Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Funktionen negativer Winkel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

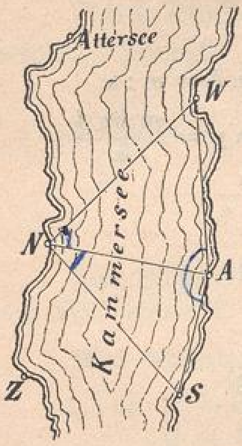

Fig. 101.

7. Am östlichen Ufer des Kammersees (Fig. 101) wurden drei Uferpunkte, bei Weyeregg (W), Alexenau (A) und See-Leithen (S) markiert, deren Entfernungen: $WA = 3000\,m$ und $AS = 1950\,m$ betrugen, während $\sphericalangle WAS = 163^0\,41'\,52''$ ermittelt wurde. Von dem am westlichen See-Ufer bei Nußdorf gelegenen Uferpunkte N wurden mittels Meßinstrumentes die Winkel: $WNA = 57^0\,28'\,10''$ und $\sphericalangle ANS = 35^0\,56'\,14''$ bestimmt.

Man berechne die Entfernungen NW, NA und NS.

8. Von einem beim Orte Attersee gelegenen Uferpunkte erscheinen die Strecken WA und AS unter den Winkeln $\alpha = 33^0\,50'\,31''$ und $\beta = 12^0\,50'\,19''$; von einem bei Zell (Z) markiertem Uferpunkte ergaben die Messungen: $\sphericalangle AZW = 30^0\,26'\,29''$, $\sphericalangle SZA = 35^0\,27'\,23''$. Man bestimme die Entfernungen der Uferpunkte Attersee und Zell von den Uferpunkten W, A und S.

Resultate.

1. $PA = 1380\,m$	2. $PA = 2849{\cdot}5\,m$	3. $PA = 880{\cdot}44\,m$
$PB = 2501{\cdot}2\,m$	$PB = 2923{\cdot}9\,m$	$PB = 525{\cdot}42\,m$
$PC = 1359{\cdot}7\,m$	$PC = 2167{\cdot}2\,m$	$PC = 560{\cdot}81\,m$
4. $PA = 822{\cdot}56\,m$	5. $PA = 1231{\cdot}3\,m$	6. $PA = 1744{\cdot}2\,m$
$PB = 703{\cdot}54\,m$	$PB = 3464\,m$	$PB = 1800{\cdot}5\,m$
$PC = 666{\cdot}45\,m$	$PC = 1706{\cdot}3\,m$	$PC = 1706{\cdot}5\,m$
7. $NW = 3412{\cdot}5\,m$	8. $AW = 2690\,m$	9. $ZW = 5358\,m$
$NA = 2685\,m$	$AA = 4833\,m$	$ZA = 3343\,m$
$NS = 3322{\cdot}5\,m$	$AS = 6340\,m$	$ZS = 2518\,m$

Funktionen negativer Winkel.

§ 40. Faßt man den Winkel als Maß der Drehung auf, welche man mit dem beweglichen Schenkel aus der Ruhelage OA vorgenommen hat, so kann man außer der Größe dieser Drehung auch noch den Richtungssinn derselben in Betracht ziehen. Bezeichnet man eine Drehung im verkehrten Sinne der Uhrzeigerbewegung als positiv (+) so wird man eine Drehung im entgegengesetzten Sinne als negativ (—) bezeichnen müssen, und man gelangt so zu dem Begriffe **positiver und negativer Winkel (Bögen).**

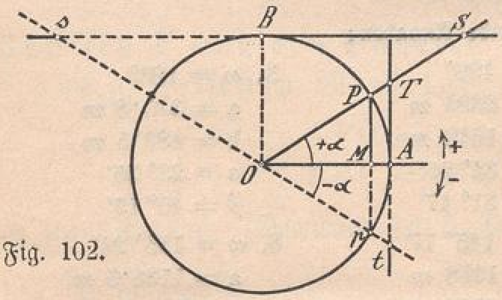

Fig. 102.

So ist z. B. in Fig. 102.... $\sphericalangle AOt = - \sphericalangle AOT$, und wenn wir letzteren mit $(+\alpha)$ bezeichnen, $\sphericalangle AOt = -\alpha$.

Aus der Fig. 102 ersieht man sofort, daß der bewegliche Schenkel des Winkels $(-\alpha)$ zusammenfällt mit dem beweglichen Schenkel des Winkels $+(360^0 - \alpha)$, daß also die beiden Winkel: $(-\alpha)$ und $(360 - \alpha)$ dieselben Funktionswerte besitzen müssen.

Es muß daher nach § 22

Funktion $(-\alpha)$ numerisch gleich derselben Funktion $(+\alpha)$ sein.

und für die einzelnen Funktionen gilt, wie man überdies aus der Figur ersieht:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(+\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= +\cos(+\alpha) \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}(+\alpha) \\ \operatorname{cotg}(-\alpha) &= -\operatorname{cotg}(+\alpha) \end{aligned}$$

Wir wollen das Auftreten eines negativen Winkels an einem Beispiele zeigen.

