Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Formeln für die Dreiecksfläche.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Flächenformeln.

§ 31. Bevor wir die trigonometrische Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes abschließen, wollen wir noch zwei Formeln aufstellen, welche uns gestatten, die Fläche des Dreieckes

1. aus zwei Seiten und ihrem eingeschlossenen Winkel oder

2. aus einer Seite und den drei Winkeln

unmittelbar zu berechnen.

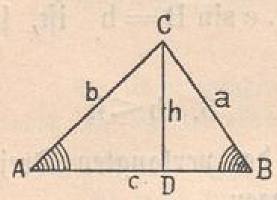


Fig. 74.

Bezeichnet man die Fläche des Dreieckes ABC (Fig. 74) mit F, die Höhe CD mit h, so ist

$$F = \frac{ch}{2}$$

Da nun ($\triangle ADC$)....$h = b \sin A$, so ergibt sich

$$F = \frac{bc \sin A}{2} \qquad \text{(I)}$$

Setzt man nach dem Sinussatze: $b = c\,\frac{\sin B}{\sin C}$ in die vorstehende Formel ein, so erhält man

$$F = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} \qquad \text{(II)}$$

D. h. I. Die Fläche eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten, mal dem Sinus ihres eingeschlossenen Winkels, und:

II. Die Fläche eines Dreieckes ist gleich dem Quadrate einer Seite, multipliziert mit dem Sinus der beiden ihr anliegenden Winkel, dividiert durch den doppelten Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Übungsbeispiele.

Man berechne die Flächen folgender Dreiecke:

1. $a = 5{\cdot}83\ m$ $b = 3{\cdot}95\ m$ $\sphericalangle C = 61^\circ 30'$	2. $a = 59{\cdot}62\ cm$ $c = 75{\cdot}83\ cm$ $\sphericalangle B = 105^\circ 20' 6''$	3. $b = 405{\cdot}3\ m$ $c = 295{\cdot}8\ m$ $\sphericalangle A = 98^\circ 4' 30''$
4. $a = 38{\cdot}8\ m$ $\sphericalangle B = 75^\circ 45'$ $\sphericalangle C = 29^\circ 4' 8''$	5. $b = 95{\cdot}6\ cm$ $\sphericalangle B = 68^\circ 39' 18''$ $\sphericalangle A = 80^\circ\ 3' 38''$	6. $c = 4{\cdot}36\ m$ $\sphericalangle A = 77^\circ 58' 55''$ $\sphericalangle B = 44^\circ 45' 37''$

Ein Dreieck aufzulösen, von welchem gegeben sind:

7. $F = 34938{\cdot}54\ cm^2$, $a = 284{\cdot}4\ cm$, $b = 274{\cdot}5\ cm$

8. $F = 1549{\cdot}26\ dm^2$, $c = 66{\cdot}3\ dm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 2'\ 21''$

9. $F = 4650\ m^2$, $\sphericalangle A = 137^0\ 40'\ 39''$, $\sphericalangle B = 14^0\ 15'$

Resultate.

1. $10{\cdot}119\ m^2$
2. $2180\ cm^2$
3. $59350\ m^2$
4. $366{\cdot}67\ m^2$
5. $2509{\cdot}5\ cm^2$
6. $7{\cdot}7827\ m^2$
7. $c = 294{\cdot}3\ cm$, $\sphericalangle A = 59^0\ 52'\ 46''$, $\sphericalangle B = 56^0\ 36'\ 5''$
8. $a = 60{\cdot}4\ dm$, $b = 54{\cdot}5\ dm$, $\sphericalangle B = 50^0\ 41'\ 33''$
9. $a = 232{\cdot}5\ m$, $b = 85\ m$, $c = 162{\cdot}5\ m$

Vermischte Beispiele.

1. Man bestimme die Entfernungen AC und BC (Fig. 75) des unzugänglichen Punktes C von den Endpunkten A und B der gemessenen Standlinie m aus folgenden Angaben:

a) $m = 846{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle B = 122^0\ 13'\ 20''$, $\sphericalangle A = 17^0\ 33'\ 44$

b) $m = 459{\cdot}8\ m$, $\sphericalangle A = 32^0\ 15'\ 17''$, $\sphericalangle B = 73^0\ 5'\ 38''$

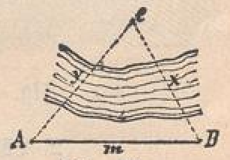


Fig. 75.

