Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Erweiterung der Goniometrie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

21. $AG = 5010\ m$
$AW = 4612\ m$
$AS = 7425\ m$
$GW = 6788\ m$
$WS = 3375\ m$

22. a) $205 \cdot 343\ km$
b) $291 \cdot 959\ km$

23. $1270\ m$

24. a) $46 \cdot 332\ km$
b) $47 \cdot 639\ km$
c) $50 \cdot 287\ km$

25. $40 \cdot 5\ km$

Erweiterung der Goniometrie.

§ 32. Es liegt wohl die Vermutung nahe, daß, wenn zwei oder mehrere Winkel zu einander in bestimmten Beziehungen stehen, auch die Funktionen dieser Winkel einen gewissen Zusammenhang besitzen werden, und wir haben dies in der Tat in mehreren Fällen (§ 22) bereits nachgewiesen.

Solche aus dem Zusammenhange der Winkel fließenden Beziehungen zwischen deren Funktionen können oft mit Vorteil zur Vereinfachung von Formeln und Rechnungen benutzt werden, und wir wollen uns deshalb in den nächsten Kapiteln mit den wichtigsten hierher gehörigen Lehrsätzen befassen.

Diese Lehrsätze bilden mit den im § 18 angegebenen Beziehungen zwischen den Funktionen eines und desselben Winkels den Inhalt der Goniometrie. Die goniometrischen Sätze sind für uns auch deshalb von großer Wichtigkeit, weil durch sie der innere (analytische) Zusammenhang einzelner für die Dreiecksberechnung aufgestellter Lehrsätze (siehe z. B. § 38) klar zu Tage tritt.

Zusammenhang zwischen den Funktionen einer Winkelsumme und den Funktionen der Einzelwinkel (Summanden).

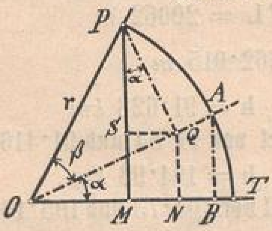

Fig. 95.

§ 33. Wir wollen zuerst aus der Fig. 95 eine Formel ableiten, welche uns in den Stand setzt, den Sinus und Cosinus der Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ aus den gleichnamigen Funktionen der einzelnen Winkel α und β zu berechnen.

In Figur 95 ist $\quad OA = OP = r,$

$$\sphericalangle POT = \alpha + \beta,$$

$$PM = r \sin(\alpha + \beta) \qquad \text{und} \qquad OM = r \cos(\alpha + \beta)$$

1. Es ist $\qquad PM = SM + PS$

oder $\qquad PM = QN + PS$

oder $\qquad r \sin(\alpha + \beta) = OQ \,.\, \sin\alpha + PQ \,.\, \cos\alpha$*)

$$r \sin(\alpha + \beta) = r \cos\beta \,.\, \sin\alpha + r \sin\beta \,.\, \cos\alpha,$$

somit $\qquad \mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta} \;\ldots\ldots \qquad$ (I)

2. Es ist $\qquad OM = ON - MN$

$$OM = ON - QS$$

oder $\qquad r(\cos\alpha + \beta) = OQ \,.\, \cos\alpha - PQ \,.\, \sin\alpha$

$$r \cos(\alpha + \beta) = r \cos\beta \,.\, \cos\alpha - r \sin\beta \,.\, \sin\alpha$$

$$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} \;\ldots\ldots \qquad \text{(II)}$$

Beispiel. Man erprobe die Richtigkeit dieser Formeln für $\alpha = 60^0$ und $\beta = 30^0$.

Setzt man $\beta = \alpha$, so wird $(\alpha + \beta) = 2\alpha$ und man erhält die Formeln:

$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$$

(III) $\qquad \mathbf{\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha}$

$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$$

(IV) $\qquad \mathbf{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \qquad$ und, da

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \qquad \text{und} \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

(IVa) $\quad \mathbf{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha} \qquad \mathbf{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1} \quad$ (IVb)

Diese Formeln, welche gestatten, aus dem sinus und cosinus eines Winkels die gleichnamigen Funktionen des doppelten Winkels zu berechnen, lassen sich weiter umformen, wenn man

statt $2\alpha \ldots\ldots \alpha \qquad$ und daher statt $\quad \alpha \ldots\ldots \frac{\alpha}{2}$ schreibt.

---

*) $\sphericalangle QPS = \alpha$ als Normalwinkel.

Man erhält dann:

$$\text{(V)} \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(VI)}$$

$$\text{(VIa)} \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{(VI}_b\text{)}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich unmittelbar

$$\text{(VII)} \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(VIII)}$$

$$\text{und } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Übungsbeispiele.

1. Wie groß sind $\sin 40^0$ und $\cos 40^0$, wenn
$\sin 15^0 = 0{\cdot}25882$ und $\cos 15^0 = 0{\cdot}96593$
$\sin 25^0 = 0{\cdot}42262$ „ $\cos 25^0 = 0{\cdot}90631$ ist?

