Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Das rechtwinklige Dreieck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Haben zwei oder mehrere rechtwinklige Dreiecke einen Spitzwinkel gleich, so sind sie ähnlich.

Das Längenverhältnis zweier Seiten des einen Dreieckes ist dann genau gleich dem Längenverhältnis der beiden entsprechenden (homologen) Seiten in jedem der ähnlichen Dreiecke.

Ist z. B. in den rechtwinkligen Dreiecken A B C und M N P (Fig. 1), in denen üblicher Weise die Winkel mit A, B, C, M, N, P, die Seiten mit a, b, c, m, n, p bezeichnet sind,

$$\sphericalangle A = \sphericalangle M = 32^\circ,$$

so ist $\triangle ABC \sim \triangle MNP$

und es muß deshalb

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{p} \qquad \frac{b}{c} = \frac{n}{p}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \frac{b}{a} = \frac{n}{m}$$ sein.

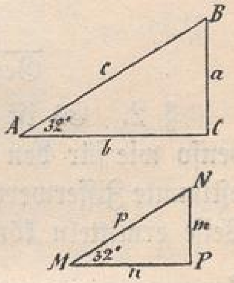

Fig. 1.

Würde man die in Fig. 1 dargestellten Dreiecke in zehnfacher Größe verzeichnen und sodann ihre Seiten an einem genauen Millimeterstabe abmessen, so würde man folgende Maße erhalten:

$$a = 132{\cdot}5\ mm \qquad m = 84{\cdot}8\ mm$$
$$b = 212\ mm \qquad n = 135{\cdot}7\ mm$$
$$c = 250\ mm \qquad p = 160\ mm$$

Durch Ausführung der entsprechenden Divisionen ergibt sich:

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{p} = 0{\cdot}530 \qquad \frac{b}{c} = \frac{n}{p} = 0{\cdot}848$$

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{n} = 0{\cdot}625 \qquad \frac{b}{a} = \frac{n}{m} = 1{\cdot}600$$

Das Ergebnis dieser Divisionen läßt sich folgendermaßen aussprechen:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem der eine Spitzwinkel 32° beträgt, ist das Verhältnis:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} &= 0{\cdot}530 \\
\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} &= 0{\cdot}848 \\
\frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} &= 0{\cdot}625 \\
\frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} &= 1{\cdot}600
\end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

§ 2. Es ist nun einleuchtend, daß diese vier Seitenverhältnisse ebenso wie für den Winkel 32° auch für jeden andern Spitzwinkel ganz bestimmte Zifferwerte besitzen müssen, die wir annähernd etwa in folgender Weise ermitteln könnten.

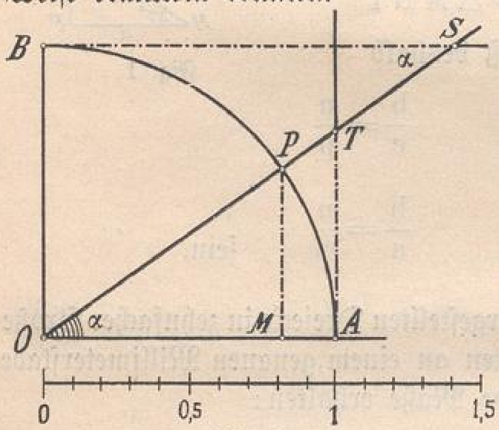

Fig. 2.

Wir schlagen von O aus (Fig. 2) einen Kreis mit dem Radius O A = r und errichten in den Punkten A und B die zu einander senkrechten Tangenten A T und BS.

Um nun für einen bestimmten Winkel α die oben genannten Verhältnisse zu ermitteln, tragen wir diesen Winkel von O A aus auf.

$$\sphericalangle AOS = \sphericalangle \alpha$$

Es ist dann auch als Wechselwinkel

$$\sphericalangle BSO = \sphericalangle \alpha$$

Verzeichnen wir nun die Gerade $PM \perp OA$, so ergibt sich für den Winkel α

aus dem $\triangle OPM$ . . . $\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PM}{r}$

" " $\triangle OPM$ . . . $\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM}{r}$

---

*) Die Bezeichnungen „gegenüberliegend" und „anliegend" beziehen sich auf die Lage der betreffenden Kathete gegen den Winkel 32°.

$$\text{aus dem } \triangle OAT \ldots \frac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{r}$$

$$\text{„ „ } \triangle OBS \ldots \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}} = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{r}$$

Zeichnet man die Fig. 2 derart vergrößert, daß der Halbmesser des Kreises 1 m mißt, so wird, wenn der Winkel α beispielsweise 35° beträgt, eine genaue Abmessung ergeben:

