Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Das schiefwinklige Dreieck und seine Auflösung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Übungsbeispiele.

Man bestimme x aus folgenden Gleichungen:

1. $\sin x = -0{\cdot}61107$	2. $\cos x = -0{\cdot}99390$	3. $\operatorname{tg} x = -0{\cdot}47341$
4. $\operatorname{cotg} x = -0{\cdot}55812$	5. $\lg \sin x = 9{\cdot}55826 - 10$	6. $\lg \operatorname{tg} x = 0{\cdot}72078 - 1$
7. $\sin x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$	8. $\cos x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$	9. $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{5}$
10. $5 \sin x = 8 \cos x$	11. $\sin x - \cos x = 0{\cdot}5$	12. $5{\cdot}63 \cos x + 3{\cdot}75 \sin x = 0$

Resultate.

1. $x_1 = 217^\circ 40'$ $x_2 = 322^\circ 20'$	2. $x_1 = 173^\circ 40'$ $x_2 = 186^\circ 20'$	3. $x_1 = 154^\circ 40'$ $x_2 = 334^\circ 40'$
4. $x_1 = 119^\circ 10'$ $x_2 = 299^\circ 10'$	5. $x_1 = 21^\circ 12'$ $x_2 = 158^\circ 48'$	6. $x_1 = 27^\circ 44'$ $x_2 = 207^\circ 44'$
7. $x_1 = 43^\circ 4' 46''$ $x_2 = 136^\circ 55' 14''$	8. $x_1 = 111^\circ 28' 14''$ $x_2 = 248^\circ 31' 46''$	9. $x_1 = 128^\circ 58' 25''$ $x_2 = 308^\circ 58' 25''$
10. $x_1 = 57^\circ 59' 40''$ $x_2 = 237^\circ 59' 40''$	11. $x_1 = 65^\circ 42' 18''$ $x_2 = 204^\circ 17' 52''$	12. $x_1 = 123^\circ 40'$ $x_2 = 303^\circ 40'$

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 24. Fassen wir zunächst nur die Seiten und Winkel eines Dreieckes als Bestimmungsstücke desselben auf, so ergeben sich — entsprechend den vier Kongruenzsätzen — vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung.

Es kann nämlich das Dreieck bestimmt sein:

1. durch eine Seite und zwei Winkel,
2. durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel,
3. durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel,
4. durch alle drei Seiten.

Für die Auflösung des Dreiecks genügen, streng genommen, in allen vier Fällen zwei Lehrsätze, welche unter den Namen Sinussatz und Cosinussatz bekannt sind und die wir in folgendem ableiten wollen.

* auch Projektionssatz oder Carnot'scher Lehrsatz genannt.

§ 25. Sinus-Satz: In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

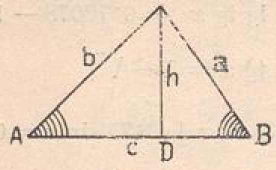


Fig. 64.

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

Ableitung: Fällt man in dem Dreiecke ABC die Höhe CD, so ergibt sich aus

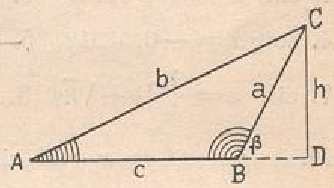


Fig. 65.

$\triangle ADC \ldots\ldots h = b \cdot \sin A$

$\triangle BDC \ldots\ldots h = a \cdot \sin B$*)

folglich: $a \sin B = b \sin A$

oder $a : b = \sin A : \sin B$

Ebenso würde folgen $b : c = \sin B : \sin C$

und $c : a = \sin C : \sin A$

oder, zusammengefaßt, $\mathbf{a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C}$ (A)

Dieser Satz, der Sinussatz oder die Sinusregel des schiefwinkligen Dreieckes genannt, genügt zur vollständigen Auflösung des Dreieckes in den beiden ersten Bestimmungsfällen.

Beispiele.

Es sind folgende Dreiecke aufzulösen:

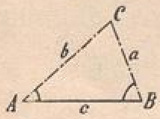


Fig. 66.

