Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Resultate zu c.

1. 28°	5. 35° 40′	9. 61°	13. 48° 40′
2. 34° 30′	6. 39° 24′	10. 69°	14. 51° 44′
3. 26°	7. 21° 46′	11. 79° 30′	15. 60° 34′
4. 16° 10′	8. 15° 48′	12. 59° 16′	16. 77° 56′

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke
mit Hilfe der Funktionstafeln.

§ 4. Für die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke erweist es sich von Vorteil, die in § 2 aufgestellten Gleichungen (Definitionen) je nach einer Dreiecksseite aufzulösen und in dieser Form als textierte Lehrsätze festzuhalten.

In Fig. 8 ist:

1.) $\frac{a}{c} = \sin A$, folglich $\mathbf{a = c \, . \, \sin A}$

$\frac{b}{c} = \sin B$, " $\mathbf{b = c \, . \, \sin B}$ I.

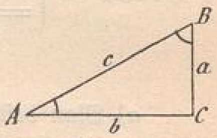

Fig. 8.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels (Sinussatz).

2.) $\frac{b}{c} = \cos A$, . . . folglich $\mathbf{b = c \, . \, \cos A}$

$\frac{a}{c} = \cos B$, . . . " $\mathbf{a = c \, . \, \cos B}$ II.

D. h. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels (Cosinussatz).

Beispiel.

Gegeben $c = 110{\cdot}25\ cm$ $\sphericalangle A = 22°$

Dann ist $a = c \, . \sin A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}37461 = \mathbf{41{\cdot}301}\ cm$

$b = c \, . \cos A = 110{\cdot}25 \times 0{\cdot}92718 = \mathbf{102{\cdot}221}\ cm$

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

1. $c = 125\ cm$	2. $c = 99{\cdot}7\ cm$	3. $c = 235{\cdot}5\ mm$	4. $c = 293{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 37°$	$\sphericalangle A = 65°$	$\sphericalangle B = 41° 30′$	$\sphericalangle B = 71° 10′$

Resultate.

1. $a = 75{\cdot}227\ cm$	2. $a = 90{\cdot}359\ cm$
$b = 99{\cdot}83\ cm$	$b = 42{\cdot}135\ cm$
3. $a = 176{\cdot}38\ mm$	4. $a = 94{\cdot}748\ m$
$b = 156{\cdot}05\ mm$	$b = 277{\cdot}787\ m$

3.) Zwischen den beiden Katheten bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{a}{b} = \operatorname{tg} A, & \text{folglich} & \mathbf{a = b \,.\, tg\, A} \\[2ex] \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} B, & \text{„} & \mathbf{b = a \,.\, tg\, B} \end{array}\right\} \quad \text{III.}$$

D. h. Jede Kathete ist gleich der anderen Kathete, multipliziert mit dem Tangens des der ersteren gegenüberliegenden Winkels (Tangenssatz).

4.)
$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{a}{b} = \operatorname{cotg} B, & \text{folglich} & \mathbf{a = b \,.\, cotg\, B} \\[2ex] \dfrac{b}{a} = \operatorname{cotg} A, & \text{„} & \mathbf{b = a \,.\, cotg\, A} \end{array}\right\} \quad \text{IV.}$$

D. h. Jede Kathete ist gleich der anderen Kathete, multipliziert mit dem Cotangens des der ersteren anliegenden Winkels (Cotangenssatz).

Übungsbeispiele.

1. Wie groß ist die Kathete b, wenn in Fig. 8

α) $a = 25{\cdot}25\ m$, $\sphericalangle A = 29^0\ 20'$ β) $a = 99{\cdot}95\ m$, $\sphericalangle B = 37^0\ 30'$ γ) $a = 17{\cdot}85\ m$, $\sphericalangle A = 73^0\ 12'$ ist?

2. Wie groß ist die Kathete a, wenn in Fig. 8

α) $b = 715{\cdot}8\ mm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 40'$ β) $b = 357{\cdot}5\ dm$, $\sphericalangle B = 40^0\ 50'$ γ) $b = 28{\cdot}35\ m$, $\sphericalangle A = 65^0\ 44'$ ist?

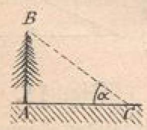

Fig. 9.

3. Wie viele Meter beträgt die Höhe AB eines vertikalen Baumes (Fig. 9), dessen Schatten AC auf horizontalem Boden $15{\cdot}75\ m$ mißt, wenn die Sonnenstrahlen unter $33^0\ 30'$ (α) einfallen?

Resultate.

1. α) $44{\cdot}93\ m$ β) $76{\cdot}69$ γ) $5{\cdot}388\ m$
2. α) $1223{\cdot}3\ mm$ β) $413{\cdot}7\ dm$ γ) $62{\cdot}885\ m$
3. $h = 10{\cdot}424\ m$

5.) Aus den Gleichungen I. und II. ergeben sich weiters noch die Gleichungen

$$\text{V.}\quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}},\quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\cos B}},\quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\cos A}}\quad \text{VI.}$$

D. h. Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete, dividiert durch den Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden (oder: dividiert durch den Cosinus des dieser Kathete anliegenden) Winkels.

