das zweite Central-Ellipsoid . . . . .	315
Anwendbarkeit der Lehre von den Trägheits- und Centrifugalmomenten . . . . .	317

---

### X. Anhang.

Die Schwungradtheorie als elementares Beispiel . . . . .	319
A. Das Schwungrad als Ansammler der Energie . . . . .	320
B. Schwungrad und Centrifugalkraft . . . . .	325
C. Die ausgleichende Arbeit des Schwungrades bei der einfachen Kurbelbewegung . . . . .	326

---