1. $c = 525{\cdot}5\ m$
$\sphericalangle A = 39^0\ 10'\ 30''$
$\sphericalangle B = 62^0\ 25'\ 10''$

$180^0 - (A + B) = \sphericalangle C = 78^0\ 24'\ 20''$

$a : c = \sin A : \sin C$

$b : c = \sin B : \sin C$

$a = \dfrac{c}{\sin C} \sin A = \mathbf{338{\cdot}87}\ m$

$b = \dfrac{c}{\sin C} \sin B = \mathbf{475{\cdot}48}\ m$

2. $a = 583{\cdot}5\ cm$
$b = 357{\cdot}8\ cm$
$\sphericalangle A = 71^0\ 15'$

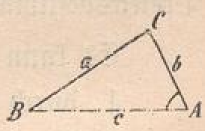


Fig. 67.

$\sin B : \sin A = b : a$

$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$

Daraus $\sphericalangle B = \mathbf{35^0\ 29'\ 50''}$

$\sphericalangle C = 73^0\ 15'\ 10''$

und $c : a = \sin C : \sin A$

$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} = \mathbf{590{\cdot}06}\ cm$

*) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist $h = a \sin \beta = a \sin (180 - B) = a \sin B$.

Anmerkung. Die im vorstehenden Beispiele 1 vorkommenden Gleichungen

$$a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A \qquad b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B$$

lassen sich auch unmittelbar nach folgender, leicht zu merkenden Regel aufstellen:

Eine unbekannte Seite wird gefunden, wenn man die bekannte Seite durch den sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividiert und mit dem sinus des der unbekannten Seite gegenüberliegenden Winkels multipliziert.

Beispiel.

Gegeben:

$a = 164\ m$

$\sphericalangle B = 32^0\ 40'$

$\sphericalangle C = 30^0\ 30'$

$\sphericalangle A = 116^0\ 50'$

Es ist

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B \qquad c = \frac{a}{\sin A} \sin C$$

Logarithmische Ausrechnung:

$$\begin{array}{rr} 2{\cdot}21484 & \\ -\,(9{\cdot}95052 - 10) & \\ \hline 2{\cdot}26432 & \ldots\ldots\ 2{\cdot}26432 \\ +\,9{\cdot}73219 - 10 & +\,9{\cdot}70547 - 10 \\ \hline \log b = 1{\cdot}99651 & \log c = 1{\cdot}96979 \\ \mathbf{b = 99{\cdot}2}\ m & \mathbf{c = 93{\cdot}28}\ m \end{array}$$

2,21484
+9.73219-10
11,94703-10
-9.9505 +10
Num 1,9965

Übungsbeispiele.

Man löse folgende Dreiecke auf:

1. $a = 356{\cdot}7\ m$, $\sphericalangle A = 81^0\ 10'$, $\sphericalangle B = 37^0\ 20'$
2. $b = 459{\cdot}8\ m$, $\sphericalangle A = 32^0\ 15'\ 17''$, $\sphericalangle B = 73^0\ 5'\ 38''$
3. $a = 538\ m$, $b = 716\ m$, $\sphericalangle B = 69^0\ 10'$
4. $a = 689{\cdot}56\ dm$, $c = 575{\cdot}85\ dm$, $\sphericalangle A = 78^0\ 5'\ 20''$

5. Wie groß sind die Spannungen in den Konstruktionsteilen ac und bc der in Fig. 68, 69 skizzierten Eisenkonstruktionen, wenn die vertikale Belastung Q und die Neigungswinkel α und β der beiden Streben folgende Werte haben:

a) $Q = 2375\ kg$, $\alpha = 81^0$, $\beta = 36^0$

b) $Q = 325\ kg$, $\alpha = 41^0$, $\beta = 28^0$

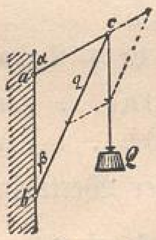


Fig. 68.

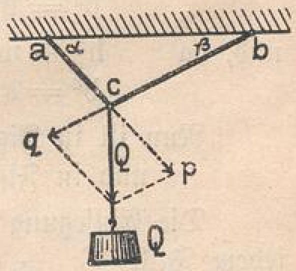


Fig. 69.

