



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Der Rhombus

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76733)

2. $r = \frac{s}{2} \cdot \cotg\left(\frac{180^\circ}{n}\right), \quad R = \frac{s}{2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$
3. $r = 22 \cdot 366 \text{ cm} \quad r = 78 \cdot 16 \text{ cm} \quad r = 1 \cdot 65885 \text{ m}$
 $R = 27 \cdot 6456 \text{ cm} \quad R = 86 \cdot 75 \text{ cm} \quad R = 1 \cdot 68446 \text{ m}$
4. $U = 3 \cdot 1415 \quad U = 3 \cdot 1416. \quad \text{Die Zahl } \pi.$

Der Rhombus

§ 15. läßt sich durch seine beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen. (Fig. 35.)

Wir wollen folgende Fälle, in denen die Seite s , die Diagonalen ($AC = \delta_1, BD = \delta_2$), die Winkel $A = 2a$ und $B = 2\beta$ in Rechnung kommen, herausgreifen. Dabei ist stets

$$\sphericalangle a = 90 - \sphericalangle \beta \quad \sphericalangle A = 180 - \sphericalangle B$$

$$a = \frac{A}{2} \quad \beta = \frac{B}{2}$$

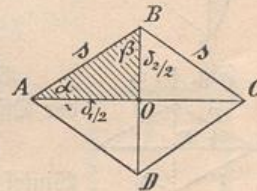


Fig. 35.

Gegeben	Zu suchen	Allgemeine Lösung	Übungsbeispiel	Resultate
s	δ_1	$\delta_1 = 2s \cos a$	$s = 59 \cdot 38 \text{ m}$	$\delta_1 = 101 \cdot 656 \text{ m}$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_2 = 2s \sin a$	$\sphericalangle A = 62^\circ 16'$	$\delta_2 = 61 \cdot 403 \text{ m}$
δ_1	s	$s = \frac{\delta_1}{2} : \cos a$	$\delta_1 = 125 \cdot 8 \text{ dm}$	$s = 96 \cdot 687 \text{ dm}$
$\sphericalangle A$	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg} a$	$\sphericalangle A = 98^\circ 50'$	$\delta_2 = 146 \cdot 86 \text{ dm}$
δ_2	s	$s = \frac{\delta_2}{2} : \sin a$	$\delta_2 = 73 \cdot 5 \text{ cm}$	$\delta_1 = 85 \cdot 302 \text{ cm}$
$\sphericalangle A$	δ_1	$\delta_1 = \delta_2 \cdot \cotg a$	$\sphericalangle A = 81^\circ 30'$	$s = 56 \cdot 30 \text{ cm}$
δ_1	$\sphericalangle a$	$\cos a = \frac{\delta_1}{2s}$	$\delta_1 = 225 \cdot 25 \text{ m}$	$\sphericalangle A = 100^\circ 17' 40''$
s	δ_2	$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{tg} a$	$s = 175 \cdot 75 \text{ m}$	$\delta_2 = 269 \cdot 85 \text{ m}$
δ_1	s	$\operatorname{tg} a = \frac{\delta_2}{\delta_1}$	$\delta_1 = 135 \cdot 5 \text{ cm}$	$\sphericalangle A = 67^\circ 4' 4''$
δ_2	$\sphericalangle A$	$s = \frac{\delta_2}{2} : \sin a$	$\delta_2 = 89 \cdot 8 \text{ cm}$	$s = 81 \cdot 278 \text{ cm}$

Bermischte Beispiele.

1. Wie groß ist der brechende Winkel ω eines Glasprismas (Fig. 29), wenn $AB = 35 \text{ mm}$, $AC = BC = 45.5 \text{ mm}$ ist?

2. Wie groß ist der Bogenwinkel ω in einem Kreise vom Radius $r = 65.54 \text{ cm}$, wenn die zugehörige Sehne 100 cm mißt? Wie groß sind die Flächeninhalte des zugehörigen Sektors und Segmentes?

3. Der Schwerpunktsabstand OS (Fig. 36) eines Kreisbogens (aus Draht) ist nach der Proportion

$$OS : r = \text{Sehne } \overline{AB} : \text{arc } \widehat{AB}$$

zu bestimmen, wenn $r = 71.56 \text{ cm}$ und der Bogenwinkel $\angle AOB = \omega = 110^\circ 25'$ ist.

