



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Abschnitt I. Schwerpunktsbestimmungen für ebene Flächen.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

## Abschnitt I.

### Schwerpunktsbestimmungen für ebene Flächen.

1) In der technischen Festigkeitslehre sind die Querschnitte von Trägern auf die Lage ihrer Biegungsachsen zu untersuchen. Diese Achsen gehen stets durch den Schwerpunkt der Fläche, und auf sie werden die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente bezogen. Auch für Untersuchungen aus dem Gebiete der Centrifugalkraft und eine Reihe anderer Gegenstände der Mechanik ist die Kenntnis der Flächenschwerpunkte nötig. Die Bestimmung ihrer Lage kann auf verschiedene Weise erfolgen.

Man kann z. B. folgenden Satz der Mechanik benutzen: Die Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile ist gleich dem statischen Momente der Gesamtfläche.

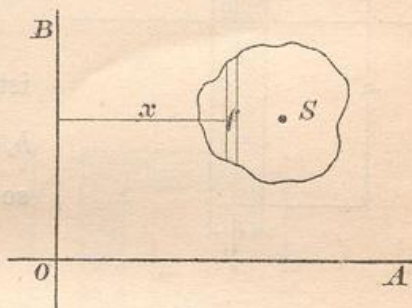
In Fig. 1 seien  $OA$  und  $OB$  beliebig gewählte Koordinatenachsen. Man zerlege die gegebene Fläche in lauter senkrechte Streifen  $f$ . Die Entfernung jedes unendlich schmal zu denkenden Streifens von der  $y$ -Achse  $OB$  sei gleich  $x$ , so daß  $fx$  das statische Moment des Streifens in Bezug auf die  $Y$ -Achse ist. Das gesamte statische Moment der Fläche ist also eine Summe solcher Ausdrücke  $fx$ , die mit  $\sum fx$  bezeichnet werden soll. Ist nun  $S$  der Schwerpunkt der Fläche  $F$  und  $x_s$  sein Abstand von der Achse  $OB$ , so ist das statische Moment der Fläche auch gleich  $x_s F$ , so daß

$$x_s F = \sum fx$$

ist. Daraus folgt als Schwerpunktsabstand

$$x_s = \frac{\sum fx}{F}$$

Fig. 1.





Bezeichnet man das Moment in Bezug auf die  $Y$ -Achse mit  $M_y$ , das in Bezug auf die  $X$ -Achse genommene, welches mit Hilfe von Horizontalstreifen berechnet wird, mit  $M_x$ , so hat man die Gleichungen

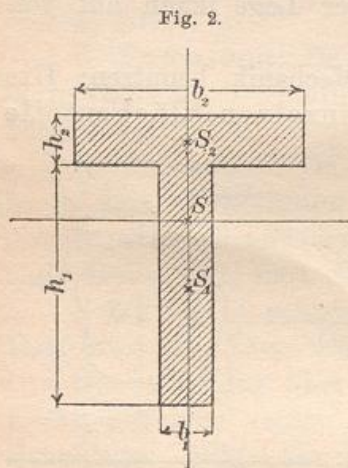
$$x_s = \frac{M_y}{F}, \quad y_s = \frac{M_x}{F},$$

die zur Bestimmung des Schwerpunkts genügen.

**Bemerkung.** Verschiebt man die  $Y$ -Achse um  $-e$ , so geht  $\sum fx$  über in  $\sum f(x+e) = \sum fx + \sum fe = \sum fx + eF$ , d. h. das statische Moment der Fläche wächst um  $eF$ . Davon kann man bisweilen Anwendung machen.

2) Ist der Schwerpunkt einzelner Flächenteile durch Symmetrieverhältnisse ohne weiteres bestimmt, so treten Vereinfachungen ein.

**Beispiel.** Für den  $\Gamma$ -Träger kann die Bestimmung folgendermaßen geschehen.



In Bezug auf die Grundlinie  $b_1$  ist in Fig. 2 die Summe der statischen Momente der Einzelrechtecke  $F_1$  und  $F_2$  gleich dem Momente der Gesamtfläche  $F$ , also ist

$$h_s F = e_1 F_1 + e_2 F_2,$$

wo

$$e_1 = \frac{h_1}{2}, \quad e_2 = h_1 + \frac{h_2}{2} = \frac{2h_1 + h_2}{2}$$

ist. Man erhält

$$h_s (b_1 h_1 + b_2 h_2) = \frac{h_1}{2} b_1 h_1 + \frac{2h_1 + h_2}{2} b_2 h_2,$$

so daß

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

ist. Daß der Schwerpunkt in der Symmetrieachse liegt, ist selbstverständlich.

3) Für das in Fig. 3 dargestellte Winkeleisen ist ebenso

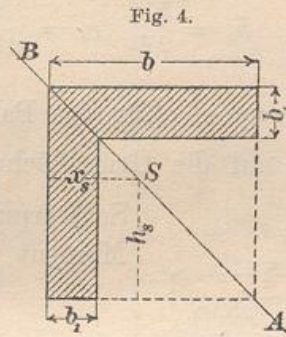
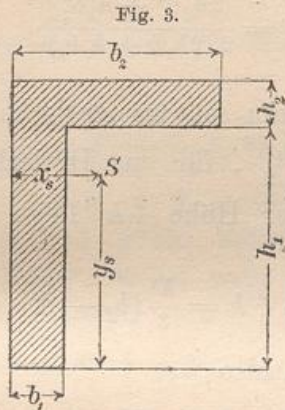
$$y_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Für  $x_s$  erhält man auf entsprechendem Wege

$$x_s = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2 (b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$



Findet wie in Fig. 4 Symmetrie gegen die Gerade  $AB$  statt, so braucht man nur  $x_s$  zu berechnen. Dabei ist  $BS = x_s \sqrt{2}$ . Ein-



