Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Funktionen und Längenmaß der Kreisbögen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Beispiele.

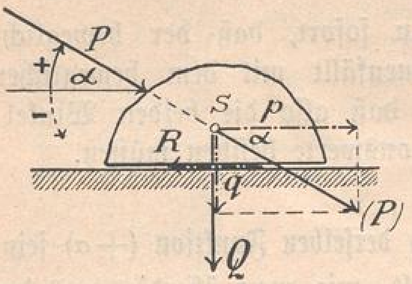

Fig. 103.

1. Wie groß muß in Fig. 103 der Winkel α sein, damit die Schubkomponente p gleich sei der Reibung $R = (Q + q)\,\varphi$. (Siehe Aufg. 8 auf S. 86.)

a) $P = 15\,kg$ *b)* $P = 25\,kg$
$Q = 76\,kg$ $Q = 66\,kg$
$\varphi = 0{\cdot}2$ $\varphi = 0{\cdot}4$

c) $P = 18\,kg$
$Q = 33{\cdot}5\,kg$
$\varphi = 0{\cdot}6$

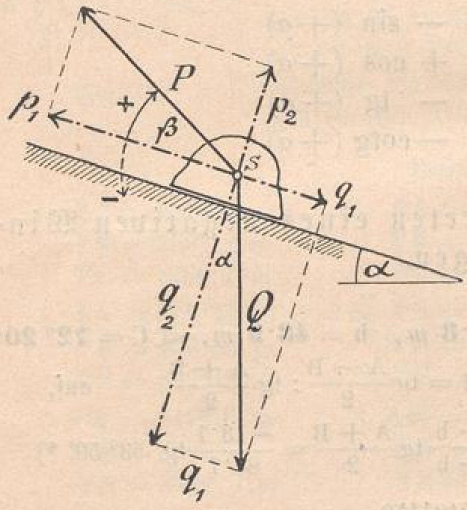

Fig. 104.

2. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 104) vom Neigungswinkel α liegt eine Last vom Gewichte Q. Eine Kraft P soll unter einem Winkel β derart angebracht werden, daß die aus den Komponenten p_1 und q_1 resultierende Schubkraft $\mathfrak{P} = p_1 - q_1$ gleich sei der Reibung $R = (q_2 - p_2)\,\varphi$. Wie groß muß β sein, wenn

a) $P = Q$ *b)* $Q = 2P$
$\alpha = 30^0$ $\alpha = 20^0$
$\varphi = 0{\cdot}12$ $\varphi = 0{\cdot}06$

c) $P = 2Q$
$\alpha = 40^0$
$\varphi = 0{\cdot}73$

Resultate.

1. *a)* $\alpha = -\ 4^0\,50'\,35''$ *b)* $\alpha = -10^0\,27'\,25''$ *c)* $\alpha = -14^0\,12'\,19''$ *)

2. *a)* $\beta = -46^0\,18'\,50''$ *b)* $\beta = -33^0\,52'\,35''$ *c)* $\beta = -24^0\,49'\,51''$

Funktionen der Kreisbögen.

§ 41. So wie wir bisher die Funktionslinien dem Winkel α zugeordnet haben, so können wir sie auch als zu dem Bogen $\lambda = \widehat{AP}$ (Fig. 105) gehörig betrachten, welcher Bogen ja gerade so viele Bogengrade besitzt, wie der Winkel α Winkelgrade hat.

---

*) Die negativen Werte von α zeigen an, daß die Kraft P nicht, wie in Fig. 103 angenommen, nach abwärts, sondern nach aufwärts gerichtet sein muß.

Wenn z. B. in Fig. 105, in welcher der Kreishalbmesser $r = 1$ ist, der Bogen λ 54 Bogengrade hat, so können wir, indem wir die Funktionswerte von 54^0 der Tabelle entnehmen, auch schreiben:

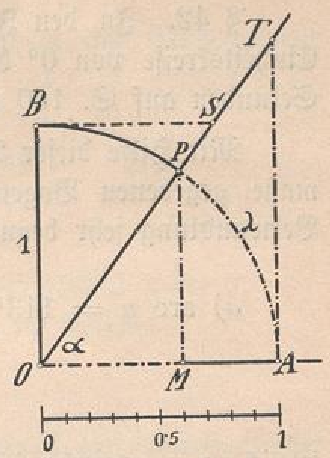

Fig. 105.

