Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Das reguläre Polygon.

Das reguläre Polygon

§ 14. läßt sich, indem man die Endpunkte einer Seite mit dem Mittelpunkte des Polygons verbindet, auf das hiedurch entstehende gleichschenklige Dreieck (das sogenannte Bestimmungsdreieck) zurückführen. Fällt man in diesem Dreiecke (A B O in Fig. 34) die Höhe O M, so ist im rechtwinkligen Dreiecke A M O

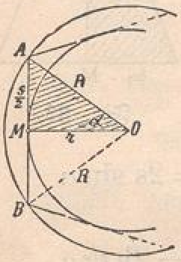

Fig. 34.

die halbe Polygonsseite $\frac{s}{2} = AM$,

der Radius des umschriebenen Kreises $R = OA$,

der Radius des eingeschriebenen Kreises $r = OM$,

und der Winkel $AOM = \alpha = \frac{180^0}{n}$,

wenn n die Seitenzahl des Polygons bedeutet.

Aus diesem Dreiecke ergeben sich die Gleichungen:

$$s = 2R \sin \alpha \qquad s = 2r \operatorname{tg} \alpha$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \alpha} \qquad r = \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

Übungsbeispiele.

1. Einem Kreise vom Radius 57·5 *mm* werden ein reguläres Neuneck, Zehneck, Fünfzehneck eingeschrieben, einem zweiten Kreise vom Radius 4·83 *m* ein reguläres Zwölfeck, Sechzehneck und Zwanzigeck umgeschrieben. Es sind die Seiten dieser Polygone zu berechnen.

2. Man stelle eine allgemeine Formel auf, nach welcher aus der Seite s und der Eckenzahl n eines regulären Polygons die Radien seines eingeschriebenen und umschriebenen Kreises berechnet werden können.

3. Nach diesen Formeln berechne man die besagten Radien für ein reguläres Fünfeck, Siebeneck und Achtzehneck, wenn $s_5 = 32·5$ *cm*, $s_7 = 75·28$ *cm* und $s_{18} = 0·585$ *m* ist.

4. Wie groß ist der Umfang des einem Kreise eingeschriebenen und des umschriebenen regulären 360ecks, wenn $r = \frac{1}{2}$, $(d = 1)$ gesetzt wird? Welche Zahl ergibt sich annähernd aus den übereinstimmenden Ziffern der gefundenen Werte?

Resultate.

1. $s_9 = 39·3327$ *mm* $\quad s_{10} = 35·537$ *mm* $\quad s_{15} = 23·91$ *mm*
$u_{12} = 2·5884$ *m* $\quad u_{16} = 1·9215$ *m* $\quad u_{20} = 1·53$ *m*

2. $r = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{180^0}{n}\right)$, $R = \frac{s}{2\sin\left(\frac{180^0}{n}\right)}$

3. $r = 22{\cdot}366\ cm$ $\quad r = 78{\cdot}16\ cm$ $\quad r = 1{\cdot}65885\ m$
$R = 27{\cdot}6456\ cm$ $\quad R = 86{\cdot}75\ cm$ $\quad R = 1{\cdot}68446\ m$

4. $U = 3{\cdot}1415$ $\quad U = 3{\cdot}1416.$ Die Zahl π.

Der Rhombus

§ 15. läßt sich durch seine beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen. (Fig. 35.)

Wir wollen folgende Fälle, in denen die Seite s, die Diagonalen ($AC = \delta_1$, $BD = \delta_2$), die Winkel $A = 2\alpha$ und $B = 2\beta$ in Rechnung kommen, herausgreifen. Dabei ist stets

$$\sphericalangle \alpha = 90 - \sphericalangle \beta \qquad \sphericalangle A = 180 - \sphericalangle B$$

$$\alpha = \frac{A}{2} \qquad \beta = \frac{B}{2}$$

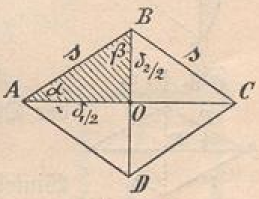

Fig. 35.

Gegeben	Zu suchen	Allgemeine Lösung	Übungsbeispiel	Resultate
s	δ_1	$\delta_1 = 2s\cos\alpha$	$s = 59{\cdot}38\ m$	$\delta_1 = 101{\cdot}656\ m$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_1 = 2s\sin\alpha$	$\sphericalangle A = 62^0\,16'$	$\delta_2 = 61{\cdot}403\ m$
δ_1	s	$s = \frac{\delta_1}{2} : \cos\alpha$	$\delta_1 = 125{\cdot}8\ dm$	$s = 96{\cdot}687\ dm$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg}\alpha$	$\sphericalangle A = 98^0\,50'$	$\delta_2 = 146{\cdot}86\ dm$
δ_2	s	$s = \delta_2 : 2\sin\alpha$	$\delta_2 = 73{\cdot}5\ cm$	$\delta_1 = 85{\cdot}302\ cm$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_1 = \delta_2 . \operatorname{cotg}\alpha$	$\sphericalangle A = 81^0\,30'$	$s = 56{\cdot}30\ cm$
δ_1	$\sphericalangle \alpha$	$\cos\alpha = \frac{\delta_1}{2s}$	$\delta_1 = 225{\cdot}25\ m$	$\sphericalangle A = 100^0\,17'\,40''$
s	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg}\alpha$	$s = 175{\cdot}75\ m$	$\delta_2 = 269{\cdot}85\ m$
δ_1	s	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta_1}$	$\delta_1 = 135{\cdot}5\ cm$	$\sphericalangle A = 67^0\,4'\,4''$
δ_2	$\sphericalangle A$	$s = \delta_1 : 2\cos\alpha$	$\delta_2 = 89{\cdot}8\ cm$	$s = 81{\cdot}278\ cm$