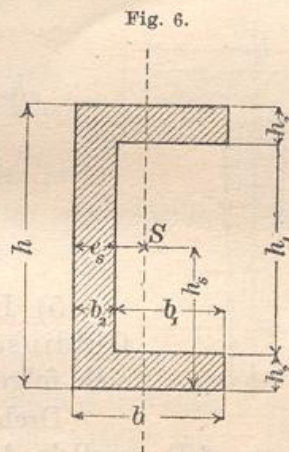
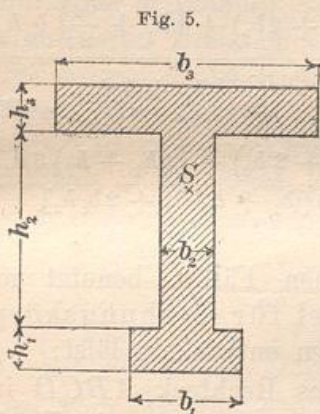
facher ergibt sich jetzt  $h_s$  auf folgendem Wege: Es handelt sich um die Differenz zweier Quadrate, so daß man direkt schreiben kann

$$h_s = \frac{b^3 - b_2^3}{2(b^2 - b_2^2)}$$

oder auch, indem man oben und unten durch  $b - b_2$  dividiert,

$$h_s = \frac{b^2 + bb_2 + b_2^2}{2(b + b_2)},$$

wobei  $b - b_1 = b_2$  gesetzt ist.



In entsprechender Weise ergibt sich für Fig. 5 unter Benutzung der Grundlinie als Achse der Momente die Schwerpunkthöhe

$$h_s = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2) + b_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}.$$



Für das  $\square$ -Eisen (lies U-Eisen) wird (Fig. 6)

$$h_s = \frac{h}{2}, \quad e_s = \frac{\frac{2h_2 b^2}{2} + \frac{h_1 b_2^2}{2}}{2h_2 b + h_1 b_2} = \frac{2h_2 b^2 + h_1 b_2^2}{2(2h_2 b + h_1 b_2)}.$$

4) Trapez. Für das Parallelogramm ist das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche gleich  $\frac{b_1 h^2}{2}$ , für das Dreieck, dessen

Schwerpunkt in der Höhe  $\frac{2}{3} h$  liegt, ist das Moment

$$\frac{b_2 - b_1}{2} h \cdot \frac{2}{3} h = \frac{h^2}{3} (b_2 - b_1),$$

das Gesamtmoment also

$$\frac{3 b_1 h^2 + 2 h^2 (b_2 - b_1)}{6} = \frac{h^2}{6} (b_1 + 2 b_2).$$

Die Schwerpunkthöhe wird daher

$$h_s = \frac{\frac{h^2}{6} (b_1 + 2 b_2)}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} = \frac{h (b_1 + 2 b_2)}{3 (b_1 + b_2)}.$$

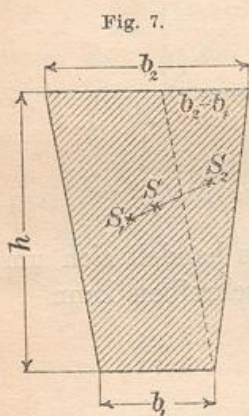


Fig. 7.

Der Schwerpunkt liegt stets auf der einen Mittellinie des Trapezes, mag es symmetrisch oder unsymmetrisch sein.

Für den nebenstehenden Querschnitt wird

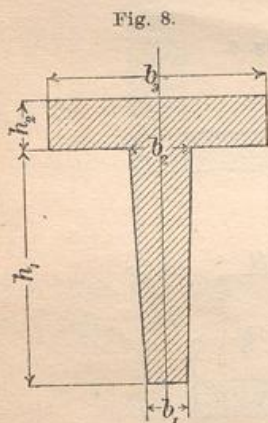


Fig. 8.

$$h_s = \frac{\frac{h_1^2}{6} (b_1 + 2 b_2) + \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) b_2 h_2}{\frac{b_1 + b_2}{2} h_1 + b_2 h_2} = \frac{h_1^2 (b_1 + 2 b_2) + (2 h_1 + h_2) 3 b_2 h_2}{3 [(b_1 + b_2) h_1 + 2 b_2 h_2]}.$$

5) In einzelnen Fällen benutzt man die Guldinsche Regel für Drehungskörper, die sich folgendermaßen entwickeln lässt:

Dreht man das Rechteck  $ABCD$  in Fig. 9 um eine zu  $AD$  parallele Achse  $KL$ , so entsteht ein Hohlzylinder vom Inhalte

$$J = \pi (r^2 - r_1^2) h = \pi (r + r_1) (r - r_1) h = 2 \pi \frac{r + r_1}{2} b h = 2 \pi \varrho F,$$

wo  $F$  die Rechtecksfläche und  $\varrho$  ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.



Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen  $F_1, F_2, F_3$  u. s. w., deren Schwerpunktsabstände  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2\varrho_1\pi F_1 + 2\varrho_2\pi F_2 + 2\varrho_3\pi F_3 + \dots,$$

oder

$$J = 2\pi [\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \dots].$$

Ist nun  $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$  die Gesamtfläche und  $\varrho$  ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

$$\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \dots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2\varrho\pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, daß  $S$  als Punkt mittleren Abstandes von der Achse  $KL$  den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so daß der Körperinhalt ist: bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

Kennt man nun den Flächeninhalt  $F$  und den Inhalt  $J$  des durch die Drehung entstehenden Körpers, so ergibt sich der eine Schwerpunktsabstand als

$$\varrho = \frac{J}{2\pi F}.$$

6) Halbkreisfläche. Durch Drehung um  $AB$  würde eine Kugel vom Inhalte  $\frac{4}{3}r^3\pi$  entstehen, die Fläche ist:  $F = \frac{r^2\pi}{2}$ , der Schwerpunktsabstand wird

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{2\pi \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Fig. 9.

