Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Hartl, Hans

Wien [u.a.], 1906

Anhang.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76733

Anhang.

I. Es ist selbstverständlich, daß eine Ermittelung der Funktionswerte durch Abmessungen an einer Figur nicht befriedigen kann und daß man deshalb ein Verfahren suchen mußte, die gewünschten Werte auf Grund einer mit beliebiger Genauigkeit durchzuführenden Rechnung zu erhalten. Ein solches Verfahren, um beispielsweise den sinus verschiedener Winkel zu berechnen, ergibt sich aus den planimetrischen Formeln zur Berechnung der Seiten regulärer Polygone aus dem Radius des umschriebenen Kreises. Mit Hilfe der Transformationsformel:

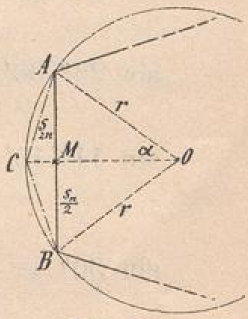

Fig. 106.

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

welche aus dem Ausdrucke für die Seite s_n (AB in Fig. 106) des regulären **n** ecks den Ausdruck für die Seite s_{2n} (AC) des regulären **2n** ecks ergibt, erhalten wir, wenn wir vom regulären Sechsecke ausgehen:

$$s_6 = r$$

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$s_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$s_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

u. s. f.

Versteht man nun in Figur 106 unter $AB = s_n$ die Seite des regulären n ecks, so ist $\alpha = \frac{360^0}{2n}$

und $\sin\alpha = \frac{\frac{s}{2}}{r}$, somit nach obigen Formeln,

wenn $n = 6$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ .... $= 0{\cdot}50000$

$n = 12$, $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .... $= 0{\cdot}25882$

$$n = 24, \quad \sin 7^0\, 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}13053$$

$$n = 48, \quad \sin 3^0\, 45' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \;. = 0{\cdot}06540$$

u. s. f.

Geht man vom regulären Vierecke und Fünfecke aus, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}70711$$

$$\sin 22^0\, 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}38268$$

$$\sin 11^0\, 15' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}19509$$

u. s. f.

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}58779$$

$$\sin 18^0 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{\cdot}30902$$

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \;\ldots\ldots = 0{\cdot}15643$$

u. s. f.

Ebenso kann man mittels der planimetrischen Formeln für die Seiten der dem Kreise umschriebenen Polygone die Werte für den tangens der betreffenden Winkel ermitteln.

Mit Hilfe der in § 18 und §§ 33, 34, 35 angegebenen Formeln lassen sich aus den schon berechneten Funktionen die übrigen Funktionen derselben Winkel und auch die Funktionen jener Winkel berechnen, welche sich durch Addition oder Subtraktion zweier bereits aufgelöster Winkel ergeben.

Auf diesem mühevollen Wege geschah in der Tat die erste Ausrechnung der Funktionen, während man heute imstande ist, mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik die Funktionswerte weit rascher und bequemer zu ermitteln.

II. Bei dem in §§ 7, 8, 10, 11 angegebenen Korrektionsverfahren ist vorausgesetzt, daß, wenn der Winkel um gleiche Teile springt, auch der betreffende Tabellenwert gleiche Veränderungen erfährt, daß also der Winkel und der Tabellenwert sich proportional verändern. Diese Voraussetzung ist tatsächlich nicht richtig, kann jedoch innerhalb der in der Tafel genommenen kleinen Intervalle als zutreffend angesehen werden.

III. Aus der Tabelle der Funktionen entnehmen wir:

$\sin 0^0 10' = 0 \cdot 00291$,*) daher $\log\sin 0^0 10' = 0 \cdot 46373 - 3$

$\sin 3^0 30' = 0 \cdot 06105$ „ $\log\sin 3^0 30' = 0 \cdot 78568 - 2$

$\sin 40^0 20' = 0 \cdot 64723$ „ $\log\sin 40^0 20' = 0 \cdot 81106 - 1$

u. s. f.

Um nun nicht die negative Charakteristik für jeden Logarithmus anschreiben zu müssen, schreibt man

statt $0 \cdot 46373 - 3 \ldots\ldots\; 7 \cdot 46373 - 10$

„ $0 \cdot 78568 - 2 \ldots\ldots\; 8 \cdot 78568 - 10$

„ $0 \cdot 81106 - 1 \ldots\ldots\; 9 \cdot 81106 - 10$ **)

und läßt, um an Platz zu ersparen, in der Tabelle die Zahl -10 weg, die der Rechner selbst anzufügen hat.

IV. Bei Ableitung der Gleichungen

(I) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

und (II) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

haben wir (§ 33) durch die Figur 95, auf welcher die Ableitung beruht, die Voraussetzung gemacht, daß $(\alpha + \beta) < 90^0$ sei. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß der Satz auch richtig bleibt, wenn α und β beliebig groß sind.

1. $\sphericalangle\, \alpha$ und $\sphericalangle\, \beta$ seien **Spitzwinkel**, aber $\alpha + \beta > 90^0$.

Setzt man (1) $\sphericalangle\, x = 90^0 - \alpha$

(2) $\sphericalangle\, y = 90^0 - \beta$

---

*) Genauer: $0 \cdot 0029089$.

**) In den Schlömilch'schen Tafeln steht auch:

statt $0 \cdot 53493 \ldots\ldots\; 10 \cdot 53493\ (-10)$

$2 \cdot 33215 \ldots\ldots\; 12 \cdot 33215\ (-10)$.

so ist $x + y = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, folglich,
weil $(\alpha + \beta) > 90^\circ$ vorausgesetzt wird,
$(x + y) < 90^\circ$,
daher nach § 33... $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2)

$$\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$$

$$\mathbf{sin}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta$$

2. **Es seien $\sphericalangle\,\alpha$ und $\sphericalangle\,\beta$ stumpfe Winkel.**

Setzt man (1) $\sphericalangle\,\alpha = 90^\circ + x$
(2) $\sphericalangle\,\beta = 90^\circ + y$, wobei $\sphericalangle\,x$ und $\sphericalangle\,y$ der Voraussetzung gemäß spitze Winkel sein müssen, so ist:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[180^\circ + (x + y)] = -\sin(x + y)$$

$$(3)\ \sin(\alpha + \beta) = -\sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Nun ist aber nach § 22 in Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2)

$$\cos\alpha = -\sin x \qquad \sin\alpha = +\cos x$$

$$\cos\beta = -\sin y \qquad \sin\beta = +\cos y$$

Substituiert man dies in die Gleichung (3), so erhält man:

$$\mathbf{sin}\,(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{sin}\,\beta$$

3. Nach dem soeben erhaltenen Resultate wird die Richtigkeit der vorstehenden Ableitung nicht gestört, wenn wir unter x und y selbst stumpfe Winkel verstehen, wenn also $\alpha > 180^\circ$ und $\beta > 180^\circ$ ist u. s. f.

In derselben Weise ist die allgemeine Giltigkeit der Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ nachzuweisen.

Alle übrigen Formeln für die Funktionen der Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ und der Winkeldifferenz $(\alpha - \beta)$ wurden aus den obigen Formeln (I) und (II) abgeleitet, weshalb die Erweiterung der Giltigkeitsbedingungen dieser Formeln auf jene abgeleiteten Formeln übergeht.