Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Einleitung

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Einleitung.

In der Planimetrie wird gelehrt: Wenn die Winkel zweier Dreiecke paarweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich. Dann haben die Seiten des einen Dreieckes unter einander genau dieselben Verhältnisse, wie die entsprechenden (homologen) Seiten des zweiten Dreieckes.

Wenn z. B. von den beiden Dreiecken MNP und ABC bekannt ist,

daß $\sphericalangle M = \sphericalangle A$

$\sphericalangle N = \sphericalangle B$ ist,

so muß auch:

$\sphericalangle P = \sphericalangle C$

und das Verhältnis

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{n}{p} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{c}{a}$$

sein.*)

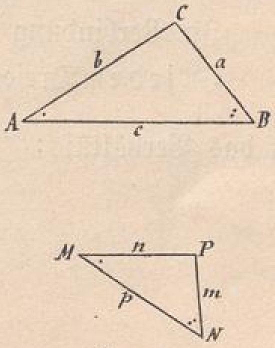

Fig. 1.

Die Längenverhältnisse zwischen den drei Seiten eines Dreieckes sind demnach lediglich durch die Größe der Dreieckswinkel bestimmt.

Es steht daher außer Zweifel, daß, wenn von einem Dreiecke die drei Winkel gegeben sind, die Seiten dieses Dreieckes zu einander in ganz bestimmten, von der Größe der gegebenen Winkel abhängigen Verhältnissen stehen müssen.

*) Wir folgen hier der üblichen Bezeichnung, nach welcher die Seiten, welche den Winkeln A, B, C, M .... gegenüberliegen, mit a, b, c, m .... bezeichnet werden.

So werden z. B. in jedem Dreiecke, in welchem die drei Winkel 50°, 60° und 70° betragen, die Seitenverhältnisse ganz bestimmte Werte besitzen, die wir (wenigstens annähernd) finden können, wenn wir ein einziges solches Dreieck mit möglichster Genauigkeit konstruieren, seine Seiten abmessen und die durch die verschiedenen Verhältnisse angezeigten Divisionen verrichten.

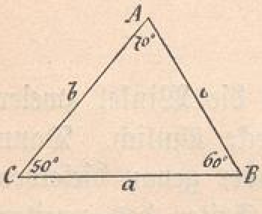

Fig. 2.

Eine derartige Konstruktion und Abmessung hat an einem Dreiecke, das in Fig. 2 in $\frac{1}{10}$ seiner wirklichen Größe verzeichnet ist und in welchem $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 50°$ ist, folgende Abmessungen:

$a = 25\ cm, \quad b = 23{\cdot}04\ cm, \quad c = 20{\cdot}38\ cm$

und demgemäß die Seitenverhältnisse:

$\frac{c}{b} = 0{\cdot}8845 \qquad \frac{b}{a} = 0{\cdot}9216 \qquad \frac{a}{c} = 1{\cdot}2267$ ergeben.

In Verbindung mit dem obigen kann man daher behaupten:

In jedem Dreiecke, in welchem die Winkel 50°, 60°, 70° betragen,

ist das Verhältnis: $\frac{\text{kleinste Seite}}{\text{mittlere Seite}} = 0{\cdot}8845$

$$\frac{\text{mittlere Seite}}{\text{größte Seite}} = 0{\cdot}9216$$

$$\frac{\text{größte Seite}}{\text{kleinste Seite}} = 1{\cdot}2267.$$

Wir wollen an einem Beispiele zeigen, wie wir diese gewonnenen Verhältniswerte anwenden könnten.

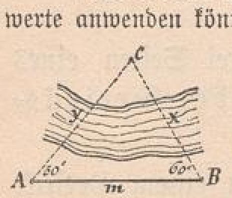

Fig. 3.

Eine in ebenem Gelände mit Winkelmeßinstrumenten und Meßlatte vorgenommene Messung hat ergeben, daß die von den Punkten A und B nach dem unzugänglichen Punkte C gerichteten Visierlinien mit der „Standlinie" AB die Winkel: $\sphericalangle A = 50°$ $\sphericalangle B = 60°$ einschließen, und daß $AB = m = 1250\ m$ ist.

Man bestimme die Entfernungen $BC = x$ und $AC = y$.

Nach den Angaben ist $x < y < m$, daher nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{y}{m} = 0{\cdot}9216 \ldots .\ y = 0{\cdot}9216\ .\ m = \mathbf{1152}\ m$$

$$\frac{m}{x} = 1{\cdot}2267 \ldots .\ x = m : 1{\cdot}2267 = \mathbf{1019}\ m$$

An diesem Beispiele ersehen wir, daß es möglich ist, aus einer Dreiecksseite die übrigen Seiten mit Hilfe der Winkel zu berechnen, wenn man die diesen Winkeln entsprechenden Seitenverhältnisse kennt. Diese Seitenverhältnisse nun sind aus gewissen Tabellen, die wir später kennen lernen werden, zu entnehmen.

*Aufgabe der ebenen Trigonometrie ist es, mit Hilfe solcher Tabellen — (ihres unentbehrlichen Hilfsmittels) — im allgemeinen folgende Aufgabe zu lösen: Aus drei bestimmenden Stücken eines Dreieckes sind die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu ermitteln.**)

Wollte man für die verschiedenen Winkelkombinationen des schiefwinkligen Dreieckes eine Tafel der entsprechenden Seitenverhältnisse aufstellen (etwa in der Art, wie wir dies oben für die bestimmte Kombination: 50°, 60°, 70° getan haben), so würde diese Tafel eine zu große Ausdehnung gewinnen. Es ist deshalb von großem Vorteile, zunächst bloß *das rechtwinklige Dreieck* in Betracht zu ziehen, in welchem der rechte Winkel den festen Wert von 90° besitzt und demnach nur noch *einem* Winkel eine *selbständige Veränderlichkeit* zukommt. Dazu tritt noch die Erwägung, daß man jedes schiefwinklige Dreieck durch Fällen einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und dadurch die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreieckes zurückführen kann.

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Verzeichnet man beliebig viele rechtwinklige Dreiecke, welche außer dem rechten Winkel noch einen Spitzwinkel gleich haben, so sind alle diese Dreiecke einander ähnlich. Das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks ist dann genau gleich dem Verhältnisse der beiden homologen (gleichliegenden) Seiten in jedem der anderen Dreiecke.

*) Die Berechnung der unbekannten Stücke bezeichnet man kürzer als „*Auflösung*“ *des Dreieckes*.