2. Man berechne die gegenseitige Entfernung der durch ein Gebäude gedeckten Punkte A und B (Fig. 76) aus folgenden Angaben:

a) $a = 429{\cdot}5\ m$, $b = 587{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle P = 73^0\ 15'\ 18''$

b) $a = 235{\cdot}7\ m$, $b = 173\ m$, $\sphericalangle P = 153^0$

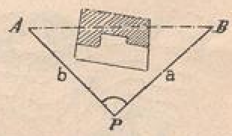


Fig. 76.

3. Wie groß sind die Winkel α, β, γ, welche die Schnuren in Fig. 77 bei hergestelltem Gleichgewichte einschließen werden, wenn:

a) $P = 21\ kg$, $Q = 24\ kg$, $R = 39\ kg$

b) $P = 8{\cdot}86\ kg$, $Q = 5{\cdot}78\ kg$, $R = 10{\cdot}24\ kg$ ist?

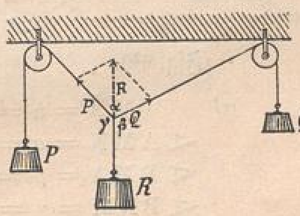


Fig. 77.

4. Wie groß müssen im vorstehenden Falle die Verhältnisse P : Q : R gewählt werden, damit: $\sphericalangle \alpha = 82^0\ 5'\ 48''$
$\sphericalangle \beta = 127^0\ 35'\ 24''$
$\sphericalangle \gamma = 150^0\ 18'\ 48''$ werde?

(Anleitung: Man setze $R = 1$.)

5. An einem Wandkrane (Fig. 78) wirkt bei c die vertikale Belastung Q. Wie groß sind die in den Konstruktionsteilen a c und b c entstehenden Zug- und Druckspannungen (p und q) wenn:

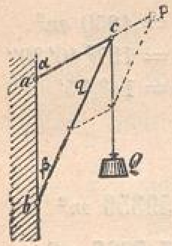


Fig. 78.

a) $Q = 377{\cdot}5\ kg$ *b)* $Q = 825\ kg$

$\sphericalangle\, \alpha = 65^0$ $\sphericalangle\, \alpha = 48^0$

$\sphericalangle\, \beta = 35^0$ $\sphericalangle\, \beta = 33^0$ ist?

6. Die Spitze S des Schafberges (Fig. 79) erscheint von zwei mit S in derselben Vertikalebene gelegenen Uferpunkten A (Unterach) und B (Steinbach) des Attersees unter den Höhenwinkeln $\alpha = 15^0\, 38'\, 18''$ und $\beta = 7^0\, 25'\, 18''$. Wie hoch liegt S über dem Spiegel des Attersees, wenn die Entfernung $AB = 5380\ m$ und die Instrumentenhöhe $i = 1{\cdot}55\ m$ ist?

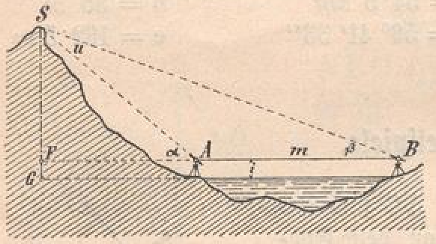


Fig. 79.

Anleitung:

1. Lösung. $FB - FA = m$

$$SF(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha) = m$$

und $$SF = \frac{m}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

2. Lösung. $$FS = AS \sin\alpha = \frac{m}{\sin u} \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

wobei $\sphericalangle\, u = \alpha - \beta$ ist.

7. Zwei Kräfte P und $Q = P + 50\ kg$ wirken unter dem Winkel $w = 60^0$ zusammen und ergeben die Resultierende $R = 2P$. Wie groß sind die Kräfte?

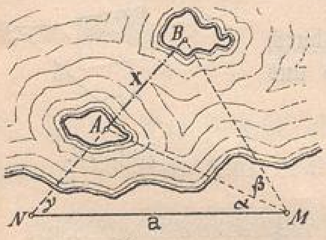


Fig. 80.

8. Um die gegenseitige Entfernung x zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 80) zu ermitteln, hat man den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt N und einen zweiten Punkt M festgelegt und sodann gemessen:

a) $MN = a = 225{\cdot}8\ m$ *b)* $a = 1356\ m$

$\sphericalangle\, AMN = \alpha = 37^0\, 10'\, 20''$ $\sphericalangle\, \alpha = 29^0\, 25'\, 30''$

$\sphericalangle\, BMA = \beta = 31^0\, 20'\, 30''$ $\sphericalangle\, \beta = 34^0\, 40'\, 20''$

$\sphericalangle\, BNM = \gamma = 65^0\, 33'\, 15''$ $\sphericalangle\, \gamma = 80^0\, 29'\, 45''$

Wie groß ist die Entfernung x?