2. Wie groß sind die goniometrischen Funktionen von $(x + y)$, wenn
$\sin x = 0{\cdot}6$ $\sin y = 0{\cdot}8$ ist?

3. Man vereinfache folgende Ausdrücke:

a) $\sin(2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$ *b)* $(1 - \cos\alpha) \,.\, \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ *c)* $(1 + \cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

d) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cotg}(2\alpha)$ *e)* $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ *f)* $\dfrac{1 - \operatorname{sos}\alpha}{1 + \cos\alpha}$

4. Man löse folgende Gleichungen auf:

a) $14 \,.\, \sin\alpha = \dfrac{5}{\cos\alpha}$

Auflösung: $7 \,.\, 2\sin\alpha\cos\alpha = 5$

$\sin(2\alpha) = \dfrac{5}{7}$

Daraus: $\alpha_1 = 22^0\,47'\,32{\cdot}5''$
$\alpha_2 = 67^0\,12'\,27{\cdot}5''$

b) $5{\cdot}37\sin x = \dfrac{1{\cdot}25}{\cos x}$

c) $30\cos x = 11\operatorname{cosec} x$

d) $\sin(2x) = 1{\cdot}5\sin x$

e) $5\sin(2x) = 3\cos x$

f) $\sin(2\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Auflösung: $2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\cos^2\alpha = 1 \quad \sin\alpha = 0$

$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha_1 = 45^0 \quad \alpha_2 = 315^0 \quad \alpha_5 = 0^0$
$\alpha_3 = 135^0 \quad \alpha_4 = 225^0 \quad \alpha_6 = 180^0$

g) $3\sin(2\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

h) $759\sin x = 325\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

i) $\operatorname{cosec} y = \sec\dfrac{y}{2}$

$k)$ $\mathbf{\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha}$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{2}}$$

$\alpha_1 = 32^0\,32'\,3''$ $\quad \alpha_3 = 126^0\,22'\,31''$

$\alpha_2 = 360 - \alpha_1$ $\quad \alpha_4 = 360 - \alpha_3$

$l)$ $5\cos(2\alpha) = 3\cos\alpha$

$m)$ $\cos\frac{x}{2} : \cos x = 17 : 9$

$n)$ $\cos(2x) = \sin x$

o) Wie groß ist der Winkel, dessen tangens sich zum sinus des doppelten Winkels verhält, wie 3 : 5?

p) Wie groß ist der Winkel, dessen cosinus gleich ist dem dreifachen cosinus des doppelten Winkels?

$q)$ $\operatorname{tg} x = \sin x + \sin(2x)$

$r)$ $\cos(2x) + \cos x = 1$

$s)$ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 5\sin\alpha\cos\alpha$

$t)$ $\sin x + \cos x = 1{\cdot}345$ *)

$u)$ $\sin x + \cos x = 1{\cdot}414$

$v)$ $\sin x + \cos x = 1{\cdot}2369$

$w)$ $\sin x - \cos x = 0{\cdot}37$

Zusatz: Man verzeichne die berechneten Winkel am Kreise und erprobe an den Funktionslinien die Übereinstimmung mit den gegebenen Gleichungen.

Resultate.

1. $0{\cdot}64279$
   $0{\cdot}76604$

2. $\sin(x + y) = +1$
   $\cos(x + y) = 0$ u. s. f.
   $x + y = 90^0$

3. *a)* $2\sin^2\alpha$
   b) $\sin\alpha$
   c) $\sin\alpha$
   d) $\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$
   e) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2\alpha)$
   f) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

4. *a)* $\alpha_1 = 22^0\,47'\,33''$
   b) $x_1 = 13^0\,52'\,23''$
   $x_2 = 76^0\;7'\,38''$
   c) $x_1 = 23^0\,35'$
   $x_2 = 66^0\,25'$
   d) $x_1 = 41^0\,24'\,35''$
   $x_2 = 318^0\,35'\,25''$
   $x_3 = 0 \quad x_4 = 180^0$
   e) $x_1 = 17^0\,27'\,27''$
   $x_2 = 162^0\,32'\,33''$
   $x_3 = 90^0$
   $x_4 = 270^0$
   f) $\alpha_1 = 45^0$ u. s. f.

---

*) Man quadriere die Gleichung und beachte, daß
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $2\sin x\cos x = \sin(2x)$ ist.

g) $\alpha_1 = 24^0 \ \ 5' \, 41''$
$\alpha_2 = 155^0 \, 54' \, 19''$
$\alpha_3 = 335^0 \, 54' \, 19''$
$\alpha_4 = 204^0 \ \ 5' \, 41''$

h) $x_1 = 124^0 \, 52' \, 33''$
$x_2 = 235^0 \ \ 7' \, 28''$
$x_3 = 0 \quad x_4 = 360^0$

i) $y_1 = 60^0 \quad y_2 = 300^0$
$y_3 = 180^0$

k) $\alpha_1 = 32^0 \, 32' \, 3''$ usf.

