Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Grenzwerte der Funktionen.

2. Die Cosinus- und Cotangenslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie rechts oder links vom vertikalen Durchmesser (B D) liegen.

3. Die Secans- und Cosecanslinie sind positiv oder negativ, je nachdem sie auf dem beweglichen Schenkel selbst oder auf der Rückwärtsverlängerung desselben liegen.

So ist z. B. für den $\sphericalangle AOQ = 140^0$ die Sinuslinie QN positiv,
die Cosinuslinie ON negativ,
die Tangenslinie AV negativ,
die Cotangenslinie BW negativ,
die Secanslinie OV negativ,
die Cosecanslinie OW positiv,

so daß wir, da die Funktion auch das Vorzeichen der entsprechenden Funktionslinie erhält, durch Abmessung nach dem beigefügten Maßstabe ($r = 1$) erhalten:

$$\sin 140^0 = +0{\cdot}64\ldots \qquad \cot 140^0 = -1{\cdot}19\ldots$$
$$\cos 140^0 = -0{\cdot}76\ldots \qquad \sec 140^0 = -1{\cdot}31\ldots$$
$$\operatorname{tg} 140^0 = -0{\cdot}84 \qquad \operatorname{cosec} 140^0 = +15{\cdot}6.$$

Grenzwerte der Funktionen.

§ 21. Wir schicken voraus: Durch die beiden auf einander senkrechten Durchmesser A C und B D zerfällt die Zeichen-Ebene in Quadranten, die wir in der Reihenfolge von A B C D (Fig. 61) mit I, II, III, IV bezeichnen wollen. Die Radien O A, O B, O C und O D nennen wir kurzweg Quadrantenhalbmesser. Wir lassen den Winkel alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen, indem wir den beweglichen Schenkel zunächst mit dem festen Schenkel O A zusammenfallen lassen und ersteren dann im entgegengesetzten Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen. Das Vorzeichen und die numerischen Werte, welche die einzelnen Funktionen hiebei annehmen, erhalten wir durch eine einfache Betrachtung und Abmessung der Funktionslinien.

Die Grenzwerte der Funktionen ergeben sich für jene Winkel
(0°, 90°, 180°, 270°, 360°),
bei denen der bewegliche Schenkel einen Quadrantenhalbmesser durchschreitet.

Die Resultate der leicht durchzuführenden Betrachtung sind in untenstehender Tabelle zusammengefaßt.

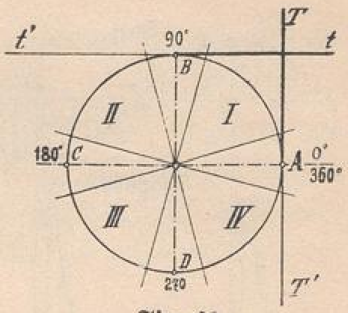

Fig. 61.

Funktion	0°	I. Qu.	90°	II. Qu.	180°	III. Qu.	270°	IV. Qu.	360°	Grenzen:
sin.	$-0+$	$+$	$+1+$	$+$	$+0-$	$-$	$-1-$	$-$	$-0+$	$+1 \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -1$
cos.	$+1+$	$+$	$+0-$	$-$	$-1-$	$-$	$-0+$	$+$	$+1+$	$+1 \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -1$
tg.	$-0+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-0+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-0+$	$+\infty \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -\infty$
cotg.	$+\infty$	$+$	$+0-$	$-$	$\mp\infty$	$+$	$+0-$	$-$	$\mp\infty$	$+\infty \cdot\cdot 0 \cdot\cdot -\infty$
sec.	$+1+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-1-$	$-$	$\mp\infty$	$+$	$+1+$	$+\infty \cdot\cdot\cdot +1$ $-1 \cdot\cdot\cdot -\infty$
cosec.	$+\infty$	$+$	$+1+$	$+$	$\pm\infty$	$-$	$-1-$	$-$	$\mp\infty$	$+\infty \cdot\cdot\cdot +1,$ $-1 \cdot\cdot\cdot -\infty$

Anmerkung 1. Die Werte von tangens, cotangens, secans und cosecans zeigen einen merkwürdigen Verlauf.

Der tangens z. B. ist bei 0° selbst gleich Null, wächst hierauf, bis er in unendlicher Nähe von 90° unendlich groß ($+\infty$) wird. In dem Augenblicke aber, da der bewegliche Schenkel den Radius OB (90°) durchschreitet, wird der tangens negativ und ist bei einer unendlich kleinen Überschreitung von 90° numerisch gleich ∞. Der Wert für tangens springt also beim Durchschreiten von 90° plötzlich von $+\infty$ auf $-\infty$, was in der Tabelle durch die Bezeichnung $\pm\infty$ dargestellt ist. Überall, wo diese oder die Bezeichnung $\mp\infty$ sich wiederholt, findet eine entsprechende sprungweise Veränderung des betreffenden Funktionswertes statt.