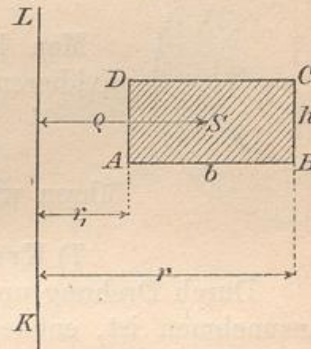


Fig. 10.

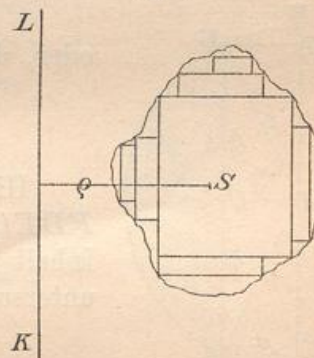
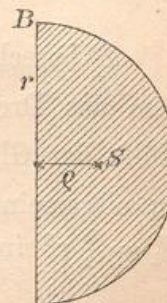


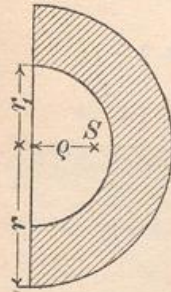
Fig. 11.





Halber Kreisring. Die entsprechende Betrachtung giebt

Fig. 12.



$$\varrho = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)}{2\pi \frac{(r^2 - r_1^2)\pi}{2}} = \frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi(r^2 - r_1^2)}$$

Man könnte noch oben und unten durch  $r - r_1$  dividieren, was auf

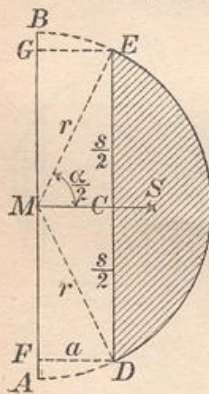
$$\varrho = \frac{4(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{3\pi(r + r_1)}$$

führen würde.

7) Kreis-Segment vom Radius  $r$  und der Sehne  $s$ .

Durch Drehung um den Durchmesser  $AB$ , der zur Sehne parallel anzunehmen ist, entsteht ein Körper, dessen Inhalt gleich dem einer Kugel mit dem Radius  $CD = \frac{s}{2}$  ist. Die Formel für die Kugelschicht von der Höhe  $s$  ist nämlich (Method. Lehrbuch, II, Stereom. 46)

Fig. 13.



$$J_1 = \frac{\pi s}{6} (3a^2 + 3b^3 + s^2),$$

oder, da hier  $a = b = FD = GE$  ist,

$$J_1 = \frac{\pi s}{6} (6a^2 + s^2) = \pi a^2 s + \frac{\pi s^3}{6}$$

Hiervon ist der durch Drehung des Rechtecks  $FDEG$  entstehende Cylinder abzuziehen, dessen Inhalt gleich  $a^2\pi s$  ist. Demnach bleibt für den zu untersuchenden Körper übrig

$$J = \frac{\pi s^3}{6}$$

Demnach wird der Schwerpunktsabstand

$$\varrho = \frac{\frac{\pi s^3}{6}}{2\pi F} = \frac{s^3}{12F}$$

$F$  berechnet sich mit Hülfe des Sektors  $MDE = r^2\pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ , von dem das Dreieck  $MDE$  abzuziehen ist. Hier bestimmt sich  $\alpha$  mit Hülfe der Gleichung  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ . Der Inhalt des Dreiecks kann, da im allgemeinen die Trigonometrie doch nicht zu vermeiden ist, als  $F_1 = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$  angegeben werden, so daß

$$F = r^2\pi \frac{\alpha}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha = \frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\alpha}{180} - \sin \alpha \right)$$



einzusetzen ist. Die Schlusformel also wird

$$\varrho = \frac{s^3}{6r^2 \left( \pi \frac{\alpha}{180} - \sin \alpha \right)},$$

wo  $\alpha$  aus  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$  zu bestimmen ist.

9) Bisweilen kann man eine Methode verwenden, bei der die Kenntnis der **Guldinschen Regel für Drehungsflächen** nöthig ist.

Man kann diese folgendermaßen entwickeln.

Wird die Gerade  $AB$  von der Länge  $s$  um eine Achse  $KL$  derselben Ebene gedreht, so entsteht der Kegelmantel

$$M = (r + r_1)\pi s = 2 \frac{r + r_1}{2} \pi s = 2 \varrho \pi s,$$

wo wiederum  $\varrho$  der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner  $s_1, s_2, s_3, \dots$  die Längen der Geraden,  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$  ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

$$\begin{aligned} M &= 2 \varrho_1 \pi s_1 + 2 \varrho_2 \pi s_2 + 2 \varrho_3 \pi s_3 + \dots \\ &= 2 \pi [\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \dots]. \end{aligned}$$

Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit  $\varrho s$ , wo

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \dots$$

die Länge des gesamten Linienzugs,  $\varrho$  sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$$M = 2 \varrho \pi s = \text{Schwerpunktsweg} \\ \text{mal Länge des Linienzugs.}$$

Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

Kennt man die Drehungsfläche  $F$  und die Bogenlänge  $b$ , so ergibt sich für den Schwerpunkt der Achsenabstand

$$\varrho = \frac{F}{2\pi b}.$$

Fig. 14.

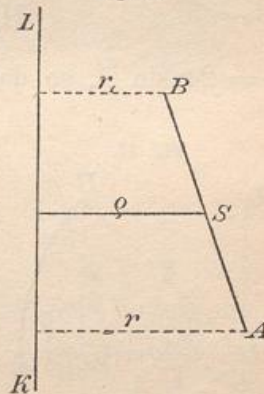
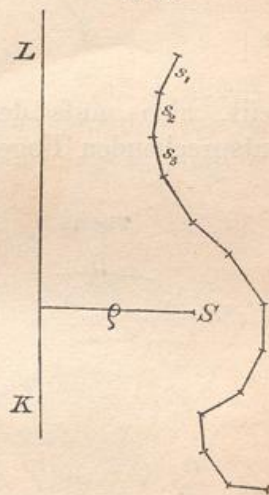


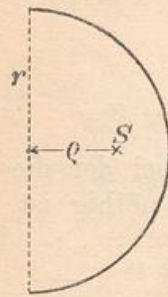
Fig. 15.