6. An einem Punkte O wirkt eine Kraft $P = 235{\cdot}7\ kg$; man bringe eine zweite Kraft Q an, so daß Q gegen P unter 63^0 geneigt ist und die Resultierende R beider Kräfte 350 kg werde. Wie groß ist Q?

Resultate.

1. $b = 218 \cdot 92$ *m*
   $c = 317 \cdot 24$ *m*
2. $a = 256 \cdot 47$ *m*
   $c = 463 \cdot 41$ *m*
3. $\sphericalangle A = 44^{0}\,36'\,32''$
   $c = 701 \cdot 07$ *m*
4. $\sphericalangle C = 54^{0}\,47'\,49''$
   $b = 516 \cdot 36$ *dm*
5. Nach Fig. 68.
   a) $p = 1974$ *kg*
   $q = 3317$ *kg*
   b) $p = 678 \cdot 27$ *kg*
   $q = 947 \cdot 82$ *kg*

   Nach Fig. 69.
   a) $p = 2156 \cdot 5$ *kg*
   $q = 416 \cdot 97$ *kg*
   b) $p = 307 \cdot 37$ *kg*
   $q = 262 \cdot 73$ *kg*
6. $Q = 172 \cdot 99$ *kg*

§ 26. Die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes in den beiden im § 24 unter 3) und 4) genannten Bestimmungsfällen kann durch folgenden Satz bewerkstelligt werden:

Cosinussatz. Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten ~~und~~ mal dem Cosinus ihres eingeschlossenen Winkels.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B.$$

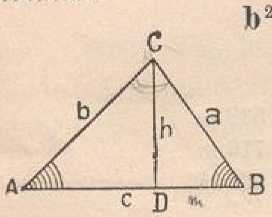


Fig. 70 a.

Beweis: Macht man im $\triangle ABC$ (Fig. 70) $CD \perp AB$ und bezeichnet man BD mit m, CD mit h,

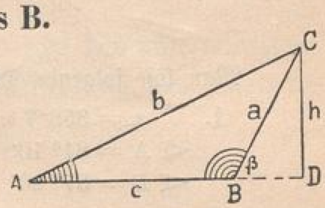


Fig. 70 b.

so ist $\quad b^2 = h^2 + (c \mp m)^2$ *)

$$b^2 = h^2 + m^2 + c^2 \mp 2\,c\,m$$

und, da $\quad h^2 + m^2 = a^2 \quad$ ist,

$$b^2 = a^2 + c^2 \mp 2\,c\,m.$$

Nun ist in Fig. 70 a . . . $m = a \cos B$

und in Fig. 70 b . . . $m = a \cos \beta = -a \cos B.$

Die Einsetzung dieser Werte in die Gleichung für b^2 ergibt in jedem Falle

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos B$$

Ebenso ist . . $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C \qquad$ (B)

und . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$

*) Das doppelte Vorzeichen bezieht sich auf die beiden Figuren.

Dieser Satz genügt, um aus zwei Seiten und deren eingeschlossenem Winkel die dritte Seite zu berechnen.

Beispiel.

Folgendes Dreieck ist aufzulösen:

$b = 45\ cm$

$c = 70\ cm$

$\sphericalangle A = 50^0$

$$a = \sqrt{45^2 + 70^2 - 2 \times 45 \times 70 \times \cos 50^0}$$

$$a = \sqrt{2025 + 4900 - 4049{\cdot}577}$$

$$a = \sqrt{2875{\cdot}423} = \mathbf{53{\cdot}62}\ cm$$

Der noch fehlende Winkel B ergibt sich nun nach dem Sinussatze:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A \;.\;.\;.\;.\; \sphericalangle B = \mathbf{40^0\ \ 0'\ 24''}$$

$$\text{und} \quad 180^0 - (A + B) = \sphericalangle C = \mathbf{89^0\ 59'\ 36''}$$

Übungsbeispiele.

Aus folgenden Stücken eines Dreieckes die unbekannte Seite zu berechnen:

1. $a = 73\ m$	2. $b = 485\ m$	3. $a = 95\ m$
$b = 115\ m$	$c = 698\ m$	$c = 65\ m$
$\sphericalangle C = 46^0\ 20'$	$\sphericalangle A = 118^0\ 20'$	$\sphericalangle B = 100^0$

Resultate.