$\sin \lambda = 0 \cdot 80902 \qquad \text{tg}\, \lambda = 1 \cdot 37638$

$\cos \lambda = 0 \cdot 58779 \qquad \text{cotg}\, \lambda = 0 \cdot 72654$

Anstatt den Bogen λ in Graden zu messen, kann man ihn auch durch seine Länge angeben. Da der Halbmesser $r = 1$ ist, so entspricht

einem Bogen von 360^0	die Bogenlänge $\lambda =$	$2\pi = 6 \cdot 28318$
" " " 180^0	" " "	$\pi = 3 \cdot 14159$
" " " 90^0	" " "	$\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 57080$
" " " 45^0	" " "	$\frac{\pi}{4} = 0 \cdot 78540$
" " " 30^0	" " "	$\frac{\pi}{6} = 0 \cdot 52360$
" " " 1^0	" " "	$\frac{\pi}{180} = 0 \cdot 01745$
" " " α^0	" " "	$\alpha \frac{\pi}{180} = \alpha \times 0 \cdot 01746$

Für $\alpha = 54^0$ ergibt sich demnach . . . . . $\lambda = 0 \cdot 94248$

und wir können somit nach obigem auch schreiben

$\sin 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 80902 \qquad \text{tg}\, 0 \cdot 94248 = 1 \cdot 37638$

$\cos 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 58779 \qquad \text{cotg}\, 0 \cdot 94248 = 0 \cdot 72654$

In gleicher Weise sind folgende Gleichungen zu erklären:

$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \text{tg}\, \pi = 0 \qquad \text{cotg}\, \pi = \mp \infty$

$\sin \frac{\pi}{2} = +1 \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \text{tg} \frac{\pi}{4} = +1 \quad \text{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

§ 42. In den Jelinekschen Tafeln sind die Bogenlängen am Einheitskreise von 0^0 bis 180^0 auf S. 161—164, für Minuten und Sekunden auf S. 160 angegeben.

Mit Hilfe dieser Tafeln ist die Verwandlung eines im Gradmaße gegebenen Bogens in das Längenmaß und die umgekehrte Verwandlung sehr bequem auszuführen, wie folgende Beispiele zeigen.

a) arc $\alpha = 113^0 25' 37''$ ist im Längenmaße anzugeben.

	$113^0 \ldots 1 \cdot 97222$
	$25' \ldots \quad 727$
	$37'' \ldots \quad 18$
folglich arc α, angegeben im Längenmaß, ...	$\lambda = 1 \cdot 97967$

b) Ein nach Längenmaß bestimmter Bogen $\lambda = 0 \cdot 53786$ ist im Gradmaß anzugeben.

	0·53786		
Tafel	0·52360	30^0	
Rest	0·01426		
Tafel	0·01425	$49'$	
Rest	0·00001	$3''$	$\alpha = 30^0\, 49'\, 3''$

Übungsbeispiele.

Man gebe folgende Kreisbögen im Längenmaße an:

$\alpha = 49^0\, 25'$ $\quad \beta = 73^0\, 12'$ $\quad \gamma = 137^0$ $\quad \delta = 235^0\, 27'$

$\varphi = 23^0\, 12'\, 40''$ $\quad \psi = 82^0\, 44'\, 35''$ $\quad \omega = 125^0\, 20'\, 49''$ $\quad \lambda = 187^0\, 6'\, 36''$

Man verwandle folgende nach Längenmaß gegebene Bögen in Gradmaß.

$a = 0 \cdot 40870$ $\quad b = 1 \cdot 44513$ $\quad c = 2 \cdot 18166$ $\quad d = 3 \cdot 18203$

$m = 1 \cdot 03664$ $\quad n = 1 \cdot 23033$ $\quad p = 2 \cdot 27249$ $\quad l = 4 \cdot 28860$

Resultate.

$\alpha = 0 \cdot 86248$ $\quad \beta = 1 \cdot 27758$ $\quad \gamma = 2 \cdot 39110$ $\quad \delta = 4 \cdot 10937$

$\varphi = 0 \cdot 40511$ $\quad \psi = 1 \cdot 44414$ $\quad \omega = 2 \cdot 18772$ $\quad \lambda = 3 \cdot 26569$

$\mathbf{a} = 23^0\, 25'$ $\quad \mathbf{b} = 82^0\, 48'$ $\quad \mathbf{c} = 125^0$ $\quad \mathbf{d} = 182^0\, 19'$

$\mathbf{m} = 59^0\, 23'\, 44''$ $\quad \mathbf{n} = 70^0\, 29'\, 34''$ $\quad \mathbf{p} = 130^0\, 12'\, 15''$ $\quad \mathbf{l} = 245^0\, 43'\, 7''$

Hat man die Länge L eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel α zu berechnen, so bestimmt man zunächst die dem Winkel α entsprechende Bogenlänge λ am Einheitskreise und findet dann L nach der Formel

$$L = \lambda r. \quad *)$$

z. B. $r = 45 \cdot 5\,cm$ $\quad \alpha = 125^0\ 40'$ $\quad L = ?$

$125^0 \ldots\ldots 2 \cdot 18166$

$40' \ldots \quad 1164$

$\lambda = 2 \cdot 19330$ $\qquad L = 2 \cdot 19330 \times 45 \cdot 5$

$L = 99 \cdot 795\,cm$

Übungsbeispiele.