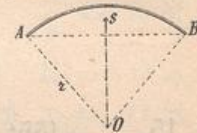


Fig. 36.

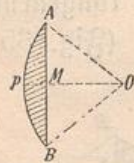


Fig. 37 a.

4. An einer plankonvexen (plankonkaven) Linse (Fig. 37 a, und 37 b) wurden folgende Abmessungen gefunden:

$$AB = 43.5 \text{ mm} \quad (65.5 \text{ mm})$$

$$MP = 5.75 \text{ mm} \quad (7.25 \text{ mm})$$

Wie groß ist der Krümmungsradius r und der Öffnungswinkel $\angle AOB = \omega$?*

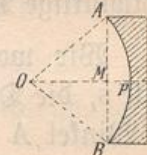


Fig. 37 b.



Fig. 38.

5. Wie groß ist die Resultierende R zweier gleicher, unter einem Winkel $\omega = 61^\circ 30'$ zusammenwirkender Kräfte $P = 52.8 \text{ kg}$?

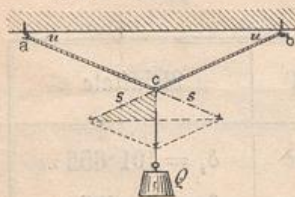


Fig. 39.

6. An den beiden symmetrischen Seilstücken ac und bc (Fig. 39), welche unter einem Winkel $u = 37^\circ 22\frac{1}{2}'$ gegen die Horizontale geneigt sind, hängt vertikal eine Last $Q = 125.5 \text{ kg}$. Wie groß ist die Spannung in jedem Seilstücke?

7. a) Wie groß sind die Spannungen in den beiden, unter demselben Winkel $\alpha = 25^\circ 30'$ gegen die Vertikale geneigten Konstruktionsteilen ac und bc (Fig. 40), wenn im Punkte c eine vertikale Belastung $Q = 785.5 \text{ kg}$ wirkt?

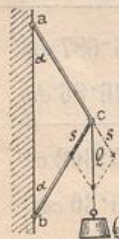


Fig. 40.

Die selbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

b) $Q = 212.5 \text{ kg}$

c) $Q = 2730 \text{ kg}$

$\alpha = 31^\circ 10'$

$\alpha = 51^\circ$

8. a) Zwei im ebenen Gelände führende geradlinige Bahnstrecken MA und NB (Fig. 41), welche den Winkel $\omega = 78^\circ 20\frac{1}{2}'$ mit einander einschließen, sollen durch einen Kreisbogen vom Radius $R = 275 \text{ m}$ verbunden werden. Man berechne die „Tangentenlängen“ PA und PB und die Entfernung des Bogenscheitels S von dem Winkelpunkte P .

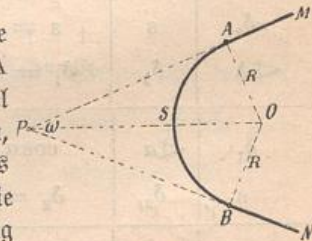


Fig. 41.

*) Setzt man $AM = s$ und $PM = h$, so ist $(\triangle OMA) \dots r^2 = (r - h)^2 + s^2$, woraus zunächst r zu berechnen ist.

8. b) Wie groß muß in vorstehender Aufgabe der Radius R werden, wenn $\omega = 110^\circ 20'$ ist und wenn örtlicher Verhältnisse halber die Bogenmitte S von P eine Entfernung von 95 m haben muß?

Anleitung: $PO - OS = PS$.

9. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines einfach armierten Trägers (Fig. 42) überträgt sich auf die vertikale Stütze S der Vertikaldruck

$$q = \frac{5}{8} Q.$$

Wie groß wird die Zugspannung z in den schmiedeeisernen Zugstangen sein, wenn diese unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt sind?

Welchen Durchmesser δ müssen diese Zugstangen erhalten, wenn auf 1 mm^2 Querschnitt 7 kg zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

a) $Q = 4780\text{ kg}$

b) $Q = 5050\text{ kg}$

$\sphericalangle \alpha = 10\frac{1}{2}^\circ$

$\sphericalangle \alpha = 12^\circ 20'$

10. An einer einfachen Kniepresse (Fig. 43) wirkt eine horizontale Kraft P , während die Schenkel der Presse mit der Horizontalen den Winkel α einschließen.

