Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Begriff der goniometrischen Funktionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Die Verwendbarkeit dieser Verhältniswerte, die wir uns vorläufig wie oben durch Abmessung und Ausführung der Divisionen ermittelt denken können (siehe Anhang I), leuchtet sofort ein. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, in welchem ein Winkel (z. B. $A = \mathbf{32^0}$) und außerdem eine Seite (z. B. Hypotenuse $c = \mathbf{26 \cdot 5}$ m) bekannt sind, so lassen sich die beiden Katheten (a und b) nach Vorstehendem in folgender Weise ermitteln:

$$\frac{a}{c} = 0 \cdot 530, \quad \text{daher} \quad a = 0 \cdot 530 \times c = \mathbf{14 \cdot 05} \text{ m}$$

$$\frac{b}{c} = 0 \cdot 848, \quad b = 0 \cdot 848 \times c = \mathbf{22 \cdot 47} \text{ m}$$

Anmerkung. Man prüfe die Rechnung, indem man das Dreieck nach verjüngtem Maßstabe aus den gegebenen Stücken konstruiert und dann die Seiten a und b abmißt.

§ 2. Der Kürze halber hat man für die obengenannten Verhältnisse bestimmte Namen eingeführt u. zw. nennt man das Verhältnis:

$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$	den **sinus**	jenes Winkels, auf den sich die Ausdrücke „gegenüberliegend" und „anliegend" beziehen.
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$	den **cosinus**	
$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}}$	den **tangens**	
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}}$	den **cotangens**	

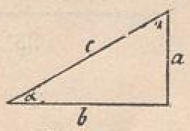

Fig. 5.

Demgemäß ist z. B. in Fig. 5 zu setzen:

$\frac{a}{c}$ = sinus des Winkels α oder kürzer $\frac{a}{c} = \sin \alpha$

$\frac{b}{c}$ = cosinus des Winkels α " " $\frac{b}{c} = \cos \alpha$

$\frac{a}{b}$ = tangens des Winkels α " " $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

$\frac{b}{a}$ = cotangens des Winkels α " " $\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha$

Man sieht sofort, daß tangens und cotangens reziprok sind, daß also

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} \quad \text{ist.}$$

Unter Benützung der eben besprochenen Benennungen können wir somit die in § 1 entwickelten Ergebnisse folgendermaßen anschreiben:

$$\sin 32^{0} \doteq 0 \cdot 530 \qquad \operatorname{tg} 32^{0} \doteq 0 \cdot 625$$
$$\cos 32^{0} \doteq 0 \cdot 848 \qquad \operatorname{cotg} 32^{0} \doteq 1 \cdot 600$$

Wir nennen die angegebenen Verhältnisse die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen oder kurz die Funktionen des betreffenden Winkels.

§ 3. Es ist einleuchtend, daß diese Funktionen ebenso wie für den Winkel 32° auch für jeden anderen Spitzwinkel ganz bestimmte Zifferwerte besitzen müssen, die wir annähernd etwa in folgender Art graphisch ermitteln könnten:

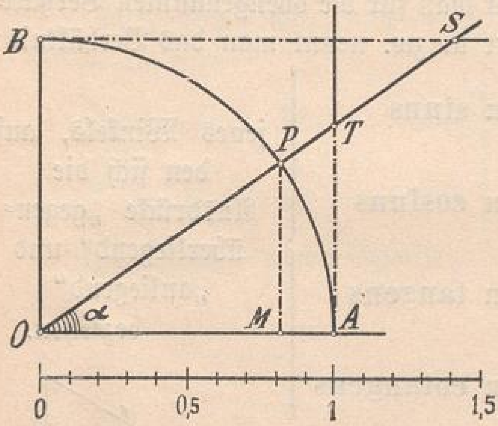

Fig. 6.