1. $c = 83{\cdot}43\ m$ 2. $a = 1021{\cdot}65\ m$ 3. $b = 124{\cdot}07\ m$

Berechnung der Winkel aus den drei Seiten.

§ 27. Löst man die Gleichungen B der Reihe nach bezüglich der darin vorkommenden Winkel auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

D. h. der Cosinus eines Dreieckswinkels ist gleich der Summe der Quadrate der beiden den Winkel einschließenden Seiten, vermindert um das Quadrat der ihm gegenüberliegenden Seite, das Ganze dividiert durch das doppelte Produkt der einschließenden Seiten.

In dieser Form dient der Satz dazu, aus den drei Seiten die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Beispiel.

a = 6 m
b = 5 m
c = 7 m

$$\cos A = \frac{25 + 49 - 36}{70} = 0 \cdot 54286 \ldots \sphericalangle A = \mathbf{57^\circ\ 7'\ 18''}$$

$$\cos B = \frac{36 + 49 - 25}{84} = 0 \cdot 71428 \ldots \sphericalangle B = \mathbf{44^\circ\ 24'\ 55''}$$

$$\cos C = \frac{36 + 25 - 49}{60} = 0 \cdot 20000 \ldots \sphericalangle C = \mathbf{78^\circ\ 27'\ 47''}$$

Übungsbeispiele.

Man löse folgende Dreicke auf:

1. a = 9 m	2. a = 20 cm	3. a = 51 m
b = 7 m	b = 30 cm	b = 58 m
c = 5 m	c = 40 cm	c = 41 m

4. Unter welchem Winkel ω müssen zwei Kräfte P = 5 kg und Q = 8 kg zusammenwirken, damit ihre Resultierende R = 10 kg betrage?

Resultate.

1. $\sphericalangle$ **A** = 95° 44′ 21″	2. $\sphericalangle$ **A** = 28° 57′ 18″	3. $\sphericalangle$ **A** = 59° 4′ 40″
$\sphericalangle$ **B** = 50° 42′ 12″	$\sphericalangle$ **B** = 46° 34′ 5″	$\sphericalangle$ **B** = 77° 19′ 10″
$\sphericalangle$ **C** = 33° 33′ 27″	$\sphericalangle$ **C** = 104° 28′ 38″	$\sphericalangle$ **C** = 43° 36′ 10″

4. ω = 82° 5′ 49″

§ 28. Aus den vorstehenden Beispielen ist ersichtlich, daß der Sinussatz (A) und der Cosinussatz (B und C) in allen vier Bestimmungsfällen zur Auflösung des Dreieckes genügen.

Jedoch zeigt sich bei der Anwendung des Cosinussatzes in seinen beiden Formen (B und C) der Übelstand, daß die zu berechnenden Ausdrücke nicht logarithmisch brauchbar sind und deshalb bei mehrziffrigen Angaben zu weitläufigen Nebenrechnungen führen.

Der Cosinussatz wird daher nur dann mit Vorteil anzuwenden sein, wenn die bekannten Stücke durch einfache Zahlen gegeben sind.

Um auch bei komplizierteren Angaben durch rasch ausführbare Rechnungen zur Auflösung des Dreieckes zu gelangen, wollen wir noch zwei weitere Sätze ableiten.

Tangentialsatz. **Die Differenz zweier Dreiecksseiten verhält sich zur Summe derselben Seiten, wie der tangens der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel zum tangens der halben Summe derselben Winkel.**

Z. B. $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$

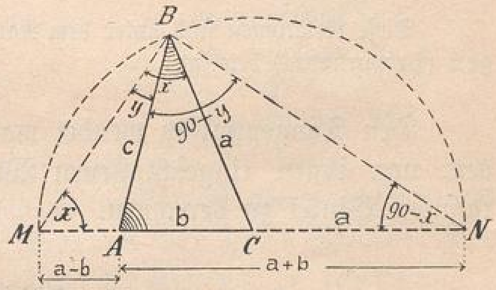


Fig. 71.