l) $\alpha_1 = 29^0 \, 12' \, 37''$
$\alpha_2 = 360 - \alpha_1$
$\alpha_3 = 124^0 \, 56' \, 51''$
$\alpha_4 = 360 - \alpha_3$

m) $x_1 = 63^0 \, 11' \, 50''$
$x_2 = 251^0 \, 53' \, 34''$

n) $x_1 = 30^0 \quad x_2 = 150^0$
$x_3 = 270^0$

o) $x_1 = 24^0 \, 5' \, 40''$
$x_2 = 155^0 \, 54' \, 20''$
$x_3 = 0$
$x_4 = 360^0 - x_1$
$x_5 = 360^0 - x_2$
$x_6 = 180^0$

p) $x_1 = 37^0 \, 18' \, 48''$
$x_2 = 128^0 \, 57' \, 7''$
$x_3 = 360^0 - x_1$
$x_4 = 360^0 - x_2$

q) $x_1 = 60^0 \quad x_2 = 300^0$
$x_3 = 0^0 \quad x_4 = 180^0$

r) $x_1 \doteq 38^0 \, 40'$
$x_2 \doteq 321^0 \, 20'$

s) $\alpha_1 = \ \ 10^0 \, 54' \, 3''$
$\alpha_2 = 100^0 \, 54' \, 3''$

t) $x_1 \doteq 27^0$
$x_2 \doteq 63^0$

u) $x_1 \doteq 44^0$
$x_2 \doteq 46^0$

v) $x_1 = 16^0$
$x_2 = 74^0$

w) $x = 60^0 \, 10'$

§ 34. Aufgabe: Man bestimme den sinus und cosinus der Winkeldifferenz $(\alpha - \beta)$ aus den gleichnamigen Funktionen der Einzelwinkel α und β.

Ist $\varphi = \alpha - \beta$ so ist $\alpha = \beta + \varphi$
somit nach § 33

$$\sin \alpha = \sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi \quad \dots \quad (A)$$
$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi \quad \dots \quad (B)$$

Multipliziert man die Gleichung (A) mit $\cos \beta$ und die Gleichung (B) mit $(-\sin \beta)$, so erhält man durch Addition der Gleichungen

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin \varphi \, (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)$$

Addiert man aber zu der mit $\sin \beta$ multiplizierten Gleichung (A) die mit $\cos \beta$ multiplizierte Gleichung (B), so erhält man

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos \varphi \, (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

oder, weil $(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 1$ und $\varphi = \alpha - \beta$ ist,

$$\mathbf{\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \quad \dots \quad (IX)$$
$$\mathbf{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \quad \dots \quad (X)$$

Übungsbeispiele.

1. Man berechne aus: $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

die Werte für $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$.

2. Was ergeben die Formeln (IX) und (X) für $x = 90^0$, $x = 180^0$, $x = 270^0$, $x = 360^0$?

3. *a)* Man mache den Ausdruck $\frac{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$ logarithmisch brauchbar.

b) Man zeige, daß die in Aufgabe 6 (S. 70) erhaltenen beiden Lösungen identisch sind.

4. Man vereinfache folgende Ausdrücke:

a) $\sin(x + y) - \sin(x - y)$ *b)* $\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

c) $\sin(3x)\cos(2x) - \cos(3x)\sin(2x)$

d) $\cos(x + \alpha)\cos(x - \alpha) + \sin(x + \alpha)\sin(x - \alpha)$

5. Man bestimme die Winkel x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 65^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}582565$ *b)* $x - y = 26^0\,30'$, $\sin x \sin y = 0{\cdot}37356$

c) $x + y = 80^0\,30'$, $\cos x \cos y = 0{\cdot}39378$ *d)* $x - y = 30^0$, $\cos x \sin y = 0{\cdot}219845$

Anleitung: In Beispiel 5a ist:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin 65^0 = 0{\cdot}90631$$

somit $0{\cdot}582565 + \cos x \sin y = 0{\cdot}90631$

und $\cos x \sin y = 0{\cdot}323745$

Subtrahiert man diese Gleichung von der gegebenen $\sin x \cos y = 0{\cdot}582565$

so erhält man $\sin x \cos y - \cos x \sin y = 0{\cdot}25882$

also $\sin(x - y) = 0{\cdot}25882$

somit nach Tabelle $x - y = 15^0$,

welche Gleichung mit der gegebenen Gleichung $x + y = 65^0$

zusammengefaßt wird.

6. Man zeige, daß die in Aufgabe 15 (S. 72) erhaltenen beiden Resultate identisch sind.

Resultate.

1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \qquad \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

2. **Vergleiche § 22.**

3. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

4. *a)* $2 \cos x \sin y$ *b)* $\operatorname{tg} x$ *c)* $\sin x$ *d)* $\cos (2 \alpha)$

5. *a)* $x = 40^0$ $y = 25^0$ *b)* $x = 54^0$ $y = 27^0\ 30'$

c) $x = 66^0$ $y = 14^0\ 30'$ *d)* $x_1 = 50^0$ $y_1 = 20^0$ $x_2 = 70^0$ $y_2 = 40^0$

§ 35. Die Formeln (I) und (IX), (II) und (X) lassen sich auch in folgender Form zusammenfassen:

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Dividiert man beide Gleichungsseiten durcheinander, so erhält man:

$$\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

und wenn man Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches durch $\cos \alpha \cos \beta$ dividiert:

$$\text{(XI)} \qquad \operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung die reziproken Werte, so erhält man:

$$\text{(XII)} \qquad \operatorname{cotg} (\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}$$

oder, wenn man rechts Zähler und Nenner mit $\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$ multipliziert,

$$\text{(XIIa)} \qquad \operatorname{cotg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

Berücksichtigt man bloß die oberen Zeichen und setzt $\beta = \alpha$, also $(\alpha + \beta) = 2\alpha$, so bekommt man weiters die Formeln:

$$\text{(XIII)} \qquad \operatorname{tg} (2 \alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{(XIV)} \qquad \operatorname{cotg} (2 \alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

Außer diesen Formeln, welche uns gestatten, aus dem tangens eines Winkels tangens und cotangens des doppelten Winkels zu berechnen, wollen wir noch eine Formel aufstellen, welche lehrt, aus dem cosinus eines Winkels den tangens des halben Winkels zu finden.