$PM = 0{\cdot}573\,m \quad OM = 0{\cdot}819\,m \quad AT = 0{\cdot}700\,m \quad BS = 1{\cdot}428\,m$

Die oben genannten Verhältnisse nehmen daher für den Winkel 35° folgende Werte an:

$$\frac{PM}{r} = \frac{0{\cdot}573\,m}{1\,m} = 0{\cdot}573 \qquad \frac{OM}{r} = \frac{0{\cdot}819\,m}{1\,m} = 0{\cdot}819$$

$$\frac{AT}{r} = \frac{0{\cdot}700\,m}{1\,m} = 0{\cdot}700 \qquad \frac{BS}{r} = \frac{1{\cdot}428\,m}{1\,m} = 1{\cdot}428.$$

Ist also in Fig. 2 der Kreishalbmesser = 1, so geben die Maßzahlen der Strecken PM, OM, AT und BS unmittelbar den Wert jener vier Verhältnisse an.

§ 3. In solcher Weise können wir uns die genannten vier Verhältniswerte für alle Spitzwinkel von 0°—90° ermitteln und zu einer Tabelle zusammenstellen. Dabei empfiehlt es sich, statt der bisher gebrauchten umständlichen Bezeichnungen kürzere Benennungen einzuführen. Zu diesem Zwecke nennt man das Verhältnis:

$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$	den **sinus**	**(sin.)**	jenes Winkels, auf welchen sich die Bezeichnungen „gegenüberliegend“ u. „anliegend“ beziehen.
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypothenuse}}$	„ **cosinus**	**(cos.)**	
$\dfrac{\text{Gegenüberliegende Kathete}}{\text{Anliegende Kathete}}$	„ **tangens**	**(tg.)**	
$\dfrac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenüberliegende Kathete}}$	„ **cotangens**	**(cotg.)**	

Unter Einführung dieser kürzeren Bezeichnung lassen sich die im § 2 erhaltenen Verhältniswerte folgendermaßen anschreiben:

0·573 = sinus des Winkels 35° oder kürzer: 0·573 = sin 35°
0·819 = cosinus des Winkels 35° " " 0·819 = cos 35°
0·700 = tangens des Winkels 35° " " 0·700 = tg 35°
1·428 = cotangens des Winkels 35° " " 1·428 = cotg 35°

In derselben Weise gibt die am Schlusse dieser Schrift stehende Tabelle die Werte jener vier Seitenverhältnisse, die wir die **„winkelmessenden Verhältnisse"** oder die **„Winkelfunktionen"** (auch kurzweg „Funktionen") nennen wollen, für alle Spitzwinkel von 0°—90° in Sprüngen von 30 zu 30 Minuten an.

Aus dieser Tabelle entnehmen wir unter Beachtung der oben stehenden Überschrift für die links angegebenen Winkel z. B.

$\sin 38^\circ = 0{\cdot}6157 \qquad \cos 38^\circ = 0{\cdot}7880$

$\operatorname{tg} 38^\circ = 0{\cdot}7813 \qquad \operatorname{cotg} 38^\circ = 1{\cdot}2799$

D. h. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine Spitzwinkel 38° beträgt, so ist das Verhältnis der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse = 0·6157, das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse = 0·7880, das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete = 0·7813 und das Verhältnis der anliegenden zur gegenüberliegenden Kathete = 1·2799.

Anmerkung: Sowohl der sinus als auch der cosinus kann nie größer als 1 sein. Dagegen können tangens und cotangens jeden beliebigen Wert annehmen.

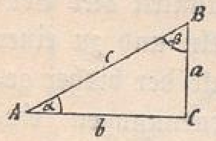

Fig. 3.

§ 4. Fassen wir beide Spitzwinkel α und β (Fig. 3) eines rechtwinkligen Dreieckes ins Auge, so finden wir, daß jede Kathete, welche dem einen Winkel gegenüberliegt, dem zweiten Winkel anliegt, und umgekehrt. So ist z. B.

a dem $\sphericalangle\ \alpha$ gegenüberliegend, dem $\sphericalangle\ \beta$ anliegend,
b dem $\sphericalangle\ \beta$ gegenüberliegend, dem $\sphericalangle\ \alpha$ anliegend.

Deshalb ist nach den in § 3 gegebenen Erklärungen

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ und zugleich $\frac{a}{c} = \cos\beta$ daher $\sin\alpha = \cos\beta$

$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$ " " $\frac{a}{b} = \operatorname{cotg}\beta$ " $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$

D. h. 1. **Der sinus eines Winkels gibt zugleich den cosinus seines Komplementswinkels*) an.**

*) Unter Komplementswinkel ist der Ergänzungswinkel zu 90° zu verstehen. So ist z. B. der Komplementswinkel von 25°30′ gleich 64°30′.