Ableitung. Macht man in Fig. 71

$CM = CN = CB = a,$

so ist $AM = a - b$

und $AN = a + b,$

ferner: $\sphericalangle x + \sphericalangle y = \sphericalangle A$ . . . . . (Außenwinkel) *)

$\sphericalangle x - \sphericalangle y = \sphericalangle B$ . . . . . $(\sphericalangle MBC = \sphericalangle x)$

daher: $\sphericalangle x = \frac{A + B}{2}$ und $\sphericalangle y = \frac{A - B}{2}$.

Ferner ist $\sphericalangle MBN = 90^\circ$, folglich

$\sphericalangle ANB = 90^\circ - x$ und $\sphericalangle ABN = 90^\circ - y$.

Nach dem Sinussatze folgt nun aus dem Dreiecke ABN

$(a + b) : c = \sin (90^\circ - y) : \sin (90^\circ - x)$

oder $(a + b) : c = \cos y : \cos x$ . . . . (I)

Aus dem Dreiecke AMB ergibt sich:

$(a - b) : c = \sin y : \sin x$ . . . . (II)

Aus diesen beiden Proportionen folgt durch gliedweise Division (II : I)

$$\frac{a - b}{a + b} : 1 = \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} x$$

oder $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$, (D)

welche Proportion mit ihren zyklischen Umsetzungen den Inhalt des Tangentialsatzes bildet.

*) $\sphericalangle CMB = \sphericalangle CBM = x$ $\sphericalangle ABM = y$.

Setzt man in den Proportionen (I) und (II) die für x und y gefundenen Werte ein, so erhält man die Proportionen:

$$(a + b) : c = \cos \frac{A - B}{2} : \cos \frac{A + B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (M_1)$$

$$(a - b) : c = \sin \frac{A - B}{2} : \sin \frac{A + B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M_2)$$

Diese Relationen sind unter dem Namen der Mollweideschen Gleichungen (Proportionen) bekannt.

Den Tangentialsatz wendet man an, um aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zunächst die beiden unbekannten Winkel zu berechnen.

Beispiel.

$$a = 352{\cdot}5\,m$$
$$b = 577{\cdot}5\,m$$
$$\sphericalangle C = 85^0\ 30'\ 30''$$

Man erhält:

$$(b - a) : (b + a) = \operatorname{tg} \frac{B - A}{2} : \operatorname{tg} \frac{B + A}{2} \quad *)$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - A}{2} = \frac{b - a}{b + a} \cdot \operatorname{tg} \frac{B + A}{2} \qquad \frac{180^0 - C}{2} = \frac{B + A}{2} = 47^0\ 14'\ 45''$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - A}{2} = \frac{225}{930} \operatorname{tg} 47^0\ 14'\ 45'' \qquad \text{daraus:} \quad \frac{B - A}{2} = 14^0\ 39'\ 53''$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Addition und Subtraktion: $\sphericalangle B = 61^0\ 54'\ 38''$, $\sphericalangle A = 32^0\ 34'\ 52''$

Die Seite c berechnet man nun nach dem Sinussatze:

$$c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \mathbf{652{\cdot}59}\ m.$$

Übungsbeispiele.

Mit Hilfe des Tangentialsatzes folgende Dreiecke aufzulösen:

1. $a = 371\ m$	**2.** $b = 21{\cdot}5\ m$	3. $a = 3{\cdot}71\ m$
$b = 220\ m$	$c = 37{\cdot}6\ m$	$c = 2{\cdot}2\ m$
$\sphericalangle C = 125^0\ 30'$	$\sphericalangle A = 125^0\ 30'$	$\sphericalangle B = 54^0\ 30'$

*) Bei Ansetzung der Proportion setze man stets die größere Seite vor die kleinere, um das Auftreten negativer Größen zu vermeiden. Siehe § 40.

4. Zwei Kräfte $P = 112\ kg$ und $Q = 74\ kg$ wirken unter einem Winkel $w = 61^0$ auf einen Punkt. Wie groß ist ihre Resultierende R und welche Winkel schließt sie mit den Kraftrichtungen ein?

Resultate.