9) Für den Halbkreisbogen ist

Fig. 16.



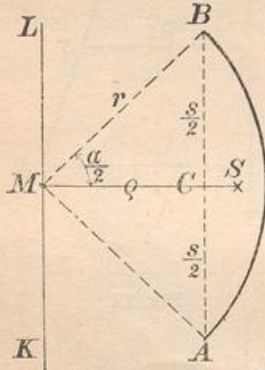
$$q = \frac{4r^2\pi}{2\pi b} = \frac{4r^2\pi}{2\pi \cdot r\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

Für den Kreisbogen  $b$  vom Radius  $r$ , dessen Sehne sich als  $s$  berechnet, giebt die Drehung um  $KL$  eine Kugelzone von der Fläche  $2r\pi s$ . Demnach ist die Schwerpunktsentfernung von  $M$  aus gerechnet (Fig. 17)

$$q = \frac{2r\pi s}{2\pi b} = \frac{rs}{b}$$

Hier ist  $b : r\pi = \alpha^\circ : 180^\circ$ , d. h.  $\alpha = \frac{b}{r\pi} 180^\circ$ , und  $s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ , so dafs man schreiben kann

Fig. 17.



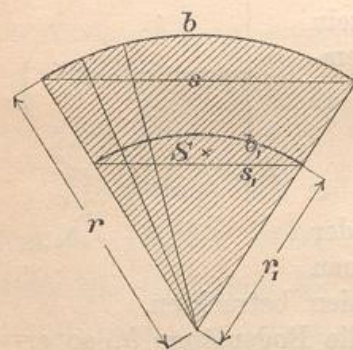
$$q = \frac{2r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b}$$

wo  $\alpha = \frac{b}{r\pi} 180^\circ$  ist.

10) Dieses Resultat kann für Flächen benutzt werden, z. B. für den Kreissektor mit Radius  $r$  und Bogen  $b$ .

Denkt man sich diesen in zahlreiche „Dreiecke“ zerlegt, deren Basis man dann als geradlinig annehmen darf, so liegen die Einzelschwerpunkte in der Entfernung  $\frac{2}{3}r$  von  $M$ . Bei gleichen Teilsektoren liegen sie gleichmäfsig verteilt, also mufs der Schwerpunkt der Gesamtfläche mit dem des entsprechenden Bogens übereinstimmen. Man erhält

Fig. 18.



$$q = \frac{r_1 s_1}{b_1} = \frac{\frac{2}{3} r \frac{2}{3} s}{\frac{2}{3} b} = \frac{2rs}{3b}$$

oder

$$q = \frac{2r \cdot 2r \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \cdot 2r\pi \frac{\alpha}{360}} = \frac{240r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$$

Über  $s$  ist dieselbe Bemerkung zu machen, wie vorher.

Man kann das Resultat auch mit Hülfe des Kreissegments und des Dreiecks finden.

Für  $\alpha = 180^\circ$  ergibt sich das unter 6) für den Halbkreis abgeleitete Resultat.



11) Sektor der Ringfläche mit  $r, r_1$ , äußerem Bogen  $b$  und zugehöriger Sehne  $s$ .

Jeder Teilsektor kann als Trapez mit den Seiten  $\frac{b_1}{n}$  und  $\frac{b}{n}$  betrachtet werden, so daß  $h_s = \frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b}{b_1 + b}$  ist, denn der Faktor  $\frac{1}{n}$  hebt sich weg. Da aber  $b_1 = b \frac{r_1}{r}$  ist, so erhält man, indem man  $r - r_1$  für  $h$  setzt,

$$h_s = \frac{r - r_1}{3} \frac{b \frac{r_1}{r} + 2b}{b \frac{r_1}{r} + b} = \frac{r - r_1}{3} \frac{r_1 + 2r}{r_1 + r}.$$

Die Schwerpunkte der Teile liegen also auf einem Bogen vom Radius

$$\begin{aligned} r_s = r_1 + h_s &= \frac{3r_1(r + r_1) + (r - r_1)(r_1 + 2r)}{3(r + r_1)} \\ &= \frac{2}{3} \frac{r^2 + rr_1 + r_1^2}{r + r_1}, \end{aligned}$$

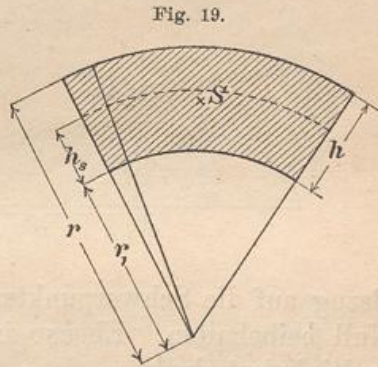


Fig. 19.

mit dem wie vorher zu verfahren ist. Man kann übrigens, indem man oben und unten mit  $(r - r_1)$  multipliziert, auch schreiben  $\frac{2}{3} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$ . Das Resultat ist nach 9)

$$x = \frac{r_s s_s}{b_s} = \frac{2s}{3b} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2},$$

denn es ist  $\frac{s_s}{b_s} = \frac{s}{b}$ .