Man berechne:

1. Die Druckspannung s in den Schenkeln,

2. den Horizontalschub h ,

3. den vertikalen Preßdruck v

für folgende Angaben:

a) $P = 25 \cdot 5\text{ kg}$

b) $P = 18 \cdot 75\text{ kg}$

$\sphericalangle \alpha = 88^\circ 25'$

$\sphericalangle \alpha = 89^\circ$

11. Von der gleichmäßig verteilten Gesamtbelastung Q eines einfachen Sprengwerks (Fig. 44), dessen Streben unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt sind, entfällt auf die Mitte der vertikale Druck $q = \frac{5}{8} Q$. Man berechne den Druck s in den Streben, den Horizontalschub h und den Vertikaldruck v für folgende Angaben:

a) $Q = 4680\text{ kg}$

b) $Q = 1564\text{ kg}$

$\sphericalangle \alpha = 50^\circ$

$\sphericalangle \alpha = 47^\circ$

Anmerkung. Man beachte die Kongruenz der zu bildenden Kräfte Dreiecke.

12. Auf einen sphärischen Hohlspiegel vom Radius r fällt parallel zur Achse ein Lichtstrahl L (Fig. 45) unter dem

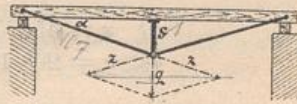


Fig. 42.

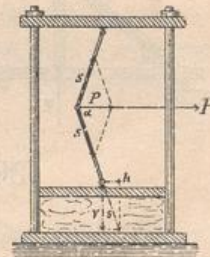


Fig. 43.

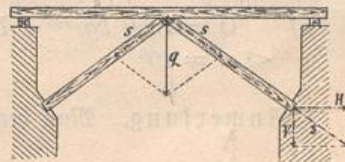


Fig. 44.

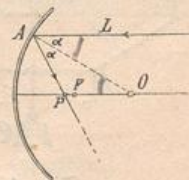


Fig. 45.

Winkel α (gegen sein Einfallslot OA) und schneidet als reflektierter Strahl die Achse im Punkte P. Wie weit ist dieser Punkt vom theoretischen Brennpunkte F entfernt? ($OF = \frac{r}{2}$).

a) $r = 45.75 \text{ cm}$
 $\sphericalangle \alpha = 20^\circ 10'$

b) $r = 205 \text{ cm}$
 $\sphericalangle \alpha = 5^\circ 10'$

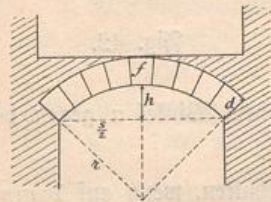


Fig. 46.

Anleitung: $\triangle OAP$ ist gleichschenkelig. (Warum?)

13. Ein flaches Tonnengewölbe (Fig. 46) hat eine Spannweite $s = 3.5 \text{ m}$, eine Pfeilhöhe $h = \frac{1}{8} s$ und eine Stärke $d = 30 \text{ cm}$. Wie groß ist die Stirnfläche f des Gewölbes und wie viel kg wiegt das laufende Meter desselben, wenn das spezifische Gewicht $\sigma = 2.75 [1.65]$ ist? (Siehe Anleitung zur Aufgabe 4.)

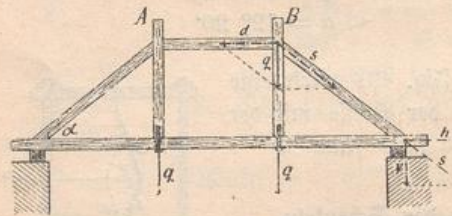


Fig. 47.

14. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines doppelten Hängewerkes wird auf jede der beiden Hängesäulen (A und B, Fig. 47) ein vertikaler Druck $q = \frac{11}{30} Q$ übertragen.

Man bestimme:

1. den Druck d im Spannriegel,
2. den Strebendruck s ,
3. die Zugspannung h im Hauptbalken,
4. den Auflagerdruck v .

a) $Q = 7050 \text{ kg}$
 $\sphericalangle \alpha = 40^\circ$

b) $Q = 6150 \text{ kg}$
 $\sphericalangle \alpha = 35^\circ$

c) $Q = 8175 \text{ kg}$
 $\sphericalangle \alpha = 48^\circ$

Anmerkung. Man beachte die Kongruenz der zu bildenden Kräftedreiecke.