Anleitung: $\varDelta\, NAM \ldots AM = \dfrac{a}{\sin NAM} \cdot \sin\gamma \ldots \sphericalangle\, NAM = 180^0 - (\alpha + \gamma)$

und $\varDelta\, ABM \ldots x = \dfrac{AM}{\sin NBM} \cdot \sin\beta \ldots \sphericalangle\, NBM = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$

folglich: $$x = \frac{a \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin NAM \,.\, \sin NBM}$$

9. Zur Bestimmung der gegenseitigen Entfernungen x, y und z der drei unzugänglichen Punkte A, B und C (Fig. 81) wurden zwei Punkte M und N festgelegt, welche in den Verlängerungen der Strecken AC und BC liegen und sodann durch direkte Messung gefunden:

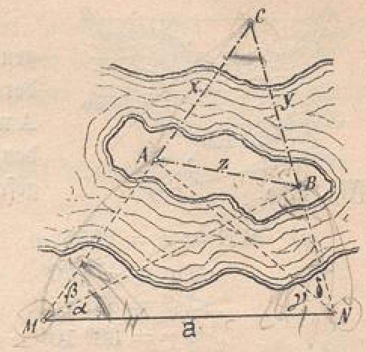


Fig. 81.

a) $MN = 556{\cdot}5\ m$	*b)* $a = 1788\ m$
$\alpha = 31^0\ 25'\ 20''$	$\alpha = 31^0\ 25'\ 13''$
$\beta = 40^0\ 11'\ 30''$	$\beta = 37^0\ 16'\ 20''$
$\gamma = 27^0\ \ 9'\ 50''$	$\gamma = 23^0\ 34'\ 30''$
$\delta = 48^0\ 10'\ 10''$	$\delta = 34^0\ 17'\ 10''$

Anleitung: Die Strecken x und y bestimme man so wie das x in der vorhergehenden Aufgabe und berechne sodann aus dem Dreiecke ABC die Strecke z.

10. Zwei in derselben Horizontalebene gelegene Orte A und B (Fig. 82) sollen durch eine geradlinige Bahnstrecke verbunden werden. Zwischen A und B befindet sich ein Berg, so daß die Gerade AB nicht direkt abgesteckt werden kann. Deshalb wurde ein Hilfspunkt P so gewählt, daß folgende Stücke direkt gemessen werden konnten:

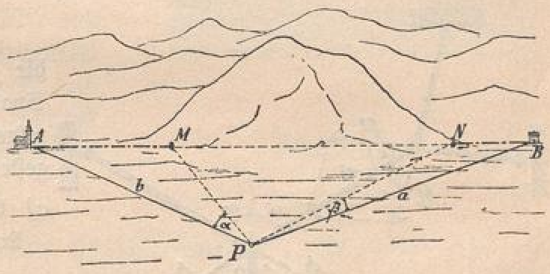
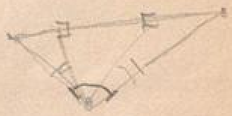


Fig. 82.



$$PA = b = 2875\ m$$
$$PB = a = 3205\ m$$
$$\sphericalangle APB = 98^0\ 15'\ 30''$$

Man berechne daraus, um die Trassierung von A und B aus vornehmen zu können, die Winkel A und B, ferner die Entfernung AB.

Nach durchgeführter Absteckung wurden der Anfangs- und Endpunkt M und N des durch den Berg zu führenden Einschnittes (oder Tunnels) markiert und von P aus anvisiert, wobei sich folgende Winkel ergaben:

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle \alpha = 25^0\ 2'\ 30'', \quad \sphericalangle BPN = \sphericalangle \beta = 26^0\ 2'\ 35''.$$

Wie lang wird der Einschnitt (der Tunnel)?

Man löse dieselbe Aufgabe für folgende Angaben:

a) $a = 3567\ m$	*b)* $a = 1088\ m$
$b = 2275\ m$	$b = 975\ m$
$\sphericalangle APB = 104^0\ 10'\ 20''$	$\sphericalangle APB = 97^0\ 35'\ 30''$
$\sphericalangle \alpha = 23^0\ 4'\ 25''$	$\sphericalangle \alpha = 21^0\ 15'\ 20''$
$\sphericalangle \beta = 31^0\ 25'\ 45''$	$\sphericalangle \beta = 25^0\ 0'\ 10''$

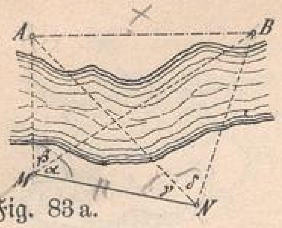


Fig. 83 a.

