Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Zurückführung der Funktionswerte überspitzer Winkel auf die Funktionen der Spitzwinkel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Zurückführung der Funktionen stumpfer und erhabener Winkel auf die Funktionen der Spitzwinkel.

§ 22. Während bei stumpfen und erhabenen Winkeln das Vorzeichen der Funktionen nach dem in § 20 angegebenen Regeln besonders bestimmt werden muß, lassen sich die numerischen Werte derselben auf die in der Tabelle enthaltenen Funktionswerte der Spitzwinkel zurückführen.

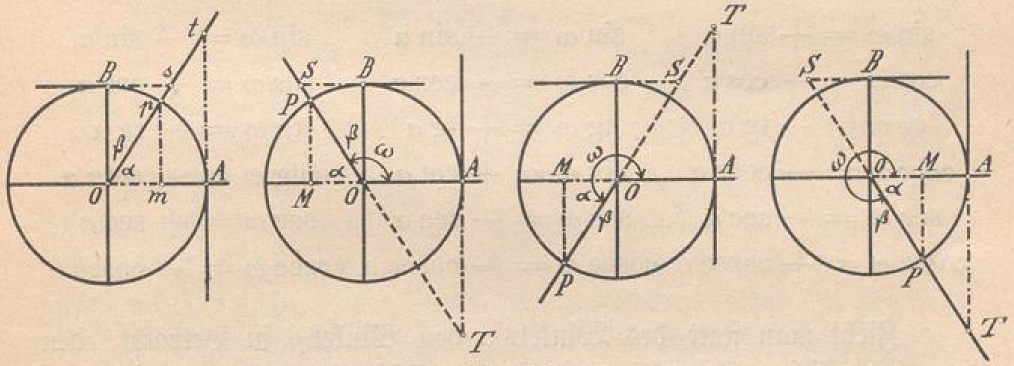

Fig. 63.

$\omega = 180^0 - \alpha$ $\omega = 180^0 + \alpha$ $\omega = 360^0 - \alpha$

In den vorstehenden Figuren sind in den gleichen Darstellungskreis die Winkel α, $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$ nebst ihren Funktionslinien verzeichnet. Es ergeben sich hiebei kongruente, bezw. sich deckende rechtwinklige Dreiecke, u. zw. ist:

$$OPM \cong Opm \qquad OAT \cong OAt \qquad OBS \cong OBs$$

woraus folgt:

$$PM = pm \qquad AT = At \qquad BS = Bs$$
$$OM = Om \qquad OT = Ot \qquad OS = Os$$

Wir sehen also, daß in allen drei, in obiger Figur dargestellten Fällen jede Funktionslinie des Winkels ω gleich ist der gleichnamigen Funktionslinie des Winkels α u. zw. ist dabei α jener Spitzwinkel, den der bewegliche Schenkel des Winkels ω mit dem nächstliegenden horizontalen Quadrantenhalbmesser bildet.

Was von den Funktionslinien gilt, gilt auch von deren Maßzahlen, also von den Funktionen selbst, und wir erhalten somit folgenden Satz:

Jede Funktion des Winkels ω ist numerisch gleich **derselben** Funktion jenes Winkels, den der bewegliche Schenkel mit dem nächstgelegenen **horizontalen** Quadranten-halbmesser einschließt.

Unter Berücksichtigung des Vorzeichens ergibt sich somit unmittelbar für:

$\omega = 180^0 - \alpha$	$\omega = 180^0 + \alpha$	$\omega = 360^0 - \alpha$
$\sin\omega = + \sin\alpha$	$\sin\omega = - \sin\alpha$	$\sin\omega = - \sin\alpha$
$\cos\omega = - \cos\alpha$	$\cos\omega = - \cos\alpha$	$\cos\omega = + \cos\alpha$
$\operatorname{tg}\omega = - \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\omega = + \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\omega = - \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}\omega = - \operatorname{cotg}\alpha$	$\cot\omega = + \cot\alpha$	$\operatorname{cotg}\omega = - \operatorname{cotg}\alpha$
$\sec\omega = - \sec\alpha$	$\sec\omega = - \sec\alpha$	$\sec\omega = + \sec\alpha$
$\operatorname{cosec}\omega = + \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\omega = - \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\omega = - \operatorname{cosec}\alpha$

Zieht man statt des Winkels α den Winkel β in Betracht, den der bewegliche Schenkel mit dem nächstgelegenen vertikalen Quadrantenhalbmesser bildet, so sieht man aus Fig. 63, daß stets $\beta = 90^0 - \alpha$ ist, daß also jede Funktion von α gleich ist der sinnverwandten Funktion des Winkels β. Daher läßt sich obenstehende Regel in folgender Weise umformen.