2. **Der cosinus eines Winkels gibt zugleich den sinus seines Komplementswinkels an.**

3. **Der tangens eines Winkels gibt zugleich den cotangens seines Komplementswinkels an.**

4. **Der cotangens eines Winkels gibt zugleich den tangens seines Komplementswinkels an.**

In unserer Tabelle (S. 42—45) ist für jeden linksstehenden (schwarzgedruckten) Winkel in derselben Zeile am rechten Rande der zugehörige Komplementswinkel angegeben, und man erkennt leicht, daß nach vorstehenden Sätzen jeder Tabellen-Wert zweierlei Bedeutung hat. Er gibt

1. die **oben** angegebene Funktion des **linksstehenden** Winkels, und
2. die **unten** angegebene Funktion der **rechtsstehenden** Winkels an.

So ist z. B. (S. 42, 43.)

$0{\cdot}2756 = \sin 16^0 = \cos 74^0$ $\qquad 0{\cdot}8616 = \cos 30^0 30' = \sin 59^0 30'$

$0{\cdot}6249 = \mathrm{tg}\, 32^0 = \mathrm{cotg}\, 58^0$ $\qquad 1{\cdot}3514 = \mathrm{cotg}\, 36^0 30' = \mathrm{tg}\, 53^0 30'$

Daraus ist zu ersehen, daß eigentlich die Tabellen auf S. 44 und 45 überflüssig sind, da die Winkel von 45⁰—90⁰ schon auf den Seiten 42 und 43, nämlich rechts zu finden sind. Für diese rot gedruckten Winkel gelten dann die unten angegebenen. gleichfalls rotgedruckten Funktionsbezeichnungen.

Für den Anfänger wird es sich jedoch empfehlen, die ganze Tabelle (S. 42 bis 45) zu benützen und hiebei nur die obenstehenden Funktionsbezeichnungen und die dazugehörigen linksstehenden Winkel in Betracht zu ziehen, also das Rotgedruckte vorläufig nicht zu beachten.

Um sich mit der Tabelle vertraut zu machen, löse man folgende Übungsbeispiele.

1. Man bestimme mittels der Tabelle:

$\sin 37^0$	$\sin 42^0$	$\sin 59^0$	$\sin 83^0$
$\sin 10^0 30'$	$\sin 51^1/_2{}^0$	$\sin 70^0 30'$	$\sin 25^1/_2{}^0$
$\mathrm{tg}\, 18^0$	$\mathrm{tg}\, 65^0$	$\mathrm{tg}\, 73^0$	$\mathrm{tg}\, 58^0$
$\mathrm{tg}\, 5^0 30'$	$\mathrm{tg}\, 48^1/_2{}^0$	$\mathrm{tg}\, 61^0 30'$	$\mathrm{tg}\, 75^1/_2{}^0$
$\cos 13^0$	$\cos 29^0$	$\cos 55^0$	$\cos 73^0$
$\cos 24^0 30'$	$\cos 82^0 30'$	$\cos 19^1/_2{}^0$	$\cos 64^1/_2{}^0$
$\mathrm{cotg}\, 32^0$	$\mathrm{cotg}\, 67^0$	$\mathrm{cotg}\, 17^0$	$\mathrm{cotg}\, 46^0$
$\mathrm{cotg}\, 4^0 30'$	$\mathrm{cotg}\, 37^0 30'$	$\mathrm{cotg}\, 16^1/_2{}^0$	$\mathrm{cotg}\, 74^1/_2{}^0$

2. Man gebe die durch ihre Funktionen bestimmten Winkel A, B . . x, y . . im Winkelmaße (in Graden und Minuten) an.

sin A = 0·1908	sin B = 0·6691	sin C = 0·9613
tg x = 0·3839	tg y = 1·0724	tg z = 2·6051
sin u = 0·4147	sin v = 0·7254	sin w = 0·9914
tg m = 0·0612	tg n = 0·4142	tg p = 4·5107
cos a = 0·7986	cos b = 0·9782	cos c = 0·4695
cotg α = 6·3138	cotg β = 1·4282	cotg γ = 0·3443
cos M = 0·7254	cos N = 0·3007	cos P = 0·9833
cotg X = 12·706	cotg Y = 3·6059	cotg Z = 0·7673

Resultate zu 2.