11. Man ermittle die gegenseitige Entfernung AB = x der unzugänglichen Punkte A und B (Fig. 83) aus folgenden, durch direkte Messung gefundenen Angaben:

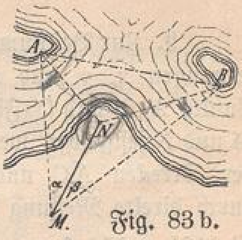


Fig. 83 b.

a) $MN = a = 2555\ m$	*b)* $MN = a = 2815\ m$
$\sphericalangle\, \alpha = 47^0\ 20'$	$\sphericalangle\, \alpha = 32^0\ 16'\ 20''$
$\sphericalangle\, \beta = 55^0\ 15'$	$\sphericalangle\, \beta = 38^0\ 25'\ 10''$
$\sphericalangle\, \gamma = 38^0\ 10'$	$\sphericalangle\, ANM = \sphericalangle\, \gamma = 115^0\ 29'\ 30''$
$\sphericalangle\, \delta = 61^0\ 25'$	$\sphericalangle\, BNM = \sphericalangle\, \delta = 109^0\ 47'\ 40''$
(Nach Fig. 83 a.)	(Nach Fig. 83 b.)

Anleitung: Man berechne aus den Dreiecken MNB und MNA die Seiten MA und MB und sodann aus dem Dreiecke ABM die Seite AB = x.

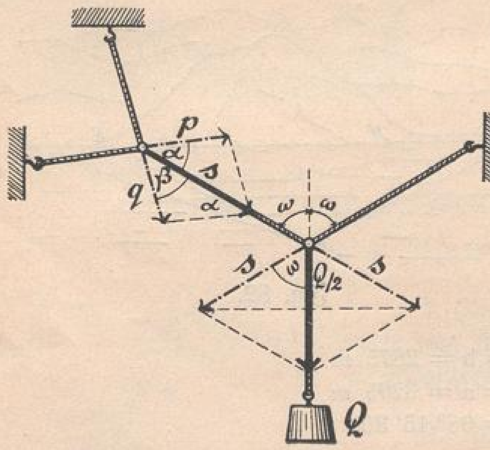


Fig. 84.

12. Wie groß sind die durch die Belastung Q hervorgerufenen Spannungen s, p und q in den einzelnen Teilen der in Fig. 84 dargestellten Seilverbindung, wenn:

a) $Q = 44{\cdot}5\ kg$	*b)* $Q = 340\ kg$
$2\omega = 115^0$	$2\omega = 125^0$
$\alpha = 38^0$	$\alpha = 35^0$
$\beta = 32^0$	$\beta = 28^0$ ist?

13. An einem in Fig. 85 skizzierten Drehkrane, dessen Gestalt durch die Winkel α, β, γ bestimmt ist, hängt eine Last Q. Man berechne die in den Streben herrschenden Spannungen s, u, p, ferner die horizontalen und vertikalen Komponenten H, h, $\mathfrak{H}$, V und v.

$\sphericalangle\, \alpha = 38^0$
$\sphericalangle\, \beta = 38^0$
$\sphericalangle\, \gamma = 29^0$
$Q = 6750\ kg$

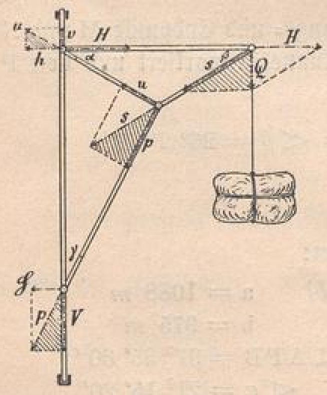


Fig. 85.

Anleitung: Man zerlege die Kraft Q nach nebenstehendem Schema und benütze die in der Figur schraffierten Kräftedreiecke.

$$Q \begin{cases} H \\ s \begin{cases} u \begin{cases} v \\ h \end{cases} \\ p \begin{cases} V \\ \mathfrak{H} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Probe: $V - v = Q$
(warum?)

14. Eine geradlinige Straße (Fig. 86) führt in ebenem Gelände von einem Orte A über B nach C. Von den beiden letztgenannten Orten zweigen wiederum geradlinige Straßen nach zwei Orten D und E ab.

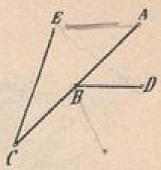


Fig. 86.