Es ist die wirkliche Länge der durch ihr Gradmaß und ihren Halbmesser bestimmten Bögen α, γ, β, δ zu berechnen:

1. $\alpha = 67^0\ 30'$, $r = 35\,cm$
2. $\beta = 35^0\ 45'$, $r = 37 \cdot 25\,m$
3. $\gamma = 63^0\ 10'\ 20''$, $r = 225 \cdot 5\,cm$
4. $\delta = 118^0\ 47'$, $r = 4 \cdot 568\,m$

5. Wie groß ist die Entfernung zweier Orte des Äquators (Ostküste Afrikas und Westküste Borneos), deren geographische Längen $l_1 = 60^0\ 2'\ 15''$ $l_2 = 126^0\ 14'\ 25''$ sind? (Der Äquatorhalbmesser $R = 859 \cdot 43$ Meilen.)

6. Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen zugehöriger Bogen in einem Kreise von Halbmesser $r = 35 \cdot 8\,cm$ ($25\,m$) [$34 \cdot 75\,m$] die Länge $L = 45\,cm$ ($63\,m$) $72 \cdot 25\,m$] besitzt?

7. Wie groß ist der Radius eines Kreises, in welchem der zum Zentriwinkel $\alpha = 35^0\ 47'$ ($37^0\ 45'$) [$174^0\ 35'$] gehörige Bogen die Länge $L = 32 \cdot 755\,m$ ($50\,m$) [$1 \cdot 765\,m$] besitzt?

8. Zwei in demselben Meridiane gelegene Orte A und B von gleicher Meereshöhe, deren Entfernung $l = 250 \cdot 629\,km$ [$35 \cdot 1351$ Meilen] beträgt, haben die Polhöhen $\varphi = 51^0\ 25'\ 27''$ und $\psi = 49^0\ 10'\ 15''$ [$\varphi = 39^0\ 38'\ 23''$ und $\psi = 37^0\ 17'\ 38''$]. Wie groß ergibt sich hieraus der Erdhalbmesser?

Resultate.

1. $41 \cdot 2335\,cm$	5. $993 \cdot 05$ Meilen.		
2. $23 \cdot 2425\,m$	6. $72^0\ 1'\ 12''$	($144^0\ 23'\ 9''$)	[$119^0\ 7'\ 33''$]
3. $248 \cdot 63\,cm$	7. $52 \cdot 4466\,m$	($75 \cdot 889\,m$)	[$0 \cdot 57925\,m$]
4. $9 \cdot 4702\,m$	8. $6372 \cdot 464\,km$	[858 Meilen].	

---

*) Es ist $\quad L = \frac{\pi\, r}{180} \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r = \lambda\, r$

§ 43. Hat man irgend eine Funktion eines nach § 41 im Längenmaße gegebenen Bogens zu bestimmen, so ermittle man zunächst das Gradmaß desselben und suche dann in der Tafel den zugehörigen Funktionswert.

z. B. Man bestimme cotg 2·35807.

Der Bogen 2·35807 beträgt im Gradmaße 135° 6′ 26″
daher cotg 2·35807 = — 1·00375

Übungsbeispiele.

Man bestimme:

sin 0·61669	cos 1·52717	tg 2·08858	cotg 3·61574
sin 2·53876	cos 0·95372	tg 4·50830	cotg 1·23854

Resultate.

+ 0·57833	+ 0·04362	— 1·75556	+ 1·94858
+ 0·56698	+ 0·57865	+ 4·83142	+ 0·34505

Die zyklometrischen Funktionen.

§ 44. Besitzt der sinus eines nach Längenmaß anzugebenden Bogens λ den Wert a, ist also $\sin\lambda = a$, so sagt man umgekehrt: „λ ist der arcus, dessen sinus $= a$ ist",

oder kürzer: $\lambda = \operatorname{arc}\sin a$.

Ebenso sind die Ausdrücke $\lambda = \operatorname{arc}\operatorname{tg} b$,
$\lambda = \operatorname{arc}\cos c$,
$\lambda = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} d$ zu verstehen.

Einen Ausdruck von der vorstehenden Form nennt man eine zyklometrische Funktion der darin vorkommenden trigonometrischen Zahl.

Hat man z. B. $\lambda = \operatorname{arc}\sin 0{\cdot}53678$ zu bestimmen, so suche man zunächst den zu dem angegebenen sinus gehörigen Bogen im Gradmaße und verwandle ihn sodann in Längenmaß.

$$\sin\lambda = 0{\cdot}53678 \ldots \lambda = (32^0\,27'\,53'') = 0{\cdot}56662$$

Übungsbeispiele.

Man bestimme folgende Bögen nach Längenmaß:

$\alpha = \operatorname{arc}\sin 0{\cdot}66913$	$\beta = \operatorname{arc}\cos 0{\cdot}59716$	$\gamma = \operatorname{arc}\operatorname{tg} 0{\cdot}20648$
$\delta = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} 0{\cdot}24933$	$\omega = \operatorname{arc}\operatorname{tg} (-4{\cdot}9894)$	$\varphi = \operatorname{arc}\cos (-0{\cdot}32597)$