Jede Funktion des Winkels ω ist numerisch gleich der **sinnverwandten** Funktion jenes Spitzwinkels, den der bewegliche Halbmesser mit dem nächstgelegenen **vertikalen** Quadrantenhalbmesser einschließt.

Es ergibt sich somit nach Fig. 63 für:

$\omega = 90^0 + \beta$	$\omega = 270^0 - \beta$	$\omega = 270^0 + \beta$
$\sin\omega = + \cos\beta$	$\sin\omega = - \cos\beta$	$\sin\omega = - \cos\beta$
$\cos\omega = - \sin\beta$	$\cos\omega = - \sin\beta$	$\cos\omega = + \sin\beta$
$\operatorname{tg}\omega = - \operatorname{cotg}\beta$	$\operatorname{tg}\omega = + \operatorname{cotg}\beta$	$\operatorname{tg}\omega = - \operatorname{cotg}\beta$
$\operatorname{cotg}\omega = - \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{cotg}\omega = + \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{cotg}\omega = - \operatorname{tg}\beta$
$\sec\omega = - \operatorname{cosec}\beta$	$\sec\omega = - \operatorname{cosec}\beta$	$\sec\omega = + \operatorname{cosec}\beta$
$\operatorname{cosec}\omega = + \sec\beta$	$\operatorname{cosec}\omega = - \sec\beta$	$\operatorname{cosec}\omega = - \sec\beta$

Das im vorstehenden Gelehrte läßt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Funktion $(180^0 \pm \delta)$ } **ist numerisch gleich derselben Funktion des Winkels** δ.
Funktion $(360^0 \pm \delta)$ }

Funktion $(90^0 \pm \delta)$ } **ist numerisch gleich der sinnverwandten Funktion des Winkels** δ.
Funktion $(270^0 \pm \delta)$ }

Beispiele.

$$\sin 157^0\,20' = \left\{\begin{array}{l} = \sin(90^0 + 67^0\,20') = + \cos 67^0\,20' \\ = \sin(180^0 - 22^0\,40') = + \sin 22^0\,40' \end{array}\right\} = + 0{\cdot}38537$$

$$\operatorname{cotg} 333^0\,50' = \left\{\begin{array}{l} = \operatorname{cotg}(360^0 - 26^0\,10') = - \operatorname{cotg} 26^0\,10' \\ = \operatorname{cotg}(270^0 + 63^0\,50') = - \operatorname{tg}\ \ 63^0\,50' \end{array}\right\} = - 2{\cdot}03526$$

Da sich insbesondere bei solchen stumpfen oder erhabenen Winkeln, die mit Minuten und Sekunden gegeben sind, jener Spitzwinkel leichter berechnen läßt, den der bewegliche Schenkel mit dem nächst vorangehenden Quadrantenhalbmesser bildet, so empfiehlt sich zur Bestimmung der Funktionen überspitzer Winkel folgender Vorgang:

Man bestimmt zunächst den „Überschußwinkel" des gegebenen Winkels gegen den nächst vorhergehenden Quadrantenhalbmesser. Ist dieser Halbmesser horizontal, so ist jede Funktion des gegebenen Winkels numerisch gleich derselben Funktion des Überschußwinkels. Ist dagegen jener Halbmesser vertikal, so ist jede Funktion des gegebenen Winkels numerisch gleich der sinnverwandten Funktion des Überschußwinkels.

Das Vorzeichen der betreffenden Funktion ist nach den in § 20 angegebenen Regeln besonders zu bestimmen.

Beispiele.

$\sin 139^0\,15'\,20'' = + \cos 49^0\,15'\,20'' = + 0{\cdot}65268$
bezogen auf . . . . 90^0

$\cos\ 99^0\,20'\,30'' = - \sin\ 9^0\,20'\,30'' = - 0{\cdot}16232$
bezogen auf . . . . 90^0

$\operatorname{tg} 217^0\,28'\,45'' = + \operatorname{tg}\ 37^0\,28'\,45'' = + 0{\cdot}76675$
bezogen auf . . . . 180^0

$\cos 341^0\,30'\,40'' = + \sin 71^0\,30'\,40'' = + 0{\cdot}94838$
bezogen auf . . . . 270^0

Mit Rücksicht auf die trigonometrische Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes ist besonders das Bestimmen von sinus und cosinus stumpfer Winkel zu üben, wobei festzuhalten ist:

$$\sin \omega = + \cos (\omega - 90^0) = + \sin (180^0 - \omega)$$
$$\cos \omega = - \sin (\omega - 90^0) = - \cos (180^0 - \omega)$$

§ 23. Nach § 22 haben die vier Winkel α, $(180^0 - \alpha)$, $(180^0 + \alpha)$, und $(360^0 - \alpha)$ numerisch gleiche Funktionen, die für je zwei dieser Winkel auch bezüglich des Vorzeichens übereinstimmen.