Man berechne die Entfernung DE für folgende Angaben:

a) BC = 3·5 *km*	*b)* BC = 7 *km*
∢DBA = 55°	∢ABD = 130°
∢ECA = 30°	∢ACE = 35°
CE = 6·575 *km*	CE = 4 *km*
BD = 4·225 *km*	BD = 3 *km*

15. Vom Rudolfsturme C (bei Hallstadt) (Fig. 87), dessen Höhe über dem Spiegel des Hallstädter Sees $h = 386\ m$ ist, erscheint die Spitze des Sarsteins unter einem Höhenwinkel $\alpha = 11^\circ 37' 30''$, das Spiegelbild unter einem Tiefenwinkel $\beta = 19^\circ 16' 30''$. Wie groß ist die absolute Höhe des Sarsteins, wenn der Spiegel des Hallstädter Sees eine Meereshöhe von 494 *m* besitzt?

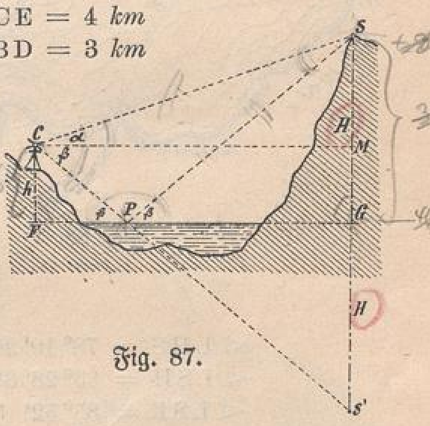


Fig. 87.

Anleitung. 1. Lösung. Aus ΔCMS folgt: $CM = (H - h)\operatorname{cotg}\alpha$
aus $\Delta CMS'$ folgt: $CM = (H + h)\operatorname{cotg}\beta$

Aus der Gleichstellung dieser Werte ergibt sich

$$H = h \cdot \frac{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$$

2. Lösung. Aus den ähnlichen Dreiecken PFC und PGS folgt:

$$H : h = SP : CP \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Da in $\Delta CPS \ldots \sphericalangle PCS = \beta + \alpha$ und $\sphericalangle CSP = \beta - \alpha$ ist, so ergibt sich nach dem Sinussatze:

$$SP : CP = \sin(\beta + \alpha) : \sin(\beta - \alpha) \ldots\ldots (II)$$

Aus (I) und (II) erhält man $H = h \cdot \dfrac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$.

16. Von einem Punkte, dessen Höhe h über dem Spiegel eines Sees bekannt ist, erscheint eine Wolke unter dem Höhenwinkel α, ihr Spiegelbild im See unter dem Tiefenwinkel β. Man berechne die Höhe der Wolke über dem Seespiegel für folgende Angaben:

a) h = 153·8 *m*	*b)* h = 175 *m*	*c)* h = 83·75 *m*
$\sphericalangle\beta = 25^\circ 14' 40''$	$\sphericalangle\beta = 19^\circ 10'$	$\sphericalangle\beta = 31^\circ 20'$
$\sphericalangle\alpha = 17^\circ 40' 25''$	$\sphericalangle\alpha = 16^\circ 45'$	$\sphericalangle\alpha = 26^\circ 30'$

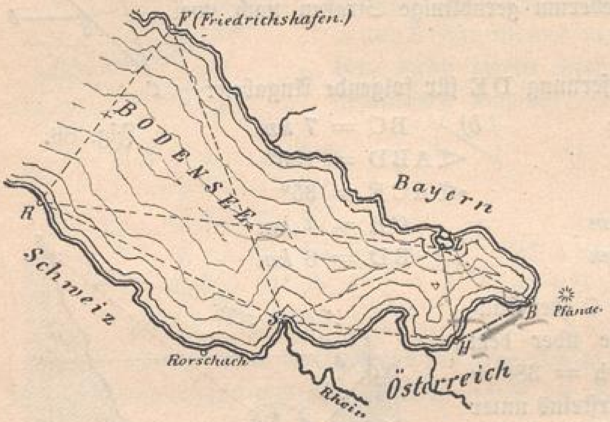


Fig. 88.