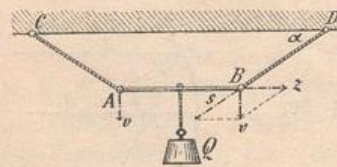


Fig. 48.

15. Ein Stab AB ist mit seinen Enden an zwei gleich lange, unter den Winkeln α gegen den Horizont geneigten Seilstücken (Fig. 48) befestigt. An der Mitte des Stabes ist ein Gewicht Q angehängt. Wie groß sind die Seilspannungen s und die Zugspannung z im Stabe, wenn das Gewicht des Stabes q ist?

a) $Q = 245 \text{ kg}$
 $q = 80.8 \text{ kg}$

b) $Q = 300 \text{ kg}$
 $q = 75.5 \text{ kg}$

$\sphericalangle \alpha = 58^\circ 45'$

$\sphericalangle \alpha = 65^\circ 15'$

Anleitung: Die Gesamtlast $(Q + q)$ zerlegt sich in zwei gleiche Parallelkomponenten $v = \frac{Q + q}{2}$, welche nach den Richtungen des Seiles und Stabes zu zerlegen sind.

16. Welche Winkel α und β bilden die äußeren und die inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise von den Radien R und r und der Zentraldistanz a mit der Zentrallinie, wenn $R = 75 \text{ cm}$, $r = 35 \text{ cm}$ und $a = 225 \text{ cm}$ ist?

Wie lang sind die zwischen den Berührungspunkten liegenden Abschnitte der beiden Tangenten?

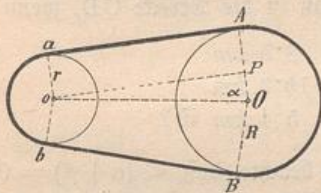


Fig. 49 a.

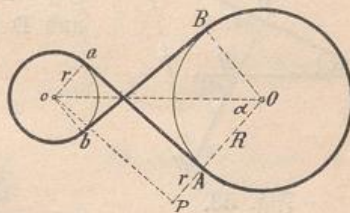


Fig. 49 b.

17. Zwei Riemenscheiben (Fig. 49 a und 49 b) von den Radien $R = 56 \text{ cm}$ und $r = 26 \text{ cm}$ und der Zentraldistanz $a = 335 \text{ cm}$ sollen durch einen Treibriemen verbunden werden. Wie lang muß dieser Riemen sein, wenn die beiden Scheiben

a) in selben Sinne (Fig. 49 a)

b) in entgegengesetzten Sinne (Fig. 49 b)

rotieren sollen?

18. Von der gleichförmig verteilten Gesamtbelastung Q eines doppelt armierten Trägers (Fig. 50) wird auf jede Stütze der Vertikaldruck $q = \frac{11}{30} Q$ übertragen.

Man berechne die Zugspannungen z_1 und z_2 in den Zugstangen und die für letztere erforderlichen Durchmesser (zulässige Beanspruchung für 1 mm^2 Querschnitt = 7 kg) für folgende Annahmen:

a) $Q = 4775 \text{ kg}$ b) $Q = 6750 \text{ kg}$

$\sphericalangle \alpha = 10\frac{1}{2}^\circ$ $\sphericalangle \alpha = 12\frac{1}{2}^\circ$



Fig. 50.

19. Wie lang muß ein straff gespannter Riemen sein, welcher in der durch Figur 51 angegebenen Weise um die drei Scheiben M, P, N geführt wird, wenn $R = 25 \text{ cm}$

$r = 20 \text{ cm}$

$\rho = 12 \text{ cm}$

und $MP = PN = 80 \text{ cm}$ ist?

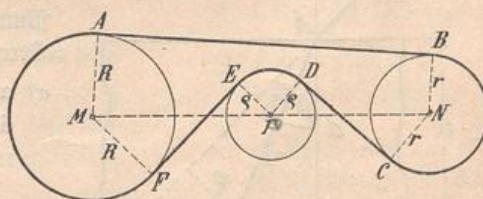


Fig. 51.

(Die Scheibenmittelpunkte M, P und N liegen in einer Geraden.)

(Anleitung: Siehe Aufgaben 16, 17.)