1. $\sphericalangle A = 34^0\ 44'\ 48''$
   $\sphericalangle B = 19^0\ 45'\ 12''$
   $c = 529{\cdot}94\ m$
2. $\sphericalangle B = 19^0\ 15'\ 47''$
   $\sphericalangle C = 35^0\ 14'\ 13''$
   $a = 53{\cdot}055\ m$
3. $\sphericalangle A = 89^0\ 8'\ 6''$
   $\sphericalangle C = 36^0\ 21'\ 54''$
   $b = 3{\cdot}0207\ m$
4. $R = 161{\cdot}42\ kg$
   $\sphericalangle \alpha = 37^0\ 21'\ 44''$
   $\sphericalangle \beta = 23^0\ 38'\ 16''$

§ 29. Wir wollen jetzt noch einen Satz ableiten, welcher uns in Stand setzt, aus den drei Seiten die drei Winkel des Dreieckes durch logarithmische Rechnung zu finden.

Wir verzeichnen zu diesem Zwecke in dem Dreiecke ABC die Winkelhalbierungslinien, den eingeschriebenen Kreis O und die Berührungsradien ϱ, wodurch jede Dreiecksseite in je zwei Stücke (m, n, p) geteilt wird.

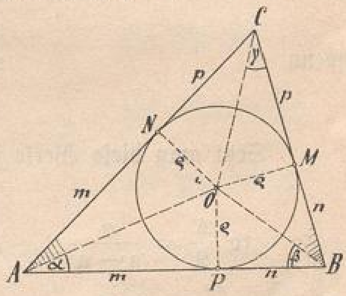


Fig. 72.

Es ist dann unmittelbar aus der Figur zu entnehmen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\varrho}{m} \qquad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\varrho}{n} \qquad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\varrho}{p}$$

Nun ist aber $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}$ *)

---

*) Es ist $\triangle BCO + \triangle ACO + \triangle ABO = \triangle ABC$

oder $$a \cdot \frac{\varrho}{2} + b \cdot \frac{\varrho}{2} + c \cdot \frac{\varrho}{2} = F$$

$$\varrho \cdot \frac{a+b+c}{2} = F$$

und wenn wir den halben Umfang $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzen, mit Benützung der Heron'schen Formel $\varrho\, s = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

und zur Berechnung von m, n und p ergibt sich unmittelbar aus der Figur

$$m + n = c$$
$$n + p = a$$
$$p + m = b,$$

woraus, wenn man je in einer Gleichung die Zeichen ändert und dann alle drei addiert, folgt:

$$p = \frac{a + b - c}{2} = s - c$$

$$n = \frac{a - b + c}{2} = s - b$$

$$m = \frac{b + c - a}{2} = s - a,$$

wenn $s = \frac{a + b + c}{2}$ den halben Umfang bedeutet.

Setzt man diese Werte in obige Gleichungen ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\varrho}{s - a} \qquad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\varrho}{s - b} \qquad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\varrho}{s - c}$$

oder: $$\mathbf{tg} \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s - a}} \sqrt{\frac{\mathbf{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}}{\mathbf{s}}}$$

ebenso: $$\mathbf{tg} \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s - b}} \sqrt{\frac{\mathbf{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}}{\mathbf{s}}}$$

$$\mathbf{tg} \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s - c}} \sqrt{\frac{\mathbf{(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}}{\mathbf{s}}}$$

Diese Formeln sind für die logarithmische Rechnung sehr bequem, da sie nur die Aufsuchung von vier Logarithmen erfordern. Außerdem haben sie den Vorteil, wegen der großen Sekundendifferenzen, welche der tangens im ganzen Quadranten besitzt, recht genaue Resultate zu liefern.

Beispiel.

$$\begin{aligned} a &= 58{\cdot}73\ m \\ b &= 64{\cdot}58\ m \\ c &= 70{\cdot}35\ m \\ \hline s &= \frac{193{\cdot}66}{2} \\ s &= 96{\cdot}83 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} ^{*)}\ s - a = 38{\cdot}10 & \log(s-a) = 1{\cdot}58092 \\ s - b = 32{\cdot}25 & \log(s-b) = 1{\cdot}50853 \\ s - c = 26{\cdot}48 & \log(s-c) = 1{\cdot}42292 \\ & \overline{\qquad\qquad 4{\cdot}51237} \\ & \log s = 1{\cdot}98601 \\ & \qquad - \ - \\ & \overline{\qquad\qquad 2{\cdot}52636 : 2} \\ & \log \varrho = 1{\cdot}26318 \end{array}$$

