Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Goniometrische Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

9. Folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

a) $\sec\alpha \, . \, \mathrm{cotg}\,\alpha$ *b)* $\mathrm{cosec}\,\alpha \, . \, \mathrm{tg}\,\alpha$ *c)* $\sec\alpha : (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha)$

d) $\dfrac{\mathrm{cotg}\,\alpha - 1}{\mathrm{cosec}\,\alpha}$ *e)* $(a + a\,\mathrm{tg}^2\alpha) . \cos\alpha$ *f)* $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\,\alpha}{\sec\alpha}$

10. Man stelle Formeln auf, nach denen tangens und cotangens nur durch den sinus oder durch den cosinus ausgedrückt erscheinen.

Resultate.

1. $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\mathrm{tg}\, 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ u. s. f.

2. $\cos\alpha = 0{\cdot}6$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$ u. s. f.

3. $\sin\beta = \frac{1}{10}\sqrt{91}$ $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{3}\sqrt{91}$ u. s. f.

4. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$ $\cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ $\mathrm{tg}\,\gamma = \sqrt{a}$ u. s. f.

5. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ u. s. f.

6. $\cos x = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ u. s. f.

7. $\sin y = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ $\cos y = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ u. s. f.

8. $\mathrm{cotg}\, z = \sqrt{8}$ $\cos z = \frac{1}{3}\sqrt{8}$ u. s. f.

9. *a)* $\mathrm{cosec}\,\alpha$ *b)* $\sec\alpha$ *c)* $\sin\alpha$

d) $\cos\alpha - \sin\alpha$ *e)* $\dfrac{a}{\cos\alpha}$ *f)* $\sin\alpha + \cos\alpha$

10. $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

Goniometrische Gleichungen.

§ 19. Ist ein Winkel dadurch bestimmt, daß eine zwischen zwei oder mehreren seiner Funktionen giltige Gleichung gegeben ist, so nennt man diese eine goniometrische Gleichung. Um sie zu lösen, führe man zunächst jene Funktionen auf eine einzige Funktion des fraglichen Winkels zurück, berechne dieselbe und bestimme sodann den zugehörigen Winkel:

Z. B.

$$\sec \alpha = 4 \cos \alpha$$
$$\alpha = ?$$
$$\frac{1}{\cos \alpha} = 4 \cos \alpha$$
$$1 = 4 \cos^2 \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = \mathbf{60^0}$$

$$2 \sin \alpha = 2 - \cos \alpha$$
$$2 \sin \alpha - 2 = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$
$$4 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha + 4 = 1 - \sin^2 \alpha$$
$$\sin^2 \alpha - \frac{8}{5} \sin \alpha + \frac{3}{5} = 0$$
$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{15}{25}}$$
$$\sin \alpha = \frac{4 \pm 1}{5}$$
$$\sin \alpha_1 = 1 \ldots \alpha_1 = \mathbf{90^0}$$
$$\sin \alpha_2 = \frac{3}{5} \ldots \alpha_2 = \mathbf{36^0 52' 11''}$$

$$3 \sin x = 2 \cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$$
$$x = \mathbf{33^0 41' 24''}$$

Übungsbeispiele.

Folgende goniometrische Gleichungen aufzulösen:

1. $743 \cos x = 398 \sec x$
2. $9 \operatorname{tg} y = 49 \operatorname{cotg} y$
3. $\operatorname{cosec} \alpha = 10 \sin \alpha$
4. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{\cdot}5$
5. $3 \sec \varphi = 1 + 3 \operatorname{tg} \varphi$
6. $5 \operatorname{cotg} y = 5 \operatorname{cosec} y - 4$
7. $5{\cdot}3 \sin x = 6{\cdot}5 \cos x$
8. $5 \cos y = 7 \sin y$
9. $58{\cdot}76 \sin \psi = 38{\cdot}62 \cos \psi$
10. $5 \sin x = 2 \operatorname{tg} x$*)
11. $3{\cdot}5 \cos x = 1{\cdot}25 \operatorname{cotg} x$
12. $\frac{5{\cdot}7 \sin x}{4{\cdot}3 \cos x} = 5{\cdot}8 \operatorname{cotg} x$

$\frac{5 \cos}{\sin} = \frac{5}{\sin} - 4$

$5 \cos = 5 - 4 \sin$

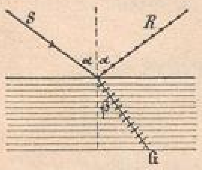

Fig. 59.

13. Von einem Lichtstrahl (Fig. 59), der aus Luft in Glas vom Brechungsexponenten $n = 1{\cdot}536$ übertritt, wird ein Teil reflektiert, ein anderer Teil nach dem Brechungsgesetze: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ gebrochen. Wie groß muß der Einfallswinkel α gewählt werden, damit der reflektierte und der gebrochene Strahl auf einander senkrecht stehen? (Maximale Polarisation.) (Anleitung: $\alpha + \beta = 90^0$.)

*) Man setze $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und kürze die Gleichung durch $\sin x$.

Resultate.

1. $x = 42^\circ 57' 18''$	5. $\varphi = 53^\circ 7' 49''$	9. $\psi = 33^\circ 18' 53''$
2. $y = 66^\circ 48' 5''$	6. $y = 77^\circ 19' 11''$	10. $x = 66^\circ 25' 18''$
3. $\alpha = 18^\circ 26' 6''$	7. $x = 50^\circ 48' 23''$	11. $x = 20^\circ 55' 29''$
4. $x = 60^\circ$	8. $y = 35^\circ 32' 16''$	12. $x = 64^\circ 26' 57''$
	13. $\alpha = 56^\circ 56' 2''$	

Funktionen stumpfer und erhabener Winkel.

§ 20. Die in dem § 17 enthaltenen Definitionen der Funktionslinien und der Funktionen lassen sich, wie wir dort bereits angedeutet haben, unmittelbar auch auf stumpfe und erhabene Winkel übertragen.

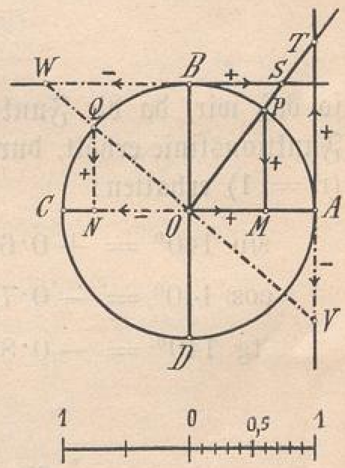

Fig. 60.

Dabei müssen wir jedoch wohl beachten, daß — gemäß den in § 17 festgesetzten Zählungen — an jeder Funktionslinie nicht nur deren Länge, sondern auch ihr R i c h t u n g s s i n n in Betracht kommt.

Dieser Richtungssinn ist in Fig. 60 an den Funktionslinien der Winkel $AOP = 54^0$ und $AOQ = 140^0$ durch Pfeile angedeutet.

Bezeichnen wir die für Spitzwinkel sich ergebenden Pfeilrichtungen durchwegs als positiv (+), so müssen wir entgegengesetzte Pfeilrichtungen als negativ (—) auffassen.

Eine einfache Betrachtung ergibt sodann folgende Zeichen-Regeln:

1. Die Sinus- und Tangenslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb des horizontalen Durchmessers (AC) liegen.