Löst man das Dreieck: $\mathbf{a = 35{\cdot}8}\ m$, $\mathbf{b = 48{\cdot}9}\ m$, $\sphericalangle \mathbf{C = 72^0\ 20'}$

mittels des Satzes: $(a - b) : (a + b) = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} : \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ auf,

so erhält man $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{-13{\cdot}1}{84{\cdot}7}\operatorname{tg} 53^0\ 50'$ *)

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = -0{\cdot}21158$$

D. h. $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$ wird negativ. Da nun $\frac{A-B}{2}$ numerisch nicht größer als 90^0 sein kann, (warum?), so kann es nur negativ sein; d. h. $A < B$. Daß dies wirklich der Fall ist, erhellt aus den Angaben, nach denen $a < b$ ist.

Die weitere Lösung ergibt:

$$\frac{A-B}{2} = -11^0\ 56'\ 47'' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

und $$\frac{A+B}{2} = \quad 53^0\ 50' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

daraus: $$\sphericalangle \mathbf{A = 41^0\ 53'\ 13''}$$
$$\sphericalangle \mathbf{B = 65^0\ 46'\ 47''}$$

und $$c = a\frac{\sin C}{\sin A} = \mathbf{51{\cdot}09}\ m$$

---

*) Vergleiche Notiz zu § 29.

Beispiele.

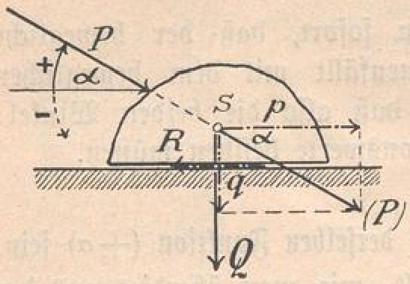

Fig. 103.

1. Wie groß muß in Fig. 103 der Winkel α sein, damit die Schubkomponente p gleich sei der Reibung $R = (Q + q)\,\varphi$. (Siehe Aufg. 8 auf S. 86.)

a) $P = 15\ kg$, $Q = 76\ kg$, $\varphi = 0{\cdot}2$

b) $P = 25\ kg$, $Q = 66\ kg$, $\varphi = 0{\cdot}4$

c) $P = 18\ kg$, $Q = 33{\cdot}5\ kg$, $\varphi = 0{\cdot}6$

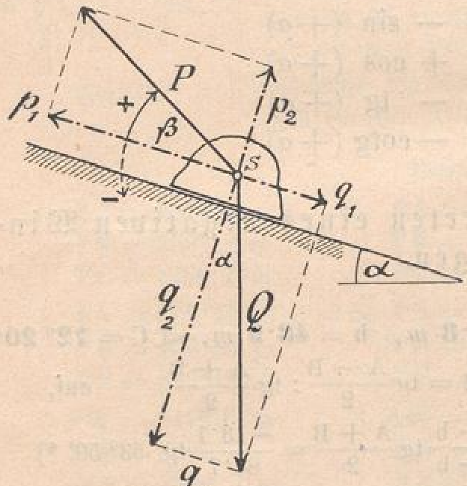

Fig. 104.

2. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 104) vom Neigungswinkel α liegt eine Last vom Gewichte Q. Eine Kraft P soll unter einem Winkel β derart angebracht werden, daß die aus den Komponenten p_1 und q_1 resultierende Schubkraft $\mathfrak{P} = p_1 - q_1$ gleich sei der Reibung $R = (q_2 - p_2)\,\varphi$. Wie groß muß β sein, wenn

a) $P = Q$, $\alpha = 30^0$, $\varphi = 0{\cdot}12$

b) $Q = 2P$, $\alpha = 20^0$, $\varphi = 0{\cdot}06$

c) $P = 2Q$, $\alpha = 40^0$, $\varphi = 0{\cdot}73$

Resultate.

1. *a)* $\alpha = -\ 4^0\,50'\,35''$ *b)* $\alpha = -10^0\,27'\,25''$ *c)* $\alpha = -14^0\,12'\,19''$ *)

2. *a)* $\beta = -46^0\,18'\,50''$ *b)* $\beta = -33^0\,52'\,35''$ *c)* $\beta = -24^0\,49'\,51''$

Funktionen der Kreisbögen.

§ 41. So wie wir bisher die Funktionslinien dem Winkel α zugeordnet haben, so können wir sie auch als zu dem Bogen $\lambda = \widehat{AP}$ (Fig. 105) gehörig betrachten, welcher Bogen ja gerade so viele Bogengrade besitzt, wie der Winkel α Winkelgrade hat.

*) Die negativen Werte von α zeigen an, daß die Kraft P nicht, wie in Fig. 103 angenommen, nach abwärts, sondern nach aufwärts gerichtet sein muß.