$\sphericalangle$A = 11°	$\sphericalangle$B = 42°	$\sphericalangle$C = 74°
$\sphericalangle$x = 21°	$\sphericalangle$y = 47°	$\sphericalangle$z = 69°
$\sphericalangle$u = 24° 30′	$\sphericalangle$v = 46° 30′	$\sphericalangle$w = 82° 30′
$\sphericalangle$m = 3° 30′	$\sphericalangle$n = 22° 30′	$\sphericalangle$p = 77° 30′
$\sphericalangle$a = 37°	$\sphericalangle$b = 12°	$\sphericalangle$c = 62°
$\sphericalangle\alpha$ = 9°	$\sphericalangle\beta$ = 35°	$\sphericalangle\gamma$ = 71°
$\sphericalangle$M = 43° 30′	$\sphericalangle$N = 72° 30′	$\sphericalangle$P = 10° 30′
$\sphericalangle$X = 4° 30′	$\sphericalangle$Y = 15°30′	$\sphericalangle$Z = 52° 30′

Korrektur der Winkelfunktionen bei Berücksichtigung einzelner Minuten.

§ 5. Ist ein Winkel bis auf einzelne Minuten gegeben, so hat man, um seine Funktionen zu bestimmen, so wie in den folgenden Beispielen vorzugehen.

1. Beispiel. **sin 39° 17′ ist zu bestimmen.**

Nach der Tabelle ist . . . sin 39° = 0·6293

Die neben dem sinus von 39° und 39° 30′ unter der Überschrift Korrektur für 1′ stehende Zahl 2·3 bedeutet: Wenn der Winkel 39° um je 1′ wächst, so wächst sein sinus um je 2·3 Einheiten der letzten Dezimalstelle. Da nun der gegebene Winkel um 17′ größer ist als 39°, so ist der sin 39° (0·6293) noch um 17 × 2·3 = 39·1 Einheiten der letzten Dezimalstelle zu vergrößern.

Daher: sin 39° = 0·6293
Korrektur für 17′ . . 39·1
sin 39° 17′ = 0·63321

2. Beispiel. **tg 70° 42′ ist zu bestimmen.**

$$\begin{array}{rr} \text{Die Tabelle gibt an . . . tg } 70^\circ\ 30' = & 2{\cdot}8239 \\ 26{\cdot}8 \times 12 = \text{Korrektur für } 12' \text{ . . . .} & 321{\cdot}6 \\ \textbf{tg } \mathbf{70^\circ\ 42'} = & \mathbf{2{\cdot}85606} \end{array}$$

In derselben Weise ist auch die Korrektur für den cosinus oder cotangens eines Winkels zu berechnen. Doch ist die Korrektur in diesen Fällen zu *subtrahieren*, da cosinus und cotangens mit wachsendem Winkel abnehmen, wie ein Blick auf die Tabelle zeigt.

3. Beispiel. **cos 24° 39′ = ?**

$$\begin{array}{lrl} \text{Tabelle ...} & \cos 24^\circ 30' = & 0{\cdot}9100 \\ 1{\cdot}2 \times 9 = & \text{Korr. für } 9' = & -\ 10{\cdot}8 \\ & \mathbf{\cos 24^\circ 39'} = & 0{\cdot}90892 \end{array}$$

4. Beispiel. **cotg 16° 22′ = ?**

$$\begin{array}{lrl} \text{Tabelle .....} & \text{cotg } 16^\circ = & 3{\cdot}4874 \\ 37{\cdot}2 \times 22 = & \text{Korr. für } 22' = & -818{\cdot}4 \\ & \mathbf{\text{cotg } 16^\circ 22'} = & \mathbf{3{\cdot}40556} \end{array}$$

Übungsbeispiele. Man bestimme:

sin 15° 18′	sin 62° 9′	sin 23° 47′	sin 68° 52′
tg 28° 21′	tg 58° 15′	tg 10° 39′	tg 62° 50′
cos 24° 13′	cos 50° 20′	cos 53° 37′	cos 15° 43′
cotg 70° 10′	cotg 11° 18′	cotg 64° 51′	cotg 19° 45′

Resultate.

0·2638	0·8842	0·4034	0·9317
0·5397	1·6161	0·1880	1·9488
0·9120	0·6383	0·5932	0·9626
0·3607	5·0071	0·4694	2·7856

Korrektur des Winkels.