17. Von zwei passend gewählten Uferpunkten des Bodensees bei Bregenz (B) und Hard (H) (Fig. 88), deren Entfernung $BH = 4612{\cdot}5\,m$ früher bestimmt wurde, erschien der Hafenturm von Lindau (L) unter den Visurwinkeln:

$$BHL = 71^0\,51'\,40''$$
$$HBL = 60^0\,35'\,50''$$

Ferner wurde vom Rheinspitz S (Rheinmündung) und von einem Uferpunkte bei Romanshorn (R) nach den entsprechenden Punkten visiert. Dadurch ergaben sich folgende Winkel:

$\sphericalangle LHS = 78^0\,10'\,26''$	$\sphericalangle FSR = 40^0\,54'\,46''$
$\sphericalangle LSH = 33^0\,28'\,38''$	$\sphericalangle LRS = 19^0\,35'\,54''$
$\sphericalangle LSF = 85^0\,52'\,\;5''$	$\sphericalangle FRS = 79^0\,54'\,46''$

Aus diesen Angaben berechne man die Entfernungen: BL, LH, HS, SL, RS, RL, RF, SF und FL.

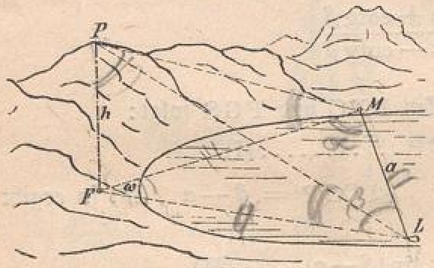


Fig. 89.

18. Von zwei Uferpunkten des Bodensees: Lindau (L) und Mehrerau (M) (Fig. 89) wurde nach der Spitze des Pfänders (P) visiert und es ergaben sich folgende Winkel:

a) Horizontalwinkel $\begin{cases} FML = \alpha = 123^0\,57'\,8'' \\ FLM = \beta = \;\;27^0\,13'\,8'' \end{cases}$

b) Vertikalwinkel $\begin{cases} FMP = \varphi = 8^0\,30'\,31'' \\ FLP = \psi = 4^0\,42'\,57'' \end{cases}$

Die Entfernung $ML = a$ wurde mit 4665 *m* bestimmt. Man berechne aus diesen Angaben die Höhe h des Pfändergipfels über dem Bodensee.

Anleitung: Aus dem Dreieck MLF berechne man die Seiten FM und ML nach dem Sinussatze, sodann aus den rechtwinkligen Dreiecken FMP und FLP die Höhe h. Man erhält auf diesem Wege:

$$h = \frac{a \sin\beta \operatorname{tg}\varphi}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad h = \frac{a \sin\alpha \operatorname{tg}\psi}{\sin\omega}$$

Aus den beiden Resultaten ist das Mittel zu nehmen.

19. Von zwei auf demselben Meridian SN und in gleicher Seehöhe liegenden Orten A und B (Fig. 90), deren Entfernung 47·75 *km* [67·5 *km*] beträgt, wurde ein Meteor (M) im Augenblicke seines Erlöschens beobachtet, und es wurden zur Bestimmung seines Ortes folgende Winkel gemessen:

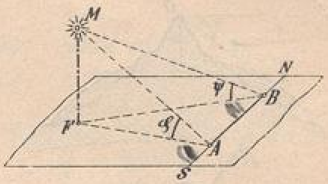


Fig. 90.

1. Horizontalwinkel: (Azimut) $\begin{cases} SAF = 142^0\,20' & [130^0\,30'] \\ SBF = 140^0 & [112^0\,40'] \end{cases}$

2. Vertikalwinkel: (Höhen) $\begin{cases} FAM = \varphi = 5^0\,30' & [27^0\,20'] \\ FBM = \psi = 5^0\,45' & [32^0] \end{cases}$

Man berechne die Höhe des Meteors.

20. Vom „Signal de Bougis" (S), einem 512 *m* über dem Spiegel des Genfer Sees (Fig. 91) gelegenen berühmten Aussichtspunkte, erscheinen die Orte Genf und Villeneuve unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 0^0\,49'\,56''$ und $\beta = 0^0\,40'\,42''$, während die horizontale Drehung des Fernrohres (bei Einstellung von einem Orte auf den anderen) $\omega = 105^0\,4'\,40''$ ist. Wie groß ist die direkte Entfernung der beiden Orte? (Die Erdkrümmung ist zu vernachlässigen. Die vorstehende Aufgabe bildet die Umkehrung der Aufgabe 18.)

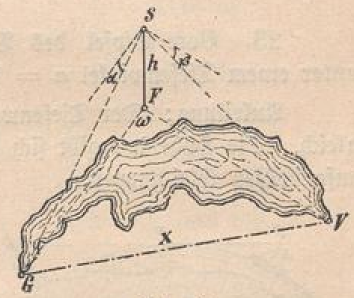


Fig. 91.