Aus den Formeln (VII) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

(VIII) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

folgt unmittelbar durch Division:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

daher $$\mathbf{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{1-\cos\alpha}}{\mathbf{1+\cos\alpha}}} \qquad \text{(XV)}$$

und reziprok: $$\mathbf{cotg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mathbf{1+\cos\alpha}}{\mathbf{1-\cos\alpha}}} \qquad \text{(XVI)}$$

Übungsbeispiele.

1. Man setze in Formel (XIII) und (XIV) $\alpha = 45^0, 90^0, 135^0, 180^0$ und vergleiche die erhaltenen Resultate mit § 21.

2. Man berechne aus: $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ die Werte für tg 30^0 und cotg 30^0.

3. Man berechne aus tg $20^0 = 0{\cdot}36397$ die Werte: tg 40^0 und cotg 40^0.

§ 36. Die Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ können auch benützt werden, um Gleichungen von der Form:

$$\mathbf{a\cos x \pm b\sin x = c}$$

durch Einführung eines Hilfswinkels aufzulösen.

Dividiert man nämlich die vorliegende Gleichung durch b, so erhält man:

$$\frac{a}{b}\cos x \pm \sin x = \frac{c}{b} \qquad \text{(A)}$$

und setzt man nun: $$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

so nimmt die Gleichung (A) folgende Form an:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x \pm \sin x = \frac{c}{b}$$

$$\sin\varphi\cos x \pm \cos\varphi\sin x = \frac{c\cos\varphi}{b}$$

oder $$\mathbf{\sin(\varphi \pm x) = \frac{c\cos\varphi}{b}},$$

während $\sphericalangle\,\varphi$ durch: $\mathbf{tg}\,\varphi = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ bestimmt ist.

Beispiel.

$$52 \cos x + 37 \sin x = 48{\cdot}53$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{52}{37} \;.\;.\;.\;.\; \varphi = 54^0\ 34'$$

ferner ist $\sin(\varphi + x) = \frac{48{\cdot}53 \cos \varphi}{37}$, aus welcher Gleichung sich nach § 23 zwei Werte für den Winkel $(\varphi + x)$ ergeben, u. zw. ist

$$\varphi + x = 49^0\ 30' \quad \text{oder} \quad \varphi + x = 130^0\ 30'$$

und $\varphi = 54^0\ 34'$ $\qquad \varphi = 54^0\ 34'$

somit $\mathbf{x_1 = -\,5^0\ 4'}$ *) $\qquad \mathbf{x_2 = 75^0\ 56'}$

Hätte man in der obigen Gleichung (A)

$$\frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

gesetzt, so hätte man erhalten:

$$\cos(\varphi \mp x) = \frac{c \sin \varphi}{b}$$

und

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{a}{b}$$

Übungsbeispiele.

1. $5 \cos x + \sin x = 3$
2. $5 \sin x - \cos x = 2$
3. $25 \cos x + 98 \sin x = 89{\cdot}556$
4. $57{\cdot}8 \cos x + 19{\cdot}6 \sin x = 61{\cdot}0042$
5. $6{\cdot}258 \cos x - 0{\cdot}975 \sin x = 1{\cdot}4403$
6. $35{\cdot}7 \sin x - 20{\cdot}8 \cos x = 13{\cdot}9775$
7. $38{\cdot}5 \cos x - 12{\cdot}5 \sin x = 27{\cdot}09214$

8. Auf einen Körper vom Gewichte Q (Fig. 96), der gegen seine horizontale Unterlage den Reibungskoeffizienten φ besitzt, wirkt eine gegen den Schwerpunkt S gerichtete Kraft P. Wie groß muß der Neigungswinkel α dieser Kraft gegen die Vertikale mindestens sein, damit der Körper gleite?

a) $P = 50\,kg$, $Q = 60\,kg$, $\varphi = 0{\cdot}4$ b) $P = 80\,kg$, $Q = 50\,kg$, $\varphi = 0{\cdot}4$ c) $P = \frac{Q}{3}$, $\varphi = \frac{1}{4}$

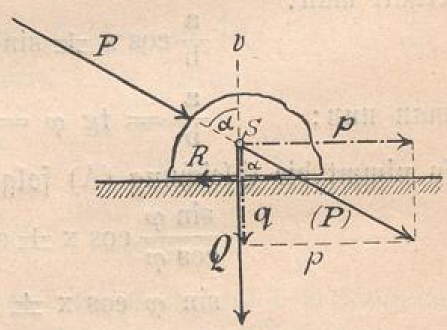

Fig. 96.

---

*) Über negative Winkel siehe § 40. In den Resultaten der folgenden Beispiele ist (mit Ausnahme des ersten Beispieles) nur eine Lösung angegeben.

$P \cdot \sin\alpha = (Q + P \cdot \cos\alpha) \cdot \mu$

$P(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = Q \cdot \mu$

$- \mu\sqrt{1-\sin^2\alpha} = a - \sin\alpha$ $\quad \mu^2 - \mu^2\sin^2\alpha = a^2 - 2a\sin\alpha + \sin^2\alpha$

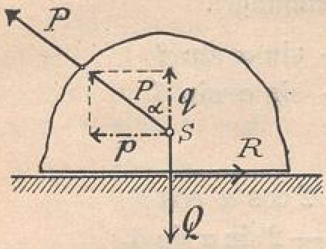

Fig. 97.