§ 6. Ist umgekehrt die Funktion, durch welche ein Winkel bestimmt ist, in der Tabelle nicht vollständig enthalten, so sucht man den nächst kleineren Tabellenwert und notiert den zugehörigen Winkel. Den Überschuß der gegebenen Funktion über den Tabellenwert dividiert man sodann durch die nebenstehende Minutenkorrektur und erhält dadurch *die Zahl der Minuten, um welche der notierte Winkel zu vergrößern ist, wenn man von sinus oder tangens ausging, dagegen zu verkleinern ist, wenn cosinus oder cotangens vorliegt.*

Die folgenden vier Beispiele mögen dieses Verfahren näher erläutern:

1. **$\sin u = 0{\cdot}5967 \ldots \sphericalangle u = ?$**
Tabelle .. $0{\cdot}5948 \ldots 36^\circ 30'$
Überschuß ... $19 : 2{\cdot}3 = 8'$
$\sphericalangle u = 36^\circ 38'$

2. **$\operatorname{tg} x = 2{\cdot}0983 \ldots \sphericalangle x = ?$**
Tabelle .. $2{\cdot}0965 \ldots 64^\circ 30'$
Überschuß ... $18 : 16 = 1{\cdot}1'$
$\sphericalangle x = 64^\circ 31{\cdot}1'$

3. **$\cos A = 0{\cdot}9185 \ldots \sphericalangle A = ?$**
Tabelle .. $0{\cdot}9171 \ldots 23^\circ 30'$
Überschuß ... $14 : 1{\cdot}1 = 12{\cdot}7'$
$\sphericalangle A = 23^\circ 17{\cdot}3'$

4. **$\operatorname{cotg} B = 0{\cdot}7300 \ldots \sphericalangle B = ?$**
Tabelle .. $0{\cdot}7265 \ldots 54^\circ\ 0'$
Überschuß ... $35 : 4{\cdot}5 = 7{\cdot}8'$
$\sphericalangle B = 53^\circ 52{\cdot}2'$

Übungsbeispiele. Man bestimme die folgenden, durch ihre Funktionen gegebenen Winkel in Graden und Minuten:

$\sin x = 0{\cdot}5200$	$\sin y = 0{\cdot}8371$	$\sin z = 0{\cdot}6235$
$\operatorname{tg} u = 0{\cdot}2135$	$\operatorname{tg} v = 0{\cdot}6648$	$\operatorname{tg} w = 1{\cdot}5209$
$\sin A = 0{\cdot}1925$	$\sin B = 0{\cdot}6911$	$\sin C = 0{\cdot}7853$
$\operatorname{tg} m = 0{\cdot}3705$	$\operatorname{tg} n = 0{\cdot}9256$	$\operatorname{tg} p = 1{\cdot}0879$
$\cos X = 0{\cdot}8685$	$\cos Y = 0{\cdot}7423$	$\cos Z = 0{\cdot}9281$
$\operatorname{cotg} \alpha = 0{\cdot}2135$	$\operatorname{cotg} \beta = 2{\cdot}3846$	$\operatorname{cotg} \gamma = 1{\cdot}7230$
$\cos r = 0{\cdot}9695$	$\cos s = 0{\cdot}5261$	$\cos t = 0{\cdot}7391$
$\operatorname{cotg} u = 0{\cdot}9598$	$\operatorname{cotg} v = 0{\cdot}3238$	$\operatorname{cotg} w = 0{\cdot}5717$

Resultate.

$\sphericalangle x = 31^\circ 20'$	$\sphericalangle y = 56^\circ 50'$	$\sphericalangle z = 38^\circ 34'$
$\sphericalangle u = 12^\circ 3'$	$\sphericalangle v = 33^\circ 36{\cdot}9'$	$\sphericalangle w = 36^\circ 40{\cdot}4'$
$\sphericalangle A = 11^\circ 6'$	$\sphericalangle B = 43^\circ 43'$	$\sphericalangle C = 51^\circ 45'$
$\sphericalangle m = 20^\circ 20'$	$\sphericalangle n = 42^\circ 47'$	$\sphericalangle p = 47^\circ 24{\cdot}6'$
$\sphericalangle X = 29^\circ 43'$	$\sphericalangle Y = 47^\circ 4'$	$\sphericalangle Z = 21^\circ 52'$
$\sphericalangle \alpha = 77^\circ 57'$	$\sphericalangle \beta = 22^\circ 45'$	$\sphericalangle \gamma = 30^\circ 8'$
$\sphericalangle r = 14^\circ 11'$	$\sphericalangle s = 58^\circ 15{\cdot}5'$	$\sphericalangle t = 42^\circ 20{\cdot}5'$
$\sphericalangle u = 46^\circ 11'$	$\sphericalangle v = 72^\circ 3{\cdot}5'$	$\sphericalangle w = 60^\circ 15'$