21. Vom Gipfel *A* (Fig. 92) des Schafberges, dessen Meereshöhe 1780 *m* beträgt, erscheinen drei in der Meereshöhe von 549 *m* gelegene Uferpunkte des des Abersees, u. zw. St. Gilgen (*G*), St. Wolfgang (*W*) und Strobel (*S*), unter den Tiefenwinkeln

$$\omega_1 = 13^0\,48'\,16''$$
$$\omega_2 = 14^0\,56'\,41''$$
$$\omega_3 = 9^0\,24'\,48'''$$

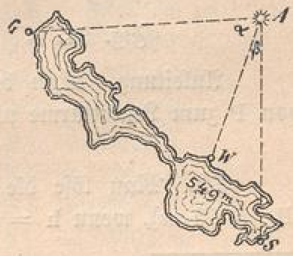


Fig. 92.

während am Horizontalkreise des Winkelmeßinstrumentes die Winkel $\alpha = \sphericalangle GAW = 89^0\,38'\,9''$ und
$\beta = \sphericalangle WAS = 18^0\,20'\,14''$
abgemessen wurden.

Wie viel betragen die Horizontalentfernungen *AG*, *AW* und *AS* der drei Uferpunkte vom Schafberggipfel und wie groß sind die gegenseitigen Entfernungen der Uferpunkte?

Potenz d. Punctes ???

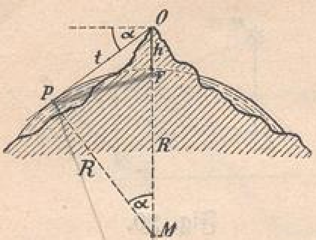


Fig. 93.

22. Ein Auge O (Fig. 93) befindet sich in der Höhe h über der Erdoberfläche, die als eine glatte Kugelfläche (Meeresspiegel) vom Radius R = 6366·75 *km* angesehen wird. Wie lang ist der Bogen (FP), welchen das Auge nach der einen Seite überblickt? Man berechne die Länge dieses Bogens für die Beobachtungspunkte:

a) Ätna . . . . h = 3313 *m*

b) Chimborasso h = 6700 *m*

Anleitung. Aus $\triangle$ MPO folgt $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OP}{MP}$*), und da nach dem Satze von der Potenz des Punktes

$$OP = \sqrt{h(2R+h)} \quad \text{ist, so ist} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{h(2R+h)}}{R}$$

23. Vom Gipfel des Vesuvs erscheint der äußerste Horizont (das Meer) unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 1^0\ 8'\ 39''$. Wie hoch ist der Vesuv?

Anleitung: Der Tiefenwinkel und der Winkel PMO (Fig. 93) sind einander gleich. Die Höhe h ergibt sich aus den in voriger Aufgabe zur Berechnung von α aufgestellten Gleichungen.

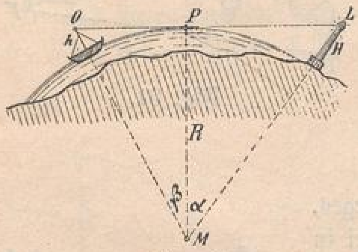


Fig. 94.

24. Das Leuchtfeuer des Leuchtturmes auf Helgoland hat eine Höhe H = 83 *m* über dem Seespiegel. Einem auf einem fernen Schiffe in der Höhe h über dem Seespiegel befindlichen Auge erscheint soeben das Licht des Leuchtturmes am äußersten Horizont. Wie weit ist das Schiff noch vom Leuchtturme entfernt, wenn

a) h = 15 *m* *b)* h = 18 *m* *c)* h = 25 *m* ist?

Anleitung. Man berechne die Winkel α und β und dann die zugehörigen von P zum Leuchtturme und zum Schiffe reichenden Kreisbögen.

25. Man löse die vorstehende Aufgabe für den Leuchtturm von Marseille (H = 60 *m*), wenn h = 13 *m* ist.

---

*) Die einfachere Formel: $\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$ liefert bei fünfstelligen Tafeln zu ungenaue Resultate. Annähernd ist $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}}$

Für die Berechnung der Bogenlängen beachte man, daß sich für den Halbmesser r = 1 folgende Bogenlängen ergeben:

$1^0 = 0·0174533 \qquad 1' = 0·0002909 \qquad 1'' = 0·0000048$

$\frac{T}{R+h} = \sin\alpha$

$\frac{R}{R+h} = \cos\alpha$

??? $x^2 = (R+h)^2 - R^2$

$x = \sqrt{h(2R+h)}$

Resultate.