Beispiele.

1. $a = 49 \cdot 5\ m$
$\sphericalangle A = 31^\circ 40'$
$c = \frac{a}{\sin A} = 49 \cdot 5 : 0 \cdot 52498$
$c = \mathbf{94 \cdot 29}\ m$

2. $b = 125 \cdot 8\ cm$
$\sphericalangle A = 62^\circ 50'$
$c = \frac{b}{\cos A} = 125 \cdot 8 : 0 \cdot 45658$
$c = \mathbf{275 \cdot 53}\ cm$

Für die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke beachte man folgende, auf Klangähnlichkeit beruhende Merkregeln:

1. Immer, wenn die Hypote **nus** e in der Rechnung vorkommt, hat man si**nus** oder cosi**nus** zu nehmen. (Sätze I, II, V und VI.)

2. Kommen nur die beiden Ka t h e ten vor, so nimmt man t a n g e n s oder cot a n g e n s. (Sätze III, IV.)

Übungsbeispiele.

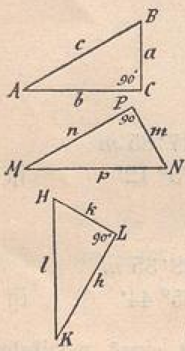

Fig. 10.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

$\sphericalangle C = 90^\circ$ 1. $c = 58 \cdot 7\ m$, $\sphericalangle A = 29^\circ 10'$ 2. $c = 62 \cdot 3\ cm$, $\sphericalangle B = 37^\circ 30'$

$\sphericalangle P = 90^\circ$ 3. $m = 42 \cdot 7\ cm$, $\sphericalangle N = 53^\circ 20'$ 4. $n = 68 \cdot 3\ m$, $\sphericalangle N = 65^\circ 20'$

$\sphericalangle L = 90^\circ$ 5. $k = 53 \cdot 65\ m$, $\sphericalangle H = 72^\circ 20'$ 6. $l = 458 \cdot 73\ dm$, $\sphericalangle K = 39^\circ 40'$

7. Wie groß ist die Beschleunigungskomponente γ (Fig. 11), mit welcher eine Kugel über eine schiefe Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 17^\circ 40'$ herabrollt? (Beschleunigung der Schwere $g = 9 \cdot 81\ m$.)

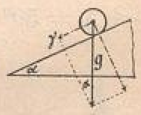

Fig. 11.

8. Ein auf horizontaler Unterlage liegender Körper (Fig. 12) wird durch eine unter dem Winkel $\alpha = 27^\circ 30$, geneigte Kraft $P = 25 \cdot 75\ kg$ geschoben.

a) Wie groß ist die Bewegungskomponente p?

b) Wie groß ist die zur Verstärkung der Reibung dienende Druck-Komponente n?

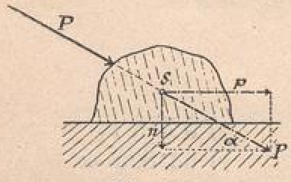

Fig. 12.

c) Wie groß ist die Reibung R, wenn der Reibungskoëffizient 0·21 und das Gewicht des Körpers Q = 35·5 *kg* ist?

9. *a)* Wie groß sind die Spannungen (z und d) in den Teilen a c und b c der in Fig. 13 dargestellten Eisenkonstruktionen, wenn die vertikale Belastung

$Q = 785\,kg$ und der $\sphericalangle\,\alpha = 57^{0}\,30'$ ist?

(α bedeutet die Neigung des schrägen Konstruktionsteiles gegen die Vertikale.)

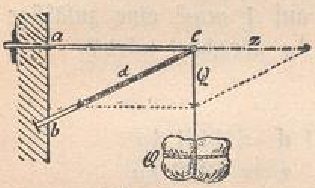

Fig. 13 a.

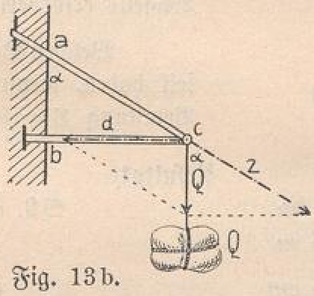

Fig. 13 b.

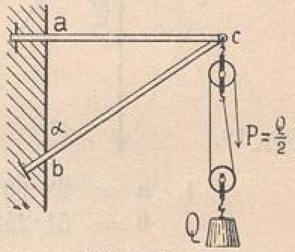

Fig. 13 c.

Dieselbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

b) $Q = 555\,kg \quad \sphericalangle\,\alpha = 58^{0}$ *c)* $Q = 2375\,kg \quad \sphericalangle\,\alpha = 55^{0}\,20'$

Wie stellen sich die Lösungen, wenn die Last Q nicht unmittelbar am Punkte c, sondern nach Fig. 13 c an einem Rollenzuge hängt?

10. Die Bergspitze S erscheint von C aus unter dem Elevations- (Höhen-) Winkel $\alpha = 6^{0}\,10'$. Wie groß ist der Höhenunterschied h beider Punkte S und C, wenn ihre Horizontalentfernung CF = b 5867 *m* beträgt? (Fig. 14.)