Anleitung: Den gesuchten Grenzwinkel findet man, indem man die Schubkomponente p gleich setzt der Reibung $R = (Q + q)\,\varphi$.

9. Man löse die Aufgabe 8 unter Zugrundelegung der Fig. 97 für folgende Angaben:

a) $P = 10\ kg$, $Q = 45\ kg$, $\varphi = \frac{1}{5}$ *b)* $P = 90\ kg$, $Q = 220\ kg$, $\varphi = \frac{1}{3}$ *c)* $Q = 4\ P$, $\varphi = \frac{1}{5}$

Resultate.

1. $x_1 = -42^0\ 39'\ 5''$ *)
   $x_2 = 65^0\ 16'\ 15''$
2. $x = 34^0\ 24'\ 13''$
3. $x = 47^0\ 59'\ 55''$
4. $x = 16^0\ 56'\ 54''$
5. $x \doteq 68^0$
6. $x \doteq 50^0$
7. $x \doteq 30^0$
8. *a)* $\alpha \doteq 48^0\ 16'$
   b) $\alpha = 35^0\ 13'\ 25''$
   c) $\alpha = 60^0\ 43'\ 17''$
9. *a)* $\alpha = 50^0\ 38'\ 13''$
   b) $\alpha = 32^0\ 11'\ 21''$
   c) $\alpha = 40^0\ 21'\ 37''$

§ 37. Man verwandle $(\sin\varphi \pm \sin\psi)$ und $(\cos\varphi \pm \cos\psi)$ in logarithmisch brauchbare Ausdrücke.

Aus den Gleichungen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

folgt:

(A) $\quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

(B) $\quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

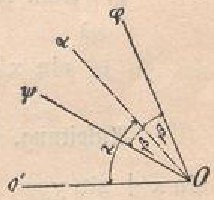

Fig. 98.

Setzt man nun $(\alpha + \beta) = \varphi$
und $(\alpha - \beta) = \psi$,

so ist $\alpha = \dfrac{\varphi + \psi}{2}$

$\beta = \dfrac{\varphi - \psi}{2}$ zu setzen (Fig. 98),

wodurch die Gleichungen (A) und (B) folgende Form annehmen:

$$\text{(XVII)} \qquad \sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\text{(XVIII)} \qquad \sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

*) Siehe Fußnote auf vorstehender Seite.

In derselben Weise folgt aus den Gleichungen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

durch Addition und Subtraktion:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$$

oder nach obiger Substitution:

$$\text{(XIX)} \qquad \mathbf{\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}}$$

$$\text{(XX)} \qquad \mathbf{\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}}$$

Übungsbeispiele.

1. Man mache folgende Ausdrücke logarithmisch brauchbar:

a) $\sin(3x) \pm \sin x$ *b)* $\cos(7x) \pm \cos(3x)$

c) $\sin(x + 3y) + \sin(x + y)$ *d)* $\cos(2\alpha - \beta) + \cos\beta$

2. Man löse folgende Gleichungen auf:

a) $x + y = 70^0$, $\sin x + \sin y = 1{\cdot}11388$

Anleitung. In die Gleichung:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

setze man die gegebenen Werte ein und berechne daraus $(x - y)$.

b) $x - y = 15^0$, $\sin x \,.\, \cos y = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

Anleitung. In die Gleichung:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$

setze man die gegebenen Werte ein und berechne daraus $(x + y)$.

3. Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 70^0$, $\sin x + \sin y = 0{\cdot}8$ *b)* $x - y = 30^0$, $\sin x - \sin y = 0{\cdot}375$

c) $x - y = 20^0$, $\cos x + \cos y = 1{\cdot}84$ *d)* $x + y = 97^0\ 36'$, $\cos x - \cos y = -0{\cdot}238$

4. Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

a) $x + y = 40^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}492405$ *b)* $x - y = 16^0$, $\sin x \cos y = 0{\cdot}54$

c) $x + y = 50^0$, $\sin x \sin y = 0{\cdot}11162$ *d)* $x - y = 20^0$, $\cos x \cos y = 0{\cdot}38302$

Resultate.

1. *a)* $2 \sin(2x) \cos x$ $\qquad 2 \cos(2x) \sin x$
   b) $2 \cos(5x) \cos(2x)$ $\qquad -2 \sin(5x) \sin(2x)$
   c) $2 \sin(x + 2y) \cos y$
   d) $2 \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$

2. *a)* $x_1 = 48^0\,50'$ $\quad x_2 = y_1$ $\qquad$ *b)* $x_1 = 45^0$ $\quad x_2 = 60^0$
   $y_1 = 21^0\,10'$ $\quad y_2 = x_1$ $\qquad y_1 = 30^0$ $\quad y_2 = 45^0$

3. *a)* $x_1 = 80^0\,47'$ $\quad x_2 = 349^0\,13'$ $\qquad$ *b)* $x_1 = 58^0\,34'\,40''$ $\quad x_2 = 331^0\,25'\,20''$
   $y_1 = -10^0\,47'$ $\quad y_2 = -279^0\,13'$ $\qquad y_1 = 28^0\,34'\,40''$ $\quad y_2 = 301^0\,25'\,20''$
   c) $x_1 = 30^0\,54'$ $\quad x_2 = 349^0\,6'$ $\qquad$ *d)* $x_1 = 57^0\,54'$ $\quad x_2 = 219^0\,42'$
   $y_1 = 10^0\,54'$ $\quad y_2 = 329^0\,6'$ $\qquad y_1 = 39^0\,42'$ $\quad y_2 = -122^0\,6'$