Ebenso einfach führt folgender Weg zum Ziele. Sind  $S$  und  $S_1$  die beiden Sektorflächen,  $\varrho$  und  $\varrho_1$  ihre Schwerpunktsradien, so ist für die Ringfläche  $F$  und ihre Schwerpunktsentfernung  $x$  (von  $M$  aus gerechnet)

$$xF = \varrho S - \varrho_1 S_1,$$

also

$$x = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{F} = \frac{\varrho S - \varrho_1 S_1}{S - S_1}.$$

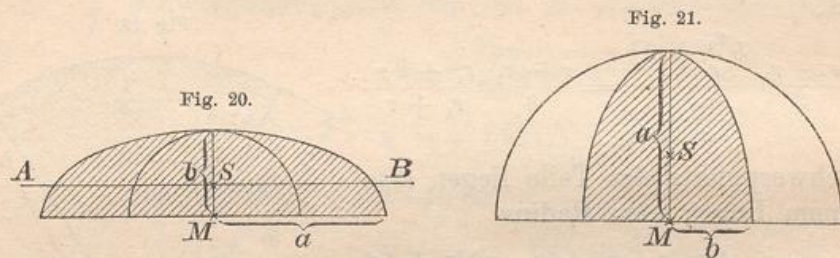
Hier ist  $S_1 = S \frac{r_1^2}{r^2}$ , also, da auch  $\varrho : \varrho_1 = r : r_1$  ist,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho S - \frac{r_1}{r} \varrho S \frac{r_1^2}{r^2}}{S - S \frac{r_1^2}{r^2}} = \frac{\varrho}{r} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{\frac{2}{3} r s}{r} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} = \frac{2s}{3b} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} \\ &= \frac{2 \cdot 2r \sin \frac{\alpha}{2} r^3 - r_1^3}{3 \cdot 2r\pi \frac{\alpha}{360} r^2 - r_1^2} = \frac{240 \sin \frac{\alpha}{2} r^3 - r_1^3}{\pi \alpha r^2 - r_1^2}. \end{aligned}$$



Für  $\alpha = 180^\circ$  bestätigt sich das unter 6) für den halben Kreisring gefundene Resultat.

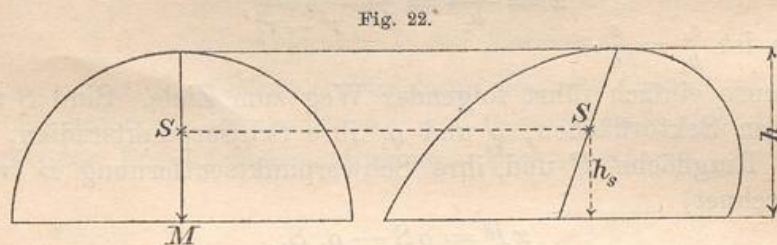
12) Verdoppelt man sämtliche Sehnen eines Kreises, die dem Durchmesser parallel sind, wobei die Symmetrie erhalten bleiben soll, so entsteht eine Ellipse. Der Schwerpunkt  $S$  der Halbkreisfläche fällt dabei mit dem der Ellipse zusammen, denn das Moment in



Bezug auf die Schwerpunktsachse hat bei der Verdoppelung den Wert Null beibehalten. Ebenso ist es, wenn man sämtliche Sehnen mit  $n$  multipliziert denkt.

Von der Verkürzung der Sehnen gilt dasselbe. Der Schwerpunkt liegt also im Abstände  $\frac{4a}{3\pi}$  bzw.  $\frac{4b}{3\pi}$  vom Durchmesser.

Dasselbe ist der Fall, wenn man die Sehnen des Halbkreises so verschiebt, daß ihre Halbierungspunkte sich auf schräger Linie an-



ordnen. Auch dadurch entsteht eine halbe Ellipse, nur ist sie schief abgeschnitten. Ist  $h$  die senkrechte Höhe, so liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie im Abstände  $h_s = \frac{4h}{3\pi}$  vom Durchmesser. — Ellipsensegmente lassen sich also stets auf Kreissegmente zurückführen.

13) Ist aus einer Fläche von einfacher Begrenzung ein Teil ausgeschnitten, so verfährt man wie im nebenstehenden Beispiele, wo ein Halbkreis aus dem Rechteck geschnitten ist. Das statische Moment der übrig bleibenden Fläche ist in Bezug auf  $AB$

$$Fh_s = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = bh \frac{h}{2} - \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{bh^2}{2} - \frac{2r^3}{3},$$

demnach ist



$$h_s = \frac{F_1 h_1 - F_2 h_2}{F_1 - F_2} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{2r^3}{3}}{bh - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{3bh^2 - 4r^3}{3(2bh - r^2\pi)}$$

Zerschneidet man die Fläche durch  $MC$ , so liegt der Schwerpunkt für jeden Teil ebenso hoch, und zwar auf der Symmetrielinie  $MD$  bzw.  $ME$ .

Andere Berechnungsmethoden kommen später zur Sprache.

14) **Anwendungen.** a) Steht über einer Fläche eine senkrechte Säule, die durch eine Ebene schräg abgeschnitten ist, so ist der Inhalt des übrig bleibenden Körpers

$$J = F \cdot h_s,$$

wo  $h_s$  die Länge des im Schwerpunkte auf der Grundfläche errichteten Lotes bis zur Schrägfläche ist. Man bezeichnet diese Linie als die Mittellinie des Körpers. (Vgl. Method. Lehrbuch, II, Stereom. 61.)

b) Diesen Körper kann man als Diagrammkörper des seitlichen Wasserdrucks auffassen, der bekanntlich proportional der Tiefe zunimmt. Der Wasserdruck gegen eine senkrechte oder auch schräge ebene Wandfläche ist

$$P = F \cdot h_s,$$

z. B. in Tonnen, wenn  $F$  in Quadratmetern, die Schwerpunkttiefe  $h_s$  in Metern gegeben ist. (Die Druckresultante greift aber nicht im Schwerpunkte an.)

