Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Das rechtwinklige Dreieck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

An diesem Beispiele ersehen wir, daß es möglich ist, aus einer Dreiecksseite die übrigen Seiten mit Hilfe der Winkel zu berechnen, wenn man die diesen Winkeln entsprechenden Seitenverhältnisse kennt. Diese Seitenverhältnisse nun sind aus gewissen Tabellen, die wir später kennen lernen werden, zu entnehmen.

Aufgabe der ebenen Trigonometrie ist es, mit Hilfe solcher Tabellen — (ihres unentbehrlichen Hilfsmittels) — im allgemeinen folgende Aufgabe zu lösen: Aus drei bestimmenden Stücken eines Dreieckes sind die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu ermitteln.*)

Wollte man für die verschiedenen Winkelkombinationen des schiefwinkligen Dreieckes eine Tafel der entsprechenden Seitenverhältnisse aufstellen (etwa in der Art, wie wir dies oben für die bestimmte Kombination: 50°, 60°, 70° getan haben), so würde diese Tafel eine zu große Ausdehnung gewinnen. Es ist deshalb von großem Vorteile, zunächst bloß das rechtwinklige Dreieck in Betracht zu ziehen, in welchem der rechte Winkel den festen Wert von 90° besitzt und demnach nur noch einem Winkel eine selbständige Veränderlichkeit zukommt. Dazu tritt noch die Erwägung, daß man jedes schiefwinklige Dreieck durch Fällen einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und dadurch die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreieckes zurückführen kann.

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Verzeichnet man beliebig viele rechtwinklige Dreiecke, welche außer dem rechten Winkel noch einen Spitzwinkel gleich haben, so sind alle diese Dreiecke einander ähnlich. Das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks ist dann genau gleich dem Verhältnisse der beiden homologen (gleichliegenden) Seiten in jedem der anderen Dreiecke.

*) Die Berechnung der unbekannten Stücke bezeichnet man kürzer als „Auflösung" des Dreieckes.

Wenn beispielsweise in den nebenstehenden rechtwinkligen Dreiecken ABC und MNP

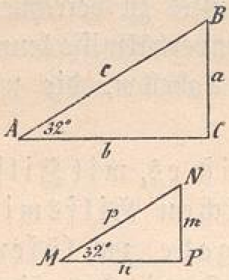

Fig. 4.

$\sphericalangle M = \sphericalangle A = 32^0$ ist, so muß $\triangle MNP \sim \triangle ABC$, folglich das Verhältnis

$$\frac{m}{p} = \frac{a}{c} \qquad \frac{n}{p} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \qquad \frac{n}{m} = \frac{b}{a} \text{ sein.}$$

Verzeichnen wir die beiden Dreiecke der Fig. 4 in hundertfacher Größe, so ergibt eine genaue Abmessung der Seiten:

$$a = 13 \cdot 25\ dm, \quad b = 21 \cdot 2\ dm, \quad c = 25\ dm,$$
$$m = 8 \cdot 48\ dm, \quad n = 13 \cdot 57\ dm, \quad p = 16\ dm.$$

Es ist also

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} = 13 \cdot 25 : 25 = 0 \cdot 530 \\[2ex] \dfrac{m}{p} = \quad 8 \cdot 48 : 16 = 0 \cdot 530 \end{array}\right\} \text{demnach } \frac{a}{c} = \frac{m}{p} = 0 \cdot 530$$

Ebenso würden wir erhalten:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{p} = 0 \cdot 848$$
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = 0 \cdot 625$$
$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = 1 \cdot 600$$

Daraus entnehmen wir:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem ein Spitzwinkel 32^0 beträgt, ist das Verhältnis:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \doteq 0 \cdot 530 \\[2ex] \dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \doteq 0 \cdot 848 \\[2ex] \dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} \doteq 0 \cdot 625 \\[2ex] \dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} \doteq 1 \cdot 600 \end{array}\right\} {}^{*})$$

*) Die Bezeichnungen „anliegend" und „gegenüberliegend" beziehen sich auf die Lage der betreffenden Kathete gegen den Winkel 32^0.

Das Zeichen $\doteq$ bedeutet: „annähernd gleich".

Die Verwendbarkeit dieser Verhältniswerte, die wir uns vorläufig wie oben durch Abmessung und Ausführung der Divisionen ermittelt denken können (siehe Anhang I), leuchtet sofort ein. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, in welchem ein Winkel (z. B. **A = 32°**) und außerdem eine Seite (z. B. Hypotenuse **c = 26·5** m) bekannt sind, so lassen sich die beiden Katheten (a und b) nach Vorstehendem in folgender Weise ermitteln:

$$\frac{a}{c} = 0{\cdot}530, \quad \text{daher} \quad a = 0{\cdot}530 \times c = \mathbf{14{\cdot}05}\ \text{m}$$

$$\frac{b}{c} = 0{\cdot}848, \quad b = 0{\cdot}848 \times c = \mathbf{22{\cdot}47}\ \text{m}$$

Anmerkung. Man prüfe die Rechnung, indem man das Dreieck nach verjüngtem Maßstabe aus den gegebenen Stücken konstruiert und dann die Seiten a und b abmißt.

§ 2. Der Kürze halber hat man für die obengenannten Verhältnisse bestimmte Namen eingeführt u. zw. nennt man das Verhältnis:

$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ den **sinus**

$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ den **cosinus**

$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}}$ den **tangens**

$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}}$ den **cotangens**

jenes Winkels, auf den sich die Ausdrücke „gegenüberliegend" und „anliegend" beziehen.

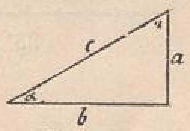

Fig. 5.

Demgemäß ist z. B. in Fig. 5 zu setzen:

$\frac{a}{c}$ = sinus des Winkels α oder kürzer $\frac{a}{c} = \sin \alpha$

$\frac{b}{c}$ = cosinus des Winkels α " " $\frac{b}{c} = \cos \alpha$

$\frac{a}{b}$ = tangens des Winkels α " " $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

$\frac{b}{a}$ = cotangens des Winkels α " " $\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha$

Man sieht sofort, daß tangens und cotangens reziprok sind, daß also

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} \quad \text{ist.}$$