Anmerkung 2. Dort, wo beiderseits des Funktionswertes ein Vorzeichen gesetzt ist, findet eine stetige (nicht sprungweise) Änderung des Funktionswertes statt.

Anmerkung 3. Man kann die Veränderungen, welche die Funktionswerte erleiden, wenn der Winkel von 0° bis 360° anwächst, auch graphisch, mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, darstellen. Zu diesem Zwecke trägt man auf der Achse OX (Fig. 62) 360 gleiche Teile auf, welche die graphische Darstellung der Winkelgrade bilden,*) und in senkrechter Richtung (als Ordinate) für jeden einzelnen Grad den ihm entsprechenden Funktionswert. (Positive Funktionswerte sind nach oben, negative nach unten aufzutragen.)

*) Richtiger ist es, die in 360° geteilte Abszissenachse als Abwickelung des Kreisumfanges ($r = 1$) anzusehen. Siehe § 41.

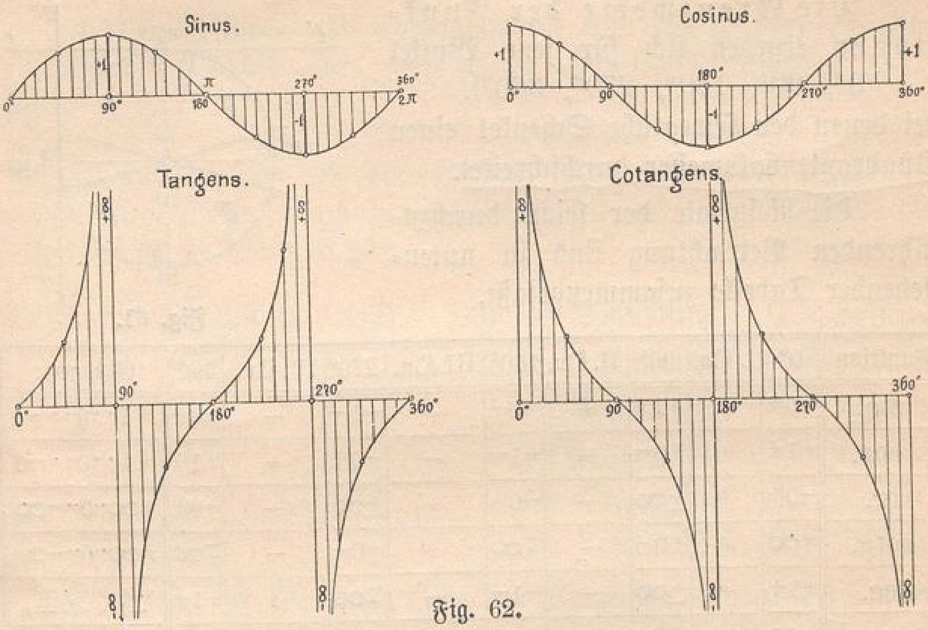

Fig. 62.

Übungsbeispiele.

1. $x = a \cos 180^0 + 2\,a \sin 90^0 - b\,\mathrm{tg}\,360^0$
2. $y = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,90^0} - 3 \sin 180^0 + 5\,\dfrac{\cos 360^0}{\sin 270^0}$
3. $z = a\,\mathrm{tg}\,45^0 - 2\,b \sin 270^0 + a \cos 180^0 + b \sec 180^0$
4. $u = a \sin 90^0 + (a - b) \cos 180^0 + b \sin 270^0$
5. Welchen Wert nehmen folgende Ausdrücke an, wenn man darin $\sphericalangle\, \alpha = 90^0$ setzt?

$$a = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$b = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$c = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}\ {}^{*)}$$
$$d = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

6. Welchen Wert erhalten vorstehende Ausdrücke für $\alpha = 180^0$?

Resultate.

1. $x = a$	5. $a = \cos \beta$	6. $a = \mp \sin \beta$
2. $y = -5$	$b = \mp \sin \beta$	$b = -\cos \beta$
3. $z = b$	$c = \mp \operatorname{cotg} \beta$	$c = \pm\,\mathrm{tg}\,\beta$
4. $u = 0$	$d = 1$	$d = \infty$

*) Für $\alpha = 90^0$ dividiere man zunächst Zähler und Nenner durch $\mathrm{tg}\,\alpha$.