c) Ist die Säule oben und unten abgeschrägt, so hat man einen Normalschnitt zu führen. Ist dessen Fläche  $F$  und ist  $h_s$  die Länge des auf ihr im Schwerpunkte errichteten Lotes, von der einen Schrägfläche zur andern gemessen, so ist der Inhalt wiederum

$$J = F \cdot h_s.$$

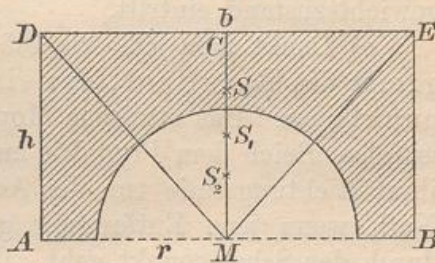
d) Denkt man sich eine Fläche gleichmäßig mit Masse belegt und um irgend eine in ihrer Ebene liegende oder diese schneidende Achse gedreht, so ist die entstehende Centrifugalkraft

$$P = mr\vartheta^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{4mr\pi^2}{t^2}.$$

Hier bedeutet  $r$  die Entfernung des Flächenschwerpunktes von der Achse,  $m$  die Masse,  $v$  die Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung,  $\vartheta$  die auf den Radius 1 reducierte Geschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit),  $t$  die Zeitdauer des einmaligen Umlaufs (Umlaufszeit).

(Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft fällt aber im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte zusammen.)

Fig. 23.





Die Centrifugalkraft ist Null, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht. Ihr positiver und negativer Teil aber können ein Kräftepaar bilden, welches in Bezug auf jeden Punkt der Achse ein konstantes Centrifugalmoment giebt, sodafs im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand eintritt.

e) Denkt man sich die Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt, so greift die Resultante der einzelnen Schwerkraften im Schwerpunkte an. Das statische Moment in Bezug auf jede Drehungsachse ist also gleich dem Produkte aus der Schwerkraft und der Entfernung ihrer Richtungslinie von der Achse. Das statische Moment ist gleich Null, wenn jene Entfernung gleich Null ist, wenn z. B. die Achse durch den Schwerpunkt geht. Die horizontal liegende Fläche balanciert also, wenn sie im Schwerpunkte oder in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Schwerpunkt geht, unterstützt wird.

Der Schwerpunkt ist auch der Angriffspunkt der Resultante gleichmäfsig gegen eine Fläche wirkender Druckkräfte (z. B. Dampfdruck) oder Zugkräfte.

f) Die Guldinsche Regel  $J = 2 \varrho \pi F$  dient zur Inhaltsberechnung der Drehungskörper, zur Inhaltsberechnung der Schraubengewinde, und in der Form  $\varrho = \frac{J}{2 \pi F}$  zur Schwerpunktbestimmung ebener Flächen. Für Näherungsberechnungen bestimmt man den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen einer Schablone (z. B. von Blech) und benutzt ihn für die Inhaltsbestimmung der entsprechenden Körper.

g) Denkt man sich eine ebene Fläche gleichmäfsig mit Masse belegt und durch einen Stofs im luftleeren Raume vorwärts geschleudert, so bewegt sich ihr Schwerpunkt in einer Parabel, ausserdem aber treten Drehungsbewegungen ein. Im Weltraume würde die Bahn, die der Flächenschwerpunkt um einen anziehenden Weltkörper zurücklegt, ein Kegelschnitt sein, also Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Schwerpunktsprinzip).

h) Wird ein Balken ein Haken u. dgl. auf Biegung, eine Säule oder Strebe von gröfserer Länge auf Strebung beansprucht, so gehen die Biegungsachsen der Querschnitte durch die Schwerpunkte der Flächen.

i) Wird eine Welle auf Drehung beansprucht, so geschehen die Drehungen der einzelnen Querschnitte um die Flächenschwerpunkte.

k) Für die darstellende Geometrie ist von Wichtigkeit, dafs bei der Parallelprojektion einer ebenen Fläche ihr Schwerpunkt in den der neuen Fläche projiziert wird. (Bei der Parallelprojektion ebener Kurven ist dies im allgemeinen nicht der Fall, ebensowenig bei gewölbten Flächen.)

l) Mit Hülfe der Schwerpunktslehre kann man Sätze der Geometrie beweisen (barycentrischer Kalkül). So folgt z. B. der Satz,



dafs die Mittellinien des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, daraus, dafs die Fläche nur einen einzigen Schwerpunkt haben kann.

m) Bewegt sich eine ebene Fläche so, dafs ihr Schwerpunkt eine beliebige ebene oder räumliche Curve beschreibt, auf der die bewegte Fläche in jedem Punkte senkrecht steht, so ist der Inhalt des körperlichen Weges gleich dem Produkte aus Fläche und Schwerpunktsweg. (Durchdringen einander dabei Teile des Körpers, so ist der Durchdringungsraum doppelt bzw. mehrfach einzurechnen.) Dieser Satz ist z. B. von Bedeutung für die Berechnung der für Eisenbahndämme nötigen Erdmassen.

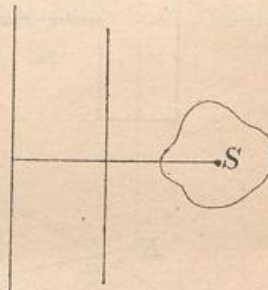
n) Bemerkung zur Guldinschen Regel. Verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um  $-e$ , so geht  $J = 2 \rho F \pi$  über in

$$J_1 = 2(\rho F + eF)\pi = J + 2eF\pi,$$

d. h. der Inhalt wächst um den eines Drehungskörpers, der entsteht, wenn die Fläche um eine Achse rotiert, die vom Schwerpunkte um  $e$  entfernt ist, oder er wächst um den Inhalt eines Cylinders, der über der Fläche steht und den Weg  $2e\pi$  zur Höhe hat.

Dadurch werden Berechnungen gewisser Art unabhängig von der Kenntnis der Schwerpunktslage gemacht.

Fig. 24.



### 15) Graphische Schwerpunktbestimmungen.

Der Graphostatik verdanken wir neuere Methoden, die es dem exakten Zeichner ermöglichen, namentlich für Trägerquerschnitte die Schwerpunkte schnell aufzufinden. Einige Beispiele sollen dies erläutern.

Symmetrischer Trägerquerschnitt. (Figur 25.)