4. *a)* $x_1 = 30^0$ $\quad x_2 = 100^0$ $\qquad$ *b)* $x_1 = 34^0\,46'\,28''$ $\quad x_2 = 71^0\,13'\,33''$
   $y_1 = 10^0$ $\quad y_2 = -60^0$ $\qquad y_1 = 18^0\,46'\,28''$ $\quad y_2 = 55^0\,13'\,33''$
   c) $x_1 = 40^0$ $\quad x_2 = 190^0$ $\qquad$ *d)* $x_1 = 60^0$ $\quad x_2 = 140^0$
   $y_1 = 10^0$ $\quad y_2 = -140^0$ $\qquad y_1 = 40^0$ $\quad y_2 = 120^0$

§ 38. Wir wollen noch einige der abgeleiteten Formeln benützen, um den Zusammenhang der für die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes aufgestellten Sätze darzulegen.

1. Der Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck lautet:

$$\sin \mathbf{A} : \sin \mathbf{B} = \mathbf{a} : \mathbf{b} \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{I})$$

folglich $(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = (a + b) : (a - b)$

oder $2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} : 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = (a + b) : (a - b)$.

Dividiert man in dieser Proportion die beiden ersten Glieder durch

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \, . \cos \frac{A-B}{2}$$

so erhält man:

$$\operatorname{tg} \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2} : \operatorname{tg} \frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) : (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

eine Proportion, in der wir den Tangentialsatz des schiefwinkligen Dreieckes erkennen.

Anmerkung. Der Zusammenhang der Proportionen I und II bleibt nach vorstehender Ableitung bestehen, auch wenn wir unter a, b, $\sphericalangle$ A und $\sphericalangle$ B nicht Dreiecksstücke verstehen. Wir können daher den allgemeinen Satz aufstellen:

Verhalten sich die sinus zweier Winkel wie zwei gegebene Größen, so verhält sich der tangens der halben Winkelsumme zum tangens der halben Winkeldifferenz wie die Summe jener Größen zur Differenz derselben.

Dieser Satz kann zur Berechnung zweier Winkel verwendet werden, wenn deren Summe (oder Differenz) und das Verhältnis ihrer sinus gegeben ist.

Beispiele.

Man bestimme x und y aus folgenden Gleichungen:

1. $x + y = 50^0$, $\sin x : \sin y = 207{\cdot}24 : 141{\cdot}76$
2. $x - y = 15^0$, $\sin x : \sin y = 695{\cdot}95 : 285{\cdot}95$
3. $x + y = 80^0$, $\sin x : \sin y = 5682 : 2931$
4. $x - y = 60^0$, $\sin x : \sin y = 8837 : 1857$
5. $x + y = 111^0$ *), $\cos x : \cos y = 7999 : 17651$
6. $x - y = 49^0$ *), $\cos x : \cos y = 521 : 986$
7. $x + y = 80^0$ **), $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 57415 : 27815$
8. $x - y = 10^0$, $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 5238 : 3688$
9. $x + y = 103^0\,46'$ ***), $\operatorname{cotg} x : \operatorname{cotg} y = 127 : 6382$
10. $x - y = 37^0\,56'$, $\operatorname{cotg} x : \operatorname{cotg} y = 2577 : 10821$

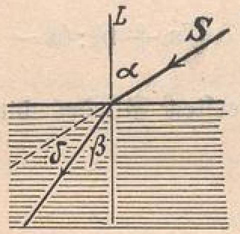

Fig. 99.

11. Auf eine Glasplatte (Fig. 99) vom Brechungsindex n fällt ein Lichtstrahl und erfährt bei der Brechung eine Ablenkung $\delta = \alpha - \beta$. Wie groß ist der Einfallswinkel α, wenn:

a) $n = 1{\cdot}53$, $\delta = 10^0$ *b)* $n = 1{\cdot}52$, $\delta = 15^0$

c) $n = 1{\cdot}52$, $\delta = 25^0$ *d)* $n = 1{\cdot}53$, $\delta = 15^0$ ist?

Brechungsgesetz: $\sin\alpha : \sin\beta = n : 1$

---

*) Aus $\cos x : \cos y = m : n$ ergibt sich $(\cos x + \cos y) : (\cos x - \cos y) = (m + n) : (m - n)$ und weiter:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{n-m}{n+m}$$

**) Aus $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = m : n$ folgt durch einfache Umformung $\sin(x + y) : \sin(x - y) = (m + n) : (m - n)$

***) Aus $\operatorname{cotg} x : \operatorname{cotg} y = m : n$ folgt: $\sin(x + y) : \sin(x - y) = (n + m) : (n - m)$

Resultate.