$$\log \varrho - \log(s-a) = \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9{\cdot}68226 - 10 \ldots \frac{A}{2} = \mathbf{25^0\ 41'\ 36{\cdot}4''}$$

$$\log \varrho - \log(s-b) = \log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 9{\cdot}75465 - 10 \ldots \frac{B}{2} = \mathbf{29^0\ 36'\ 50''}$$

$$\log \varrho - \log(s-c) = \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 9{\cdot}84026 - 10 \ldots \frac{C}{2} = \mathbf{34^0\ 41'\ 33{\cdot}3''}$$

Probe: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \mathbf{89^0\ 59'\ 59{\cdot}7''}$

Die Summe der halben Winkel weicht also nur um $0{\cdot}3''$ von dem richtigen Werte (90^0) ab. Dieser kleine Fehler ist aus der Ungenauigkeit der Tafelwerte und der Korrekturen zu erklären.

Wir berechnen nunmehr die ganzen Winkel und erhalten

$$\sphericalangle A = \mathbf{51^0\ 23'\ 13''} \quad \sphericalangle B = \mathbf{59^0\ 13'\ 40''} \quad \sphericalangle C = \mathbf{69^0\ 23'\ 7''}.$$

Übungsbeispiele.

Man löse die Aufgaben in § 27 mittels obiger Formeln auf.

Wiederholungsbeispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 777{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle A = 48^0\ 35'$, $\sphericalangle B = 63^0\ 28'$

2. $a = 253{\cdot}7\ m$, $b = 187{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle A = 105^0$

---

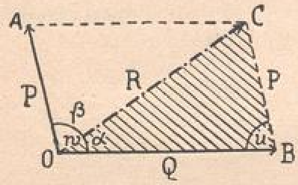
*) Die Summe der drei Werte $(s - a)$, $(s - b)$ und $(s - c)$ muß gleich s sein. (Warum?)
Es kann demnach schon hier eine Probe vorgenommen werden.

3. $a = 75{\cdot}25\ m$
$b = 51{\cdot}75\ m$
$\sphericalangle C = 71^\circ 15' 45''$

4. $b = 59{\cdot}25\ m$
$c = 87{\cdot}56\ m$
$\sphericalangle A = 53^\circ 25'$

5. $a = 85{\cdot}25\ cm$
$b = 53{\cdot}15\ cm$
$c = 71{\cdot}6\ cm$

6. $a = 7\ m$
$b = 9\ m$
$c = 6\ m$



7. Wie groß ist die Resultierende zweier, unter einem Winkel w zusammenwirkender Kräfte P und Q, wenn

a) $P = 125\ kg$, $Q = 75\ kg$, $w = 70^\circ$ *b)* $P = 51\ kg$, $Q = 40\ kg$, $w = 60^\circ$ *c)* $P = 153\ kg$, $Q = 65\ kg$, $w = 120^\circ$ ist?

8. Unter welchem Winkel w müssen zwei Kräfte P und Q zusammenwirken damit ihre Resultierende = R werde, wenn

a) $P = 65\ kg$, $Q = 34\ kg$, $R = 93\ kg$ *b)* $P = 63\ kg$, $Q = 15\ kg$, $R = 57\ kg$ *c)* $P = 375\ kg$, $Q = 218\ kg$, $R = 425\ kg$ ist?

Resultate.

1. $a = 629{\cdot}07 m$	$b = 750{\cdot}52\ m$	$\sphericalangle C = 67^\circ 57'$
2. $\sphericalangle B = 45^\circ 33' 04{\cdot}5''$	$\sphericalangle C = 29^\circ 26' 55{\cdot}5''$	$c = 129{\cdot}13\ m$
3. $\sphericalangle A = 68^\circ 50' 40{\cdot}5''$	$\sphericalangle B = 39^\circ 53' 34{\cdot}5''$	$c = 76{\cdot}412\ m$
4. $\sphericalangle C = 84^\circ 15' 43''$	$\sphericalangle B = 42^\circ 19' 17''$	$a = 70{\cdot}664\ m$
5. $\sphericalangle A = 84^\circ 50' 41''$	$\sphericalangle B = 38^\circ 23' 5''$	$\sphericalangle C = 56^\circ 46' 16''$
6. $\sphericalangle A = 50^\circ 58' 38''$	$\sphericalangle B = 87^\circ 16' 16''$	$\sphericalangle C = 41^\circ 45' 8''$
7. *a)* $R = 166{\cdot}32\ kg$	*b)* $R = 79\ kg$	*c)* $R = 133\ kg$
8. *a)* $\omega = 42^\circ 19' 21''$	*b)* $\omega = 120^\circ$	*c)* $\omega = 92^\circ 38' 18''$

