Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Funktionstabellen.

Ist also in Fig. 6 der Kreishalbmesser = 1, so geben die Maßzahlen der Strecken PM, OM, AT und BS unmittelbar die Funktionen des Winkels α an.

Diese Strecken heißen daher die Funktionslinien.

Indem wir dem Winkel α der Reihe nach verschiedene Werte beilegen und stets die Funktionslinien verzeichnen und abmessen, können wir eine ganze Tafel zusammenstellen, welche für die einzelnen Spitzwinkel die zugehörigen Funktionswerte angibt.

Solche Funktionstafeln sind das unentbehrliche Hilfsmittel für alle trigonometrischen Rechnungen. Die in den Jelinek'schen mathematischen Tafeln enthaltenen Funktionstabellen haben folgende Anordnung:

33°

33°	sin.	$+\delta 1''$	cos.	$-\delta 1''$	tg.	$+\delta 1''$	cotg.	$-\delta 1''$	
0′	0·54464	0·41	0·83867	0·27	0·64941	0·69	1·53987	1·63	60′
2′	54513		83835		65024		53791		58′
10	0·54708	40	0·83708	27	0·65355	69	1·53010	62	50
12	54756	41	83676	26	65438	69	52816	62	48
14	54805	41	83645	27	65521	69	52622	61	46
30′	0·55194	0·41	0·83389	0·27	0·66189	0·70	1·51084	1·59	30′
	cos.	$-\delta 1''$	sin.	$+\delta 1''$	cotg.	$-\delta 1''$	tg.	$+\delta 1''$	56°

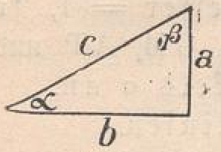
Links sind die Winkel in Sprüngen von 2 zu 2 Minuten, oben sind die Funktionen angeschrieben.*) Wir entnehmen z. B. dem obenstehenden Ausschnitte aus der Tabelle:

sin 33° 0′ = 0·54464 cos 33° 2′ = 0·83835
sin 33° 12′ = 0·54756 cos 33° 10′ = 0·83708
sin 33° 30′ = 0·55194 cos 33° 30′ = 0·83389

tg 33° 0′ = 0·64941 cotg 33° 2′ = 1·53791
tg 33° 14′ = 0·65521 cotg 33° 12′ = 1·52816
tg 33° 30′ = 0·66189 cotg 33° 30′ = 1·51084

*) Die übrigen Aufschriften werden später erklärt werden, sind übrigens auch in der Anleitung zum Gebrauche der Tafeln eingehend erläutert.

Hat man nicht die Jelinek'schen, sondern andere Tafeln im Gebrauche, so wende man das hier Gesagte sinngemäß auf diese Tafeln an.



Von großer Wichtigkeit für die Einrichtung der Funktions-Tabellen ist die **Doppeldeutigkeit** der Funktionswerte, welche aus folgender Betrachtung ersichtlich wird.

Fig. 7.

Nach unseren Definitionen ist in Fig. 7

$$\frac{b}{c} \begin{cases} \text{bezügl. des } \sphericalangle \beta \; \ldots \ldots \; \dfrac{\text{Gegenüberliegd. Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin\beta \\ \text{bezügl. des } \sphericalangle \alpha \; \ldots \ldots \; \dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos\alpha \end{cases}$$

$$\text{Somit: } \frac{b}{c} = \begin{cases} = \sin\beta \\ = \cos\alpha \end{cases} \qquad \text{folglich} \qquad \sin\beta = \cos\alpha$$

$$\text{Ebenso: } \frac{a}{c} = \begin{cases} = \cos\beta \\ = \sin\alpha \end{cases} \qquad \text{''} \qquad \cos\beta = \sin\alpha$$

$$\frac{b}{a} = \begin{cases} = \operatorname{tg}\beta \\ = \operatorname{cotg}\alpha \end{cases} \qquad \text{''} \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\frac{a}{b} = \begin{cases} = \operatorname{cotg}\beta \\ = \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \qquad \text{''} \qquad \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$$

wobei $\beta = 90^0 - \alpha$ ist.

Bezeichnet man sinus und cosinus und ebenso tangens und cotangens als „**sinnverwandte Funktionen**", so lassen sich die vorstehenden vier Gleichungen zu folgendem allgemeinen Satze zusammenfassen:

Die Funktion eines beliebigen Spitzwinkels β gibt zugleich die sinnverwandte Funktion des zugehörigen Komplementswinkels ($90^0 - \beta$) an.

Die Funktionen der Winkel von 45^0 bis 90^0 lassen sich demgemäß auf die Funktionen ihrer Komplementswinkel, d. i. der Winkel zwischen 45^0 und 0^0, zurückführen. Dieser wichtige Umstand wird bei der Einrichtung der Funktionstabellen in folgender Weise benützt.

Zu jedem linksstehenden Winkel ist in gleicher Höhe rechts sein Komplementswinkel angegeben. Den oben am Kopfe der Tabelle angegebenen Funktionsbezeichnungen stehen unten die entsprechenden sinnverwandten Funktionen gegenüber.

Jeder Tabellenwert bedeutet nun zweierlei:

1. die oben angegebene Funktion des linksstehenden Winkels und gleichzeitig
2. die unten angegebene Funktion des rechtsstehenden Winkels.