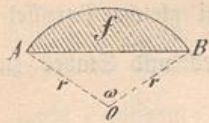


Fig. 52.

20. Wie groß ist die Fläche f eines Kreissegmentes (Fig. 52) in einem Kreise vom Radius $r = 45.5 \text{ cm}$, wenn der zugehörige Zentrwinkel $\omega = 80^\circ$ ist?

(Anleitung: $f = \text{Sektor } AOB - \triangle AOB$.)

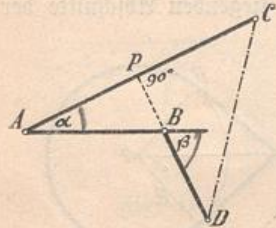


Fig. 53.

21. Vor der geradlinigen Straße, welche die Orte A und B verbindet, zweigen bei A und B zwei geradlinige Straßen unter den Winkeln $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 58^\circ$ (Fig. 53) nach links und rechts ab, welche zu den Orten C und D führen. Wie groß ist die Strecke CD, wenn:

$$AB = 8.5 \text{ km}$$

$$AC = 15.3 \text{ km}$$

$$BD = 5.4 \text{ km} \text{ ist?}$$

(Anleitung: Man beachte, daß $\sphericalangle (\alpha + \beta) = 90^\circ$, daß also die Hilfsdreiecke ABP und DPC rechtwinklig sind.)

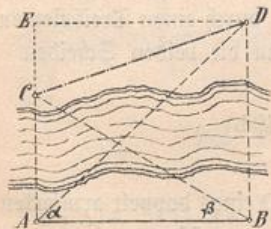


Fig. 54.

22. Wie groß ist (Fig. 54) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte C und D, wenn

$$AB = a = 1357.5 \text{ m}$$

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA = 90^\circ$$

$$\sphericalangle DAB = \alpha = 53^\circ 15' 30''$$

$$\sphericalangle CBA = \beta = 27^\circ 35' 15'' \text{ ist?}$$

(Anleitung: Man berechne BD und CA und dann aus dem rechtwinkligen Hilfsdreiecke CDE ($DE \parallel AB$) die Strecke CD.)

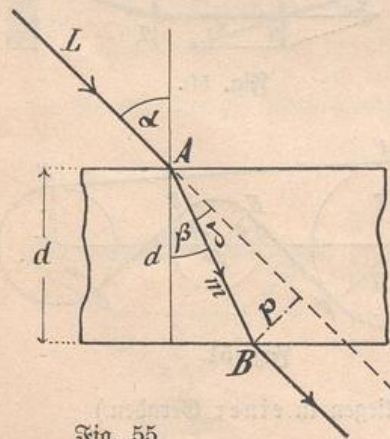


Fig. 55.

23. Ein Lichtstrahl L fällt unter einem Winkel α (Fig. 55) auf eine planparallele Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsindex n . Man bestimme die Parallelverschiebung p des Strahles.

$$a) \alpha = 68^\circ 10' \quad b) \alpha = 56^\circ 20'$$

$$d = 38.5 \text{ mm} \quad d = 45 \text{ mm}$$

$$n = 1.51 \quad n = 1.53$$

Wie groß ist die Plattendicke d , wenn:

$$c) \alpha = 64^\circ \quad d) \alpha = 58^\circ$$

$$n = 1.53 \quad n = 1.53$$

$$p = 20.9 \text{ mm} \quad p = 17.33 \text{ mm} \text{ ist?}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

$$n = \frac{d}{\omega \beta}$$

24. Auf eine plankonvexe Linse (Fig. 55 a) vom Krümmungshalbmesser $r = 75 \text{ mm}$ und dem Brechungsindex $n = 1.51$ fällt ein Parallelstrahl P auf, der den Abstand h von der Achse besitzt. In welcher Entfernung $CF = x$ wird der gebrochene Strahl P' die Achse schneiden, wenn

- $h = 15 \text{ mm}$
- $h = 10 \text{ mm}$
- $h = 5 \text{ mm}$ ist?

Anmerkung. Nach dem Brechungsgesetze ist

$$\sin \beta = n \sin \alpha$$

und $\delta = \beta - \alpha$.