1. $x_1 = 30^0$ $x_2 = 210^0$
   $y_1 = 20^0$ $y_2 = -160^0$
2. $x_1 = 25^0$ $x_2 = 205^0$
   $y_1 = 10^0$ $y_2 = 190^0$
3. $x_1 = 55^0$ $x_2 = 235^0$
   $y_1 = 25^0$ $y_2 = -155^0$
4. $x_1 = 100^0$ $x_2 = 280^0$
   $y_1 = 40^0$ $y_2 = 220^0$
5. $x_1 = 70^0$ $x_2 = 250^0$
   $y_1 = 41^0$ $y_2 = -139^0$
6. $x_1 = 58^0\,36'\,4''$ $x_2 = 238^0\,36'\,4''$
   $y_1 = 9^0\,36'\,4''$ $y_2 = 189^0\,36'\,4''$
7. $x_1 = 50^0$ $x_2 = 120^0$
   $y_1 = 30^0$ $y_2 = -40^0$
8. $x_1 = x_2 = 50^0$
   $y_1 = y_2 = 40^0$
9. $x_1 = 86^0\,22'\,6''$ $x_2 = 107^0\,23'\,54''$
   $y_1 = 17^0\,23'\,54''$ $y_2 = -3^0\,37'\,54''$
10. $x = 62^0\,43'$
    $y = 24^0\,47'$
11. *a)* $27^0\,40'$ *b)* $40^0\,2'\,49''$ *c)* $59^0\,33'\,14''$ *d)* $39^0\,38'\,49''$

2. Im § 27 stellten wir die Formel auf:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Daraus ergibt sich:

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \qquad = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}{2bc} \qquad = \frac{(a+b-c).(a-b+c)}{2bc}$$

Setzt man nun, wie üblich: $a + b + c = 2s$,
folglich:
$$a + b - c = 2(s-c)$$
$$a - b + c = 2(s-b)$$
$$-a + b + c = 2(s-a)$$

und für $(1 \pm \cos A)$ die aus Formel VII und VIII (§ 33) resultierenden Werte, so erhält man:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s.2(s-a)}{2bc} \qquad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b)2.(s-c)}{2bc}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Diese Formeln, welche als Ergänzung der zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke dienenden Sätze aufzufassen sind, gestatten die logarithmische Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich die uns bereits bekannte Formel.

$$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Übungsbeispiele.

Zwei Kräfte P und Q wirken unter einem Winkel ω zusammen und ergeben eine Resultierende R.

Man berechne den Winkel ω für folgende Angaben:

a) P = 235 *kg*	*b)* P = 966 *kg*	*c)* P = 3 p
Q = 175 *kg*	Q = 738 *kg*	Q = 5 p
R = 300 *kg*	R = 1400 *kg*	R = 7 p

Resultate.

a) $87^{0}\ 06'\ 30''$ *b)* $70^{0}\ 14'$ *c)* $\omega = 60^{0}$

Die Snellius'sche (Pothenot'sche) Aufgabe.

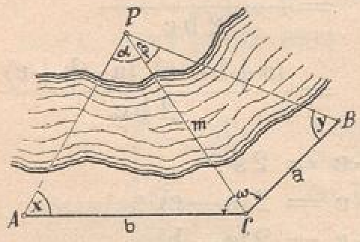

Fig. 100.

§ 39. In ebenem Gelände sind drei Punkte A, B und C (Fig. 100) festgelegt und hierauf folgende Stücke gemessen worden:

$$BC = a = 538{\cdot}5\ m$$
$$AC = b = 398{\cdot}8\ m$$
$$\sphericalangle\ ACB = \omega = 142^{0}\,30'$$

Die Entfernungen eines Punktes P von den Punkten A, B, C sind aus den von P aus gemessenen Winkeln:

$$APC = \alpha = 33^{0}\,21'$$
$$BPC = \beta = 38^{0}\,15'$$

zu berechnen. (Snellius 1617, Pothenot 1692.)

Lösung. Bezeichnet man PC mit m und die Winkel PAC mit x,
PBC mit y,

so erhält man zur Bestimmung von x und y:

$$\mathbf{x + y = 360^0 - (\omega + \alpha + \beta) \ldots . I}$$

und aus den Dreiecken ACP und BCP

$$\sin x : \sin \alpha = m : b \qquad \sin y : \sin \beta = m : a$$

oder $$\sin x = \frac{m \sin \alpha}{b} \qquad \sin y = \frac{m \sin \beta}{a}$$

folglich $$\sin x : \sin y = \frac{\sin \alpha}{b} : \frac{\sin \beta}{a} = \frac{a}{\sin \beta} : \frac{b}{\sin \alpha}$$

Setzt man $\frac{a}{\sin \beta} = p$ und $\frac{b}{\sin \alpha} = q$,

so erhält man $\sin x : \sin y = p : q$

somit nach § 38 $$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} : \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = (p-q) : (p+q)$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{p-q}{p+q} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} \ldots . (II)$$

In unserem Falle ist:

$p = 869{\cdot}82 \qquad q = 725{\cdot}417 \qquad \frac{x+y}{2} = 72^0\, 57'$

und aus Gleichung (II) . . . . $\frac{x-y}{2} = 16^0\, 26'\, 42''$

Durch Addition und Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\mathbf{\sphericalangle x = 89^0\, 23'\, 42''}$$
$$\mathbf{\sphericalangle y = 56^0\, 30'\, 18''}$$

Aus den Dreiecken ACP und BCP erhält man nun nach dem Sinussatze:

AP = 610 m **BP = 725·38** m **CP = 866·83** m

Anmerkung. Bei der Ausrechnung beachte man, daß

$$PA = q \sin u \qquad PB = p \sin v \qquad PC = q \sin x = p \sin y$$

ist, wobei $u = \sphericalangle ACP$ und $v = \sphericalangle BCP$ ist.