Die in  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  angreifenden „Kräfte“\*) verhalten sich wie  $b_1 h_1$ ,  $b_2 h_2$  und  $b_3 h_3$ , oder wie  $F_1 : F_2 : F_3$ . Man zeichne drei Senkrechte  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  wie in der Figur, die sich wie diese Größen verhalten. Dann nehme man einen beliebigen Punkt (Pol) an und verbinde ihn mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ .

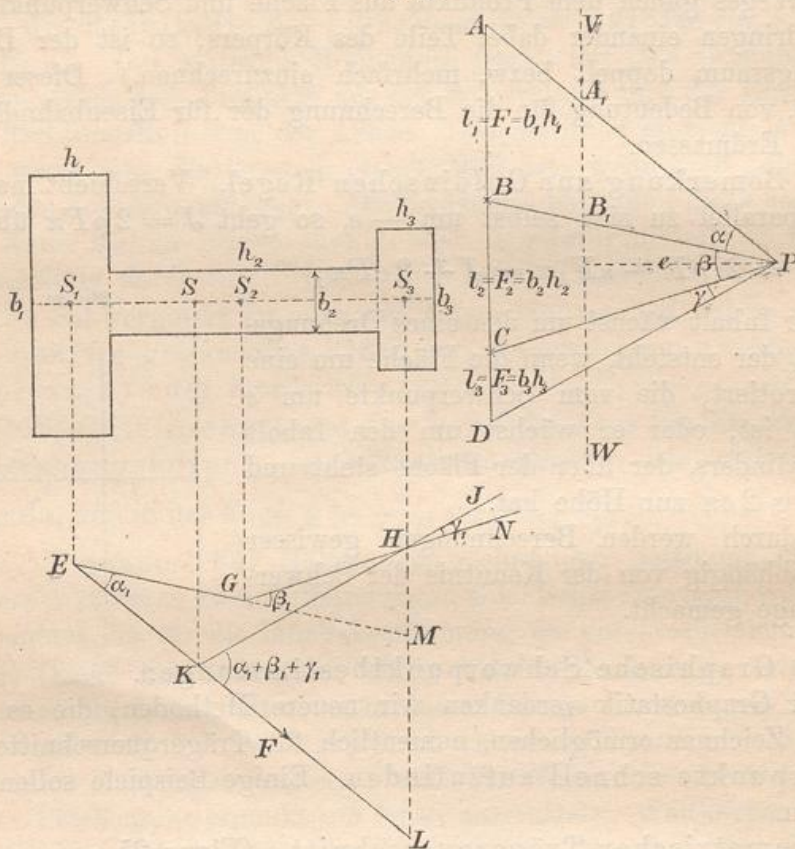
Durch die Einzelschwerpunkte sind Senkrechte gelegt. An der zu  $S_1$  gehörigen Senkrechten beginne man irgendwo, z. B. bei  $E$ , mit folgender Konstruktion: Man ziehe  $EF \parallel AP$  und  $EG \parallel BP$  bis zur Senkrechten durch  $S_2$ , sodann  $GH \parallel CP$  bis zur Senkrechten durch  $S_3$ , zum Schluss durch  $H$  eine Parallele zu  $PD$ . Letztere giebt mit  $EF$  einen Schnitt  $K$ , und senkrecht über diesem liegt der gesuchte Schwerpunkt  $S$ .

\*) Man denke sich die Flächen homogen mit Masse belegt, so dafs man von Gewichten sprechen kann.



**Beweis.** Denkt man sich den Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $AD$  als Einheit, so würde eine durch das Strahlenbüschel  $P$  gelegte Vertikale  $VW$  Abschnitte geben, deren Längen den statischen Momenten der Kräfte  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  in Bezug auf den Punkt  $P$

Fig. 25.



oder dem statischen Momente der in  $P$  angebrachten Kräfte in Bezug auf die Punkte der Geraden  $VW$  entsprechen, denn es ist z. B.  $A_1B_1 : AB = e : 1$ , folglich, wenn  $l_1 = b_1h_1 = F$  ist,  $A_1B_1 = e \cdot AB = eF_1$ . Dieser sogenannte Kräfteplan veranschaulicht also zugleich, in welcher Weise die statischen Momente zunehmen, wenn man den Drehungspunkt des gedachten Hebels vom Angriffspunkte  $P$  der Kraft aus horizontal verschiebt.

Bei  $E$  ist davon Anwendung gemacht, denn durch die Parallelen ist  $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$  dort angetragen. Der Winkelraum  $\alpha_1$  deutet an, wie das Moment von  $F_1$  bei Verschiebung des Drehungspunktes nach rechts zunimmt.

Bei  $G$  tritt die neue Kraft  $F_2$  hinzu, deren Momentzunahme dem Winkelraume  $HGM$  entspricht, wo  $\beta_1 = \beta$  geworden ist. Bei  $H$  tritt



$F_3$  hinzu, dessen Momentzunahme durch den Winkelraum  $JHN = \gamma_1 = \gamma$  dargestellt ist.

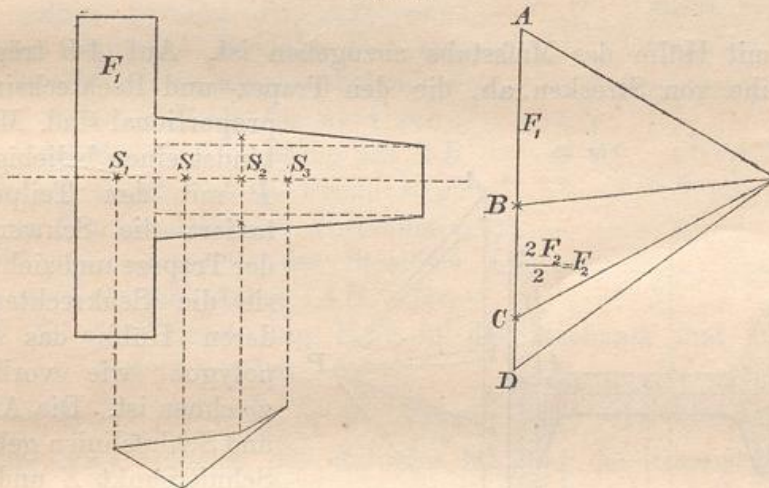
Der Winkelraum  $JKL$  mit dem Winkel  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma$  veranschaulicht demnach die Zunahme der Gesamtkraft  $F_1 + F_2 + F_3$  bei der Verschiebung nach rechts und zugleich die Abnahme bei der Verschiebung nach links. Bei  $K$  selbst aber ist der senkrechte Abstand der beiden Winkelschenkel gleich Null, also auch das Gesamtmoment gleich Null. In der durch  $K$  gelegten Senkrechten muß demnach der Schwerpunkt liegen.