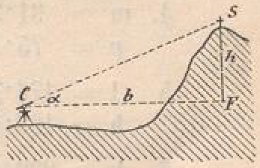

Fig. 14.

11. *a)* Ein Graben (Fig. 15) hat die Tiefe $t = 2·25\,m$ und beiderseits einen Böschungswinkel $\alpha = 35^{0}\,30'$. Wie groß ist die Grabenseite AC und die obere Breite CD, wenn die Grabensohle AB... 5·75 *m* breit ist?

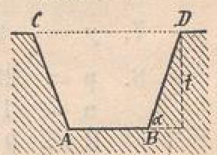

Fig. 15.

b) Ein Graben (Fig. 16) hat eine Grabensohle von 5·25 *m* Breite, eine Tiefe $t = 3·25\,m$ und seine beiden Seitenwände besitzen die Böschungswinkel $w_1 = 65\frac{1}{2}^{0}$ und $w_2 = 37^{0}$. Wie groß ist die obere Breite des Grabens?

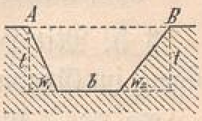

Fig. 16.

12. Wie groß ist die Breite AP eines Flusses (Fig. 17), wenn die zu AP senkrechte „Standlinie" $AB = 95·35\,m$ und der Visierwinkel $PBA = 51^{0}\,40'$ ist?

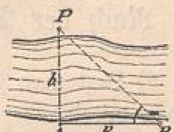

Fig. 17.

13. Auf einer Arbeitsbahn vom Neigungswinkel $\alpha = 21^{0}\,20'$ wird ein Wagen vom Gewichte $Q = 2375\,kg$ mittels Drahtseils emporgezogen. (Fig. 18.)

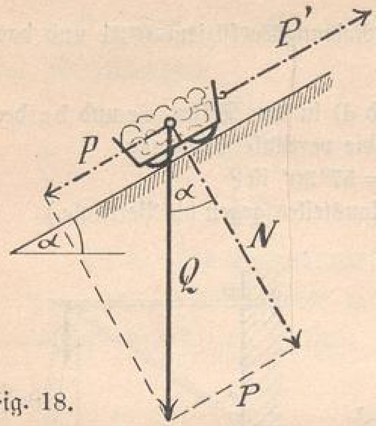

Fig. 18.

Wie groß sind die parallel und senkrecht zum Geleise wirkenden Komponenten P und N?

Wie groß ist die Reibung, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0 \cdot 08$ ist?

Wie groß ist die zum Hinaufziehen des Wagens erforderliche Kraft P'?

Welchen Durchmesser δ muß das Drahtseil haben, wenn auf 1 mm^2 eine zulässige Belastung $S = 9$ *kg* gerechnet wird?

Resultate.

1. $a = 28 \cdot 607$ *m*
   $b = 51 \cdot 258$ *m*
2. $a = 49 \cdot 426$ *cm*
   $b = 37 \cdot 926$ *cm*
3. $n = 57 \cdot 355$ *cm*
   $p = 71 \cdot 505$ *cm*
4. $m = 31 \cdot 366$ *m*
   $p = 75 \cdot 158$ *m*
5. $l = 176 \cdot 78$ *m*
   $h = 168 \cdot 44$ *m*
6. $k = 292 \cdot 82$ *dm*
   $h = 353 \cdot 12$ *dm*
7. $\gamma = 2 \cdot 977$ *m*
8. $p = 22 \cdot 84$ *kg*
   $n = 11 \cdot 89$ *kg*
   $R = 9 \cdot 952$ *kg*

*) 9. *a)* $d = 1461$ *kg*
   $z = 1232$ *kg*
   b) $d = 1047$ *kg*
   $z = 888$ *kg*
   c) $d = 4175$ *kg*
   $z = 3434$ *kg*

10. $h = 633 \cdot 9$ *m*

11. *a)* $AC = 3 \cdot 875$ *m*
    $CD = 12 \cdot 058$ *m*
    b) $AB = 11 \cdot 043$ *m*

12. $b = 120 \cdot 59$ *m*

13. $P = 863$ *kg*
    $N = 2212$ *kg*
    $R = 177$ *kg*
    $P' = 1040$ *kg*
    $\delta = 13 \cdot 13$ *mm*

Konstruktion eines Winkels mit Hilfe der Funktionswerte.

§ 5. Mit Hilfe der Funktionstabellen kann man auch einen beliebigen, im Gradmaße gegebenen Winkel ohne Transporteur verzeichnen.

Es sei z. B. ein Winkel $\omega = 29^0 10'$ aufzutragen.

Nach der Tabelle ist $\quad \operatorname{tg} 29^0 10' = 0 \cdot 558 .. = \frac{55 \cdot 8}{100}$

---

*) Legt man der Aufgabe die Fig. 13 b zugrunde, so sind in den Resultaten d und z miteinander zu vertauschen.

Nach Fig. 13 c ist der bei c wirksame Druck $= 1 \cdot 5$ Q; daher sind auch die Werte d und z mit $1 \cdot 5$ zu multiplizieren.