1\. *a)* CA = 1109 *m*
CB = 395·6 *m*
b) CA = 456·2 *m*
CB = 254·47 *m*

2\. *a)* 619·86 *m*
b) 397·67 *m*

3\. *a)* α = 60°
β = 152° 12′ 16″
γ = 147° 47′ 44″
b) α = 93° 56′ 50″
β = 120° 19′ 28″
γ = 145° 43′ 42″

4\. P : Q : R = 8 : 5 : 10

5\. *a)* q = 684·27 *kg*
p = 433·05 *kg*
b) q = 2369 *kg*
p = 1736 *kg*

6\. h = 1312·3 *m*

7\. P = 165·138 *kg*
Q = 215·138 *kg*

8\. *a)* 1525·5 *m*
b) 1396·7 *m*

9\. *a)* x = 665·26 *m*
y = 730·02 *m*
z = 401·713 *m*
b) x = 1169·07 *m*
y = 1141·47 *m*
z = 1039·3 *m*

10\. ∢ A = 43° 33′ 36″
∢ B = 38° 10′ 54″
AB = 4602·66 *m*
MN = 1733·06 *m*
a) ∢ A = 47° 41′ 14″
∢ B = 28° 8′ 26″
MN = 1575·3 *m*
b) ∢ A = 43° 57′
∢ B = 38° 27′ 30″
MN = 650·5 *m*

11\. *a)* 3795 *m*
b) 5669 *m*

12\. *a)* s = 41·41 *kg*
p = 23·352 *kg*
q = 27·131 *kg*
b) s = 368·16 *kg*
p = 193·98 *kg*
q = 237 *kg*

13\. H = 8640 *kg*
s = 10964 *kg*
u = 4337 *kg*
p = 10770 *kg*
v = 2670 *kg*
h = 3418 *kg*
V = 9420 *kg*
ℌ = 5222 *kg*

14\. *a)* DE = 6·7523 *km*
BE = 3·9525 *km*
b) DE = 4·9307 *km*
CD = 5·568 *km*

15\. 1489 *m*

16\. *a)* 794·9 *m*
b) 2434·5 *m*
c) 841·4 *m*

17\. BL = 5941·33 *m*
LH = 5446·56 *m*
HS = 9177·36 *m*
SL = 9664·4 *m*
RS = 15953·3 *m*
RL = 23076·7 *m*
RF = 12167 *m*
SF = 18290·7 *m*
FL = 20062 *m*

18\. 662·015 *m*

19\. *a)* h = 91·628 *km*
(als Mittel von 91·84 und 91·416).
b) h = 104·93 *km*
(als Mittel von 104·73 und 105·13).

20\. 62·5 *km*

21. $AG = 5010\ m$
$AW = 4612\ m$
$AS = 7425\ m$
$GW = 6788\ m$
$WS = 3375\ m$

22. a) $205{\cdot}343\ km$
b) $291{\cdot}959\ km$

23. $1270\ m$

24. a) $46{\cdot}332\ km$
b) $47{\cdot}639\ km$
c) $50{\cdot}287\ km$

25. $40{\cdot}5\ km$

Erweiterung der Goniometrie.

§ 32. Es liegt wohl die Vermutung nahe, daß, wenn zwei oder mehrere Winkel zu einander in bestimmten Beziehungen stehen, auch die Funktionen dieser Winkel einen gewissen Zusammenhang besitzen werden, und wir haben dies in der Tat in mehreren Fällen (§ 22) bereits nachgewiesen.

Solche aus dem Zusammenhange der Winkel fließenden Beziehungen zwischen deren Funktionen können oft mit Vorteil zur Vereinfachung von Formeln und Rechnungen benutzt werden, und wir wollen uns deshalb in den nächsten Kapiteln mit den wichtigsten hierher gehörigen Lehrsätzen befassen.

Diese Lehrsätze bilden mit den im § 18 angegebenen Beziehungen zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels den Inhalt der Goniometrie. Die goniometrischen Sätze sind für uns auch deshalb von großer Wichtigkeit, weil durch sie der innere (analytische) Zusammenhang einzelner für die Dreiecksberechnung aufgestellter Lehrsätze (siehe z. B. § 38) klar zu Tage tritt.

Zusammenhang zwischen den Funktionen einer Winkelsumme und den Funktionen der Einzelwinkel (Summanden).

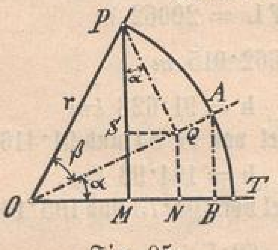


Fig. 95.

§ 33. Wir wollen zuerst aus der Fig. 95 eine Formel ableiten, welche uns in den Stand setzt, den Sinus und Cosinus der Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ aus den gleichnamigen Funktionen der einzelnen Winkel α und β zu berechnen.