Bei der praktischen Ausführung läßt man das Überflüssige weg. Man bezeichnet das Strahlenbündel als den Kräfteplan, das Vieleck als das Kräftepolygon oder Seilpolygon.

Die folgenden Figuren wird man ohne ausführliche Erläuterung verstehen.

16) In Fig. 26 ist das Trapez in zwei Dreiecke, jedes vom Inhalte  $\frac{1}{2} F_2$  zerlegt, deren gemeinsamer Schwerpunkt  $S_2$  ist.

Fig. 26.



### 17) Unsymmetrischer Querschnitt.

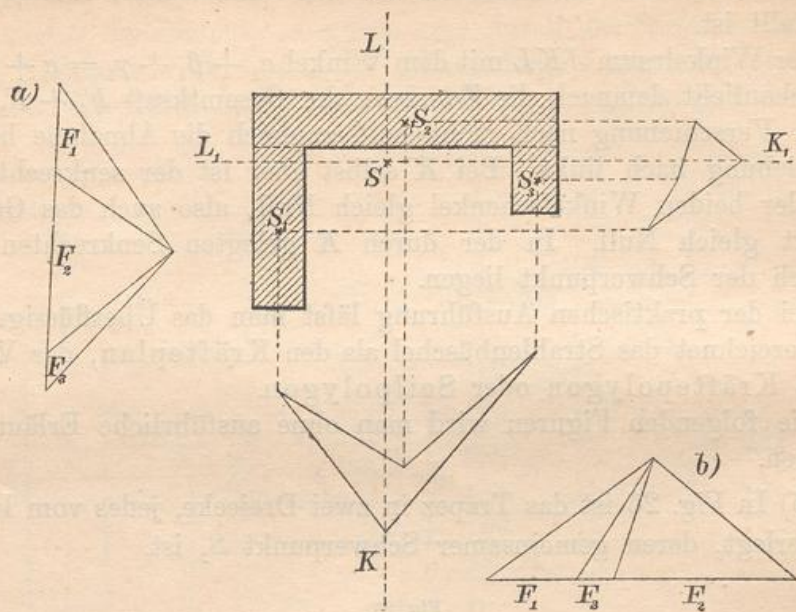
In Figur 27 ist die Bestimmung für ein Winkeleisen durchgeführt. Hier mußte der Kräfteplan erst in der Stellung *a*) für die Vertikalen durch  $S_1, S_2, S_3$ , sodann in der Stellung *b*) für die jetzt in anderer Reihenfolge anzuordnenden Horizontalen durch  $S_1, S_3, S_2$  benutzt werden. Die gewonnenen Linien  $KL$  und  $K_1L_1$  geben durch ihren Schnitt den Schwerpunkt  $S$ .

18) Annäherungsverfahren für schwierigere Querschnitte. (Figur 28.)

Man teile den Querschnitt in Trapeze und Rechtecke ein, deren

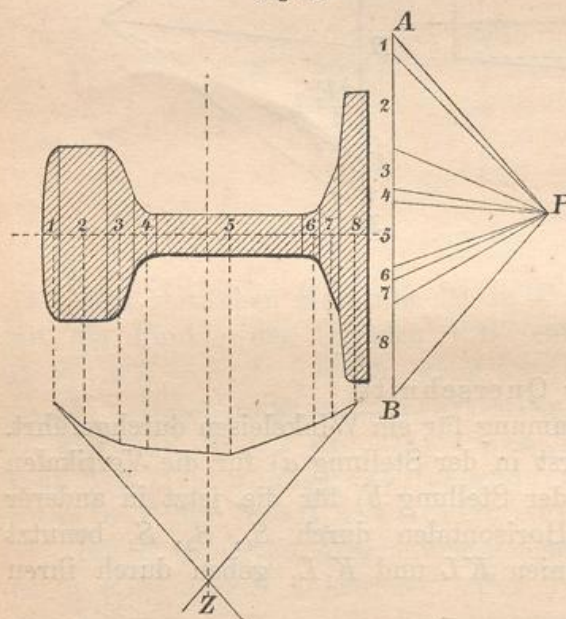


Fig. 27.



Inhalt mit Hilfe des Maßstabs anzugeben ist. Auf  $AB$  trägt man eine Reihe von Strecken ab, die den Trapez- und Rechtecksinhalten proportional sind. Man verbindet einen beliebigen Pol  $P$  mit den Teilpunkten, taxiert die Schwerpunkte der Trapeze und zieht durch sie die Senkrechten, mit deren Hülfe das Kräftepolygon wie vorher zu zeichnen ist. Die Anfangs- und Schlußlinien geben den Schnittpunkt  $Z$  und damit die Senkrechte, in der der Schwerpunkt liegt.

Fig. 28.



Für praktische Zwecke wird es hinreichen, den Schwerpunkt durch zwei Aufhängungen der entsprechenden Blechschablone zu ermitteln. Das hier gelehrt Verfahren wird aber dadurch nicht überflüssig, da es gelegentlich der Trägheitsmomente noch anderweitige Verwendung finden soll.