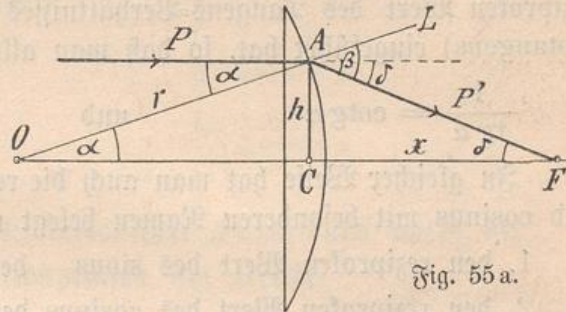


Fig. 55 a.

Resultate.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $45^\circ 14' 24''$ | 11. a) $s = 1909 \text{ kg}$
$h = 1227 \text{ kg}$
$v = 1462.5 \text{ kg}$ | 17. a) 930.3 cm
b) 947.8 cm |
| 2. $\sphericalangle \omega = 99^\circ 26' 22''$
$F = 3727.56 \text{ cm}^2$
$f = 1608.8 \text{ cm}^2$ | b) $s = 668.2 \text{ kg}$
$h = 455.8 \text{ kg}$
$v = 488.75 \text{ kg}$ | 18. a) $z_1 = 9608$
$z_2 = 9447 \text{ kg}$
$\delta_1 = 41.8 \text{ mm}$
$\delta_2 = 41.45 \text{ mm}$ |
| 3. 60.99 cm | 12. a) 14.94 mm
b) 4.16 mm | b) $z_1 = 11435 \text{ kg}$
$z_2 = 11164 \text{ kg}$
$\delta_1 = 45.61 \text{ mm}$
$\delta_2 = 45.06 \text{ mm}$ |
| 4. a) $r = 44.011 \text{ mm}$
$\sphericalangle \omega = 59^\circ 14'$
b) $r = 77.595 \text{ mm}$
$\sphericalangle \omega = 49^\circ 55' 47''$ | 13. $f = 1.1373 \text{ m}^2$
$G = 3127.5 \text{ kg}$
[$G = 1876.5 \text{ kg}$] | 19. $\widehat{AF} = 91.342 \text{ cm}$
$\widehat{BC} = 70.437 \text{ cm}$
$\widehat{ED} = 10.708 \text{ cm}$
$AB = 159.921 \text{ cm}$
$EF = 70.930 \text{ cm}$
$DC = 73.322 \text{ cm}$
$L = 476.66 \text{ cm}$ |
| 5. 90.75 kg | 14. a) $d = h = 3081 \text{ kg}$
$s = 4021 \text{ kg}$
$v = q$ | 20. $f = 425.9 \text{ cm}^2$ |
| 6. 103.4 kg | b) $d = h = 3220 \text{ kg}$
$s = 3931 \text{ kg}$
$v = q$ | 21. $CD = 12.789 \text{ km}$ |
| 7. a) 435.145 kg
b) 124.17 kg
c) 2169 kg | c) $d = h = 2699 \text{ kg}$
$s = 4033 \text{ kg}$
$v = q$ | 22. $CE = 1109.2 \text{ m}$
$CD = 1753.03 \text{ m}$ |
| 8. a) $PA = 337.53 \text{ m}$
$PS = 160.37 \text{ m}$
b) $R = 435.188 \text{ m}$ | 15. a) $s = 190.5 \text{ kg}$
$z = 98.85 \text{ kg}$
b) $s = 206.74 \text{ kg}$
$z = 86.55 \text{ kg}$ | 23. a) 24.58 mm c) 36 mm
b) 21.28 mm d) 35 mm |
| 9. a) $z = 8197 \text{ kg}$
$\delta = 38.61 \text{ mm}$
b) $z = 7388 \text{ kg}$
$\delta = 36.66 \text{ mm}$ | 16. $\sphericalangle \alpha = 10^\circ 14' 25''$
$\sphericalangle \beta = 29^\circ 16' 3''$
$AB = 221.41 \text{ cm}$
$CD = 196.27 \text{ cm}$ | 24. a) 141.74 mm
b) 144.72 mm
c) 146.48 mm |
| 10. a) $s = 461.5 \text{ kg}$
$h = 12.75 \text{ kg}$
$v = 461.3 \text{ kg}$
b) $s = 537.2 \text{ kg}$
$h = 9.375 \text{ kg}$
$v = 537.1 \text{ kg}$ | | |