Wir verzeichnen mit dem Halbmesser OA = r = 1 *dm* den Viertelkreis AB mit den auf einander senkrechten Tangenten AT und BS. (Fig. 6).*)

Um nun für einen beliebigen Winkel α die Funktionen zu ermitteln, tragen wir diesen Winkel von OA aus auf, so daß

$\sphericalangle AOS = \sphericalangle \alpha$ ist.

Es ist dann auch als Wechselwinkel

$\sphericalangle BSO = \sphericalangle \alpha$

Machen wir nun PM ⊥ OA und ist z. B. $\sphericalangle \alpha = 35^{0}$, so ergibt eine genaue Abmessung

PM = 0·573 *dm* OM = 0·819 *dm* AT = 0·700 *dm* BS = 1·428 *dm*

und nach obigem folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke:

$$\text{OMP} \ldots\ldots \quad \sin \alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{0 \cdot 573\ dm}{1\ dm} = 0 \cdot 573$$

$$\text{OMP} \ldots\ldots \quad \cos \alpha = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \frac{0 \cdot 819\ dm}{1\ dm} = 0 \cdot 819$$

$$\text{OAT} \ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{AT}}{\text{OA}} = \frac{0 \cdot 700\ dm}{1\ dm} = 0 \cdot 700$$

$$\text{OBS} \ldots\ldots \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{BS}}{\text{OB}} = \frac{1 \cdot 428\ dm}{1\ dm} = 1 \cdot 428$$

*) Fig. 6 zeigt den Viertelkreis in 1/3 der gedachten Größe.

Ist also in Fig. 6 der Kreishalbmesser = 1, so geben die Maßzahlen der Strecken PM, OM, AT und BS unmittelbar die Funktionen des Winkels α an.

Diese Strecken heißen daher die Funktionslinien.

Indem wir dem Winkel α der Reihe nach verschiedene Werte beilegen und stets die Funktionslinien verzeichnen und abmessen, können wir eine ganze Tafel zusammenstellen, welche für die einzelnen Spitzwinkel die zugehörigen Funktionswerte angibt.

Solche Funktionstafeln sind das unentbehrliche Hilfsmittel für alle trigonometrischen Rechnungen. Die in den Jelinek'schen mathematischen Tafeln enthaltenen Funktionstabellen haben folgende Anordnung:

33°

33°	sin.	$+\delta 1''$	cos.	$-\delta 1''$	tg.	$+\delta 1''$	cotg.	$-\delta 1''$	
0′	0·54464	0·41	0·83867	0·27	0·64941	0·69	1·53987	1·63	60′
2′	54513		83835		65024		53791		58′
10	0·54708	40	0·83708	27	0·65355	69	1·53010	62	50
12	54756	41	83676	26	65438	69	52816	62	48
14	54805	41	83645	27	65521	69	52622	61	46
30′	0·55194	0·41	0·83389	0·27	0·66189	0·70	1·51084	1·59	30′
	cos.	$-\delta 1''$	sin.	$+\delta 1''$	cotg.	$-\delta 1''$	tg.	$+\delta 1''$	56°

Links sind die Winkel in Sprüngen von 2 zu 2 Minuten, oben sind die Funktionen angeschrieben.*) Wir entnehmen z. B. dem obenstehenden Ausschnitte aus der Tabelle:

sin 33° 0′ = 0·54464   cos 33° 2′ = 0·83835
sin 33° 12′ = 0·54756   cos 33° 10′ = 0·83708
sin 33° 30′ = 0·55194   cos 33° 30′ = 0·83389

tg 33° 0′ = 0·64941   cotg 33° 2′ = 1·53791
tg 33° 14′ = 0·65521   cotg 33° 12′ = 1·52816
tg 33° 30′ = 0·66189   cotg 33° 30′ = 1·51084

*) Die übrigen Aufschriften werden später erklärt werden, sind übrigens auch in der Anleitung zum Gebrauche der Tafeln eingehend erläutert.

Hat man nicht die Jelinek'schen, sondern andere Tafeln im Gebrauche, so wende man das hier Gesagte sinngemäß auf diese Tafeln an.