Daraus folgt, daß zu jedem Funktionswerte zwei zwischen 0^0 und 360^0 gelegene Winkel gehören, die man im allgemeinen folgendermaßen findet. Man sucht zunächst in der Tafel jenen Spitzwinkel α auf, der dem numerischen Werte der vorliegenden Funktion entspricht.

Diesem numerischen Werte entsprechen aber außer dem Winkel α noch die Winkel $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$. Von diesen vier Winkeln hat man nun jene zwei zu nehmen, welche dem vorliegenden Funktionswerte auch bezüglich seines Vorzeichens entsprechen.

Ist z. B. aus $\sin \varphi = - 0 \cdot 52250$ der Winkel φ zu bestimmen, so findet man nach dem angegebenen Vorgange:

$$\alpha = 31^0\,30'$$

Von den Winkeln $(180 - \alpha)$, $(180 + \alpha)$ und $(360 - \alpha)$ haben nur die beiden letztgenannten einen negativen sinus.

Somit ist

$$\varphi_1 = 180^0 + \alpha = 211^0\,30'$$
$$\varphi_2 = 360^0 - \alpha = 328^0\,30'$$

Beispiele.

1. $\sin x \quad = + 0 \cdot 79158 \ldots\ldots\ldots \alpha = 52^0\,20'$ $\quad x_1 = \qquad\quad \alpha = 52^0\,20'$
   $x_2 = 180^0 - \alpha = 127^0\,40'$

2. $\cos x \quad = - 0 \cdot 45917 \ldots\ldots\ldots \alpha = 62^0\,40'$ $\quad x_1 = 180^0 - \alpha = 117^0\,20'$
   $x_2 = 180^0 + \alpha = 242^0\,40'$

3. $\log tg\, u = \quad 9 \cdot 40478 - 10 \ldots \alpha = 14^0\,15'$ $\quad u_1 = \qquad\quad \alpha = 14^0\,15'$
   $u_2 = 180^0 + \alpha = 194^0\,15'$

Übungsbeispiele.

Man bestimme x aus folgenden Gleichungen:

1. $\sin x = -0{\cdot}61107$ 2. $\cos x = -0{\cdot}99390$ 3. $\operatorname{tg} x = -0{\cdot}47341$

4. $\operatorname{cotg} x = -0{\cdot}55812$ 5. $\lg \sin x = 9{\cdot}55826-10$ 6. $\lg \operatorname{tg} x = 0{\cdot}72078-1$

7. $\sin x = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ 8. $\cos x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ 9. $\operatorname{tg} x = 1-\sqrt{5}$

10. $5 \sin x = 8 \cos x$ 11. $\sin x - \cos x = 0{\cdot}5$ 12. $5{\cdot}63 \cos x + 3{\cdot}75 \sin x = 0$

Resultate.

1. $x_1 = 217^\circ 40'$ $x_2 = 322^\circ 20'$	2. $x_1 = 173^\circ 40'$ $x_2 = 186^\circ 20'$	3. $x_1 = 154^\circ 40'$ $x_2 = 334^\circ 40'$
4. $x_1 = 119^\circ 10'$ $x_2 = 299^\circ 10'$	5. $x_1 = 21^\circ 12'$ $x_2 = 158^\circ 48'$	6. $x_1 = 27^\circ 44'$ $x_2 = 207^\circ 44'$
7. $x_1 = 43^\circ 4' 46''$ $x_2 = 136^\circ 55' 14''$	8. $x_1 = 111^\circ 28' 14''$ $x_2 = 248^\circ 31' 46''$	9. $x_1 = 128^\circ 58' 25''$ $x_2 = 308^\circ 58' 25''$
10. $x_1 = 57^\circ 59' 40''$ $x_2 = 237^\circ 59' 40''$	11. $x_1 = 65^\circ 42' 18''$ $x_2 = 204^\circ 17' 52''$	12. $x_1 = 123^\circ 40'$ $x_2 = 303^\circ 40'$

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 24. Fassen wir zunächst nur die Seiten und Winkel eines Dreieckes als Bestimmungsstücke desselben auf, so ergeben sich — entsprechend den vier Kongruenzsätzen — vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung.

Es kann nämlich das Dreieck bestimmt sein:

1. durch eine Seite und zwei Winkel,
2. durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel,
3. durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,
4. durch alle drei Seiten.

Für die Auflösung des Dreiecks genügen, streng genommen, in allen vier Fällen zwei Lehrsätze, welche unter den Namen Sinussatz und Cosinussatz bekannt sind und die wir in folgendem ableiten wollen.

* auch Projektionssatz oder Carnot'scher Lehrsatz genannt.