Übungsbeispiele.

Man löse die Aufgabe für folgende Angaben:

1. $\omega = 180^0$, $a = 1732{\cdot}4\ m$, $b = 875{\cdot}2\ m$, $\alpha = 37^0\, 15'$, $\beta = 41^0\, 23'$
2. $\omega = 180^0$, $a = 2325\ m$, $b = 1546\ m$, $\alpha = 32^0\, 25'$, $\beta = 51^0\, 47'$
3. $\omega = 180^0$, $a = 375{\cdot}8\ m$, $b = 480{\cdot}5\ m$, $\alpha = 29^0\, 35'$, $\beta = 40^0\, 19'$
4. $\omega = 160^0$, $a = 438\ m$, $b = 557\ m$, $\alpha = 42^0\, 20'$, $\beta = 37^0\, 10'$
5. $\omega = 145^0\, 17'$, $a = 1258\ m$, $b = 2754\ m$, $\alpha = 51^0\, 42'$, $\beta = 47^0\, 23'$
6. $\omega = 153^0\, 20'$, $a = 1138{\cdot}5\ m$, $b = 873{\cdot}5\ m$, $\alpha = 29^0\, 18'$, $\beta = 37^0\, 46'$

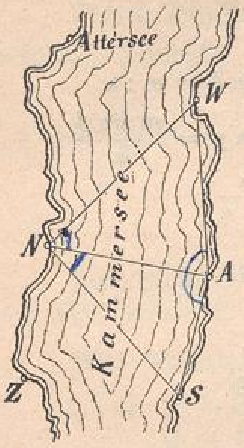

Fig. 101.

7. Am östlichen Ufer des Kammersees (Fig. 101) wurden drei Uferpunkte, bei Weyeregg (W), Alexenau (A) und See-Leithen (S) markiert, deren Entfernungen: $WA = 3000\,m$ und $AS = 1950\,m$ betrugen, während $\sphericalangle WAS = 163^0\,41'\,52''$ ermittelt wurde. Von dem am westlichen See-Ufer bei Nußdorf gelegenen Uferpunkte N wurden mittels Meßinstrumentes die Winkel: $WNA = 57^0\,28'\,10''$ und $\sphericalangle ANS = 35^0\,56'\,14''$ bestimmt.

Man berechne die Entfernungen NW, NA und NS.

8. Von einem beim Orte Attersee gelegenen Uferpunkte erscheinen die Strecken WA und AS unter den Winkeln $\alpha = 33^0\,50'\,31''$ und $\beta = 12^0\,50'\,19''$; von einem bei Zell (Z) markiertem Uferpunkte ergaben die Messungen: $\sphericalangle AZW = 30^0\,26'\,29''$, $\sphericalangle SZA = 35^0\,27'\,23''$. Man bestimme die Entfernungen der Uferpunkte Attersee und Zell von den Uferpunkten W, A und S.

Resultate.

1. $PA = 1380\,m$	2. $PA = 2849{\cdot}5\,m$	3. $PA = 880{\cdot}44\,m$
$PB = 2501{\cdot}2\,m$	$PB = 2923{\cdot}9\,m$	$PB = 525{\cdot}42\,m$
$PC = 1359{\cdot}7\,m$	$PC = 2167{\cdot}2\,m$	$PC = 560{\cdot}81\,m$
4. $PA = 822{\cdot}56\,m$	5. $PA = 1231{\cdot}3\,m$	6. $PA = 1744{\cdot}2\,m$
$PB = 703{\cdot}54\,m$	$PB = 3464\,m$	$PB = 1800{\cdot}5\,m$
$PC = 666{\cdot}45\,m$	$PC = 1706{\cdot}3\,m$	$PC = 1706{\cdot}5\,m$
7. $NW = 3412{\cdot}5\,m$	8. $AW = 2690\,m$	9. $ZW = 5358\,m$
$NA = 2685\,m$	$AA = 4833\,m$	$ZA = 3343\,m$
$NS = 3322{\cdot}5\,m$	$AS = 6340\,m$	$ZS = 2518\,m$

Funktionen negativer Winkel.

§ 40. Faßt man den Winkel als Maß der Drehung auf, welche man mit dem beweglichen Schenkel aus der Ruhelage OA vorgenommen hat, so kann man außer der Größe dieser Drehung auch noch den Richtungssinn derselben in Betracht ziehen. Bezeichnet man eine Drehung im verkehrten Sinne der Uhrzeigerbewegung als positiv (+) so wird man eine Drehung im entgegengesetzten Sinne als negativ (—) bezeichnen müssen, und man gelangt so zu dem Begriffe **positiver und negativer Winkel (Bögen).**

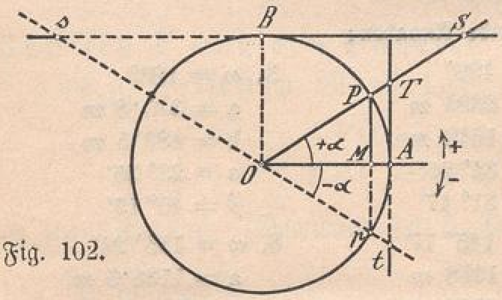

Fig. 102.