§ 30. Kennt man von einem Dreiecke zwei Seiten und den der **kleineren** Seite gegenüberliegenden Winkel, so können bei der Auflösung drei verschiedene Fälle eintreten.

Sind z. B. von dem Dreiecke ABC (Fig. 73), in welchem $b < c$ ist, die Seiten b und c, sowie der $\sphericalangle B$ gegeben, so erhält man

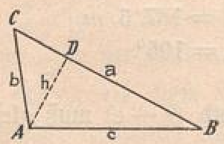


Fig. 73.

$$\sin B : \sin C = b : c$$

$$\sin C = \frac{c . \sin B}{b}$$

1. Fall. $b > c \sin B$. Dann ist $\sin C < 1$ und man erhält zwei Auflösungen C_1 und $C_2 = 180 - C_1$, deren keine den gemachten Voraussetzungen (Angaben) widerspricht. In diesem Falle gibt es zwei Dreiecke, welche den Angaben entsprechen.

2. Fall. $b = c \sin B$. Dann ist $\sin C = +1$, und man erhält bloß eine Auflösung. ($\sphericalangle C = 90^0$.)

3. Fall. $b < c \sin B$. Dann ist $\sin C > 1$, was unmöglich ist; d. h. es gibt kein Dreieck von den gegebenen Stücken.

Berücksichtigt man, daß im $\triangle ABD \ldots c \sin B = h$ ist, so lassen sich die drei Fälle auch so anschreiben:

1. $b > h$ 2. $b = h$ 3. $b < h$

und es läßt sich leicht auch durch Konstruktion des verlangten Dreieckes die Bedeutung der obigen drei Fälle klarlegen.

Beispiel.

$a = 355{\cdot}5\ m \qquad b = 498{\cdot}5\ m \qquad \sphericalangle A = 34^0\ 10'$

Aus $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$ folgt:

$\sphericalangle B_1 = 51^0\ 57'\ 13'' \qquad \sphericalangle B_2 = 128^0\ 2'\ 47''$

$\sphericalangle C_1 = 93^0\ 52'\ 47'' \qquad \sphericalangle C_2 = 17^0\ 47'\ 13''$

und $c = \dfrac{a}{\sin A} \sin C$

$c_1 = 631{\cdot}56\ m \qquad c_2 = 193{\cdot}37\ m$

Übungsbeispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 57{\cdot}4\ m$	2. $a = 572\ m$	3. $a = 53{\cdot}5\ m$	4. $a = 98{\cdot}25\ cm$
$b = 41{\cdot}1\ m$	$c = 293\ m$	$b = 26{\cdot}75\ m$	$b = 47{\cdot}75\ cm$
$\sphericalangle B = 41^0$	$\sphericalangle C = 29^0\ 29'\ 14''$	$\sphericalangle B = 30^0$	$\sphericalangle B = 40^0\ 30'$

Resultate.

1. $A_1 = 66^0\ 23'$	$A_2 = 113^0\ 37'$	2. $A_1 = 73^0\ 56'$	$A_2 = 106^0\ 4'$
$C_1 = 72^0\ 37'$	$C_2 = 25^0\ 23'$	$B_1 = 76^0\ 34'\ 46''$	$B_2 = 44^0\ 26'\ 46''$
$c_1 = 59{\cdot}786\ m$	$c_2 = 26{\cdot}855\ m$	$b_1 = 578{\cdot}99\ m$	$b_2 = 416{\cdot}82\ m$

3. $A = 90^0 \qquad c = 46{\cdot}332\ m$ 4. **Das Dreieck ist unmöglich.**