So entnehmen wir z. B. dem obigen Bruchstücke der Tabelle:

$$0{\cdot}54708 = \begin{cases} = \sin 33^0 10' \\ = \cos 56^0 50' \end{cases} \qquad 0{\cdot}83645 = \begin{cases} = \cos 33^0 14' \\ = \sin 56^0 46' \end{cases}$$

$$0{\cdot}66189 = \begin{cases} = \operatorname{tg} 33^0 30' \\ = \operatorname{cotg} 56^0 30' \end{cases} \qquad 1{\cdot}53791 = \begin{cases} = \operatorname{cotg} 33^0 2' \\ = \operatorname{tg} 56^0 58' \end{cases}$$

$$0{\cdot}54464 = \begin{cases} = \sin 33^0 0' \\ = \cos 56^0 60' = \cos 57^0 \end{cases} \qquad 0{\cdot}64941 = \begin{cases} = \operatorname{tg} 33^0 \\ = \operatorname{cotg} 57^0 \end{cases}$$

Übungsbeispiele.

a) Man bestimme aus der Tabelle:

sin 15°	sin 17° 12′	sin 28° 40′
cos 25° 30′	cos 34° 24′	cos 7° 34′
tg 8°	tg 43° 8′	tg 33° 42′
cotg 42° 30′	cotg 10° 16′	cotg 5° 54′
sin 49°	sin 66° 12′	sin 47° 40′
cos 55° 30′	cos 50° 26′	cos 81° 52′
tg 72°	tg 82° 8′	tg 62° 36′
cotg 62° 30′	cotg 48° 2′	cotg 53° 44′

b) Man beachte die Funktionswerte für die Winkel 0°, 90° und 45° und leite dieselben nach Fig. 6 ab.

c) Wie groß sind die Winkel α, β, γ, δ, wenn: *)

1. $\sin \alpha = 0{\cdot}46947$	6. $\cos \beta = 0{\cdot}77273$	11. $\operatorname{tg} \gamma = 5{\cdot}39552$
2. $\cos \beta = 0{\cdot}82413$	7. $\operatorname{tg} \gamma = 0{\cdot}39930$	12. $\operatorname{cotg} \delta = 0{\cdot}59454$
3. $\operatorname{tg} \gamma = 0{\cdot}48773$	8. $\operatorname{cotg} \delta = 3{\cdot}53392$	13. $\sin \alpha = 0{\cdot}75088$
4. $\operatorname{cotg} \delta = 3{\cdot}44951$	9. $\sin \alpha = 0{\cdot}87462$	14. $\cos \beta = 0{\cdot}61932$
5. $\sin \alpha = 0{\cdot}58307$	10. $\cos \beta = 0{\cdot}35837$	15. $\operatorname{tg} \gamma = 1{\cdot}77230$
	16. $\operatorname{cotg} \delta = 0{\cdot}21377$	

*) Hat man zu einem gegebenen Funktionswerte den zugehörigen Winkel zu bestimmen, so beachte man:

Sinus- oder Cosinus-Werte, die kleiner (größer) als 0·707 .. sind, suche man in der ersten (zweiten) Reihe der Tafel.

Tangens- oder Cotangens-Werte, die kleiner (größer) als 1 sind, suche man in der dritten (vierten) Reihe der Tafel.

Resultate zu c.

1. 28°	5. 35° 40′	9. 61°	13. 48° 40′
2. 34° 30′	6. 39° 24′	10. 69°	14. 51° 44′
3. 26°	7. 21° 46′	11. 79° 30′	15. 60° 34′
4. 16° 10′	8. 15° 48′	12. 59° 16′	16. 77° 56′

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke
mit Hilfe der Funktionstafeln.

§ 4. Für die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke erweist es sich von Vorteil, die in § 2 aufgestellten Gleichungen (Definitionen) je nach einer Dreiecksseite aufzulösen und in dieser Form als textierte Lehrsätze festzuhalten.

In Fig. 8 ist:

1.) $\frac{a}{c} = \sin A$, folglich $\mathbf{a = c \,.\, \sin A}$

$\frac{b}{c} = \sin B$, " $\mathbf{b = c \,.\, \sin B}$ I.

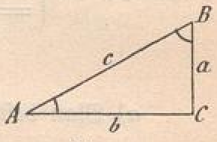


Fig. 8.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels (Sinussatz).

2.) $\frac{b}{c} = \cos A$, . . . folglich $\mathbf{b = c \,.\, \cos A}$

$\frac{a}{c} = \cos B$, . . . " $\mathbf{a = c \,.\, \cos B}$ II.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels (Cosinussatz).

Beispiel.

Gegeben $c = 110{\cdot}25\ cm$ $\sphericalangle A = 22°$

Dann ist $a = c \,.\, \sin A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}37461 = \mathbf{41{\cdot}301}\ cm$

$b = c \,.\, \cos A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}92718 = \mathbf{102{\cdot}221}\ cm$

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

1. $c = 125\ cm$	2. $c = 99{\cdot}7\ cm$	3. $c = 235{\cdot}5\ mm$	4. $c = 293{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 37°$	$\sphericalangle A = 65°$	$\sphericalangle B = 41° 30′$	$\sphericalangle B = 71° 10′$