UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Visual Library

Trigonometrische Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

§ 7. Unter der Auflösung eines Dreieckes versteht man die Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel aus den gegebenen Stücken.

I. Kennt man von einem rechtwinkligen Dreiecke zwei Seiten, so berechne man daraus eine Funktion des einen Spitzwinkels und suche dann den zugehörigen Winkel in der Tabelle.

Z. B. Kathete $a = 14{\cdot}73\ m$
Hypotenuse $c = 27{\cdot}8\ m$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{14{\cdot}73}{27{\cdot}8} = 0{\cdot}5299$$

nach Tabelle $\sphericalangle A = 32^0$

$90^0 - A = \sphericalangle B = 58^0$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = 23{\cdot}577\ m$

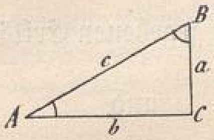

Fig. 4.

Kathete $a = 53{\cdot}48\ m$
Kathete $b = 98{\cdot}5\ m$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{53{\cdot}48}{98{\cdot}5} = 0{\cdot}5429_4$$

nach Tabelle $\sphericalangle A = 28^0 30'$

$90^0 - A = \sphericalangle B = 61^0 30'$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 112{\cdot}08\ m$

§ 8. **II. Kennt man von einem rechtwinkligen Dreiecke eine Seite und einen Spitzwinkel, so benutze man zur Berechnung der fehlenden Seiten die im folgenden abgeleiteten Sätze.**

Nach den in § 3 gegebenen Erklärungen ist:

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{c} = \sin B,$$

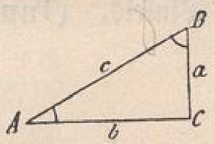

Fig. 5.

folglich, wenn wir beide Seiten dieser Gleichungen mit c multiplizieren,

$$\mathbf{a = c \, . \sin A} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b = c \, . \sin B}$$

D. h. **Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels. (Sinus-Satz).**

Beispiel: $c = 57{\cdot}08\ m$
$\sphericalangle A = 49\tfrac{1}{2}^0$
Dann ist: $\sphericalangle B = 40\tfrac{1}{2}^0 \quad (90^0 - \sphericalangle A)$
und: $a = c \, . \sin A = 57{\cdot}08 \times 0{\cdot}7604 = 43{\cdot}404\ m$
$b = c \, . \sin B = 57{\cdot}08 \times 0{\cdot}6495 = 37{\cdot}073\ m$

Aus den Gleichungen:

$$\mathbf{a = c \, . \sin A} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b = c \, . \sin B}$$

folgt, wenn man beide Seiten der Gleichungen durch den darin vorkommenden sinus dividiert:

$$\mathbf{c = \frac{a}{\sin A}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c = \frac{b}{\sin B}}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

D. h. **Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete, dividiert durch den sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels.**

Beispiel: $a = 53{\cdot}85\ m$
$\sphericalangle B = 40^0 30'$
$90^0 - B \ldots\ldots \sphericalangle A = 49^0 30'$

$$c = \frac{a}{\sin A} = 53{\cdot}85 : 0{\cdot}7604 = 70{\cdot}82\ m$$

$$b = c \sin B = 45{\cdot}99\ m$$

§ 9. Nach den in § 3 gegebenen Erklärungen ist ferner (in Fig. 5)

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

woraus, wenn wir beide Seiten der Gleichungen mit dem darin vorkommenden Nenner b (a) multiplizieren,

folgt: $\mathbf{a = b \,.\, tg\, A}$ und $\mathbf{b = a \,.\, tg\, B}$

D. h. **Die unbekannte Kathete ist gleich der bekannten Kathete, multipliziert mit dem tangens des der ersteren gegenüberliegenden Winkels. (Tangens-Satz.)**

Beispiel. $a = 57{\cdot}25\ cm$
$\sphericalangle B = 51^0 30'$
Dann ist: $\sphericalangle A = 38^0 30'$
und ..... $b = a \,.\, \operatorname{tg} B = 57{\cdot}25 \times 1{\cdot}2572 = 71{\cdot}973\ cm$
und ..... $c = a : \sin A = 57{\cdot}25 : 0{\cdot}6225 = 91{\cdot}968\ cm$

§ 10. Da man nach § 4 statt des sinus (tangens) des einer Kathete gegenüberliegenden Winkels stets den cosinus (cotangens) des ihr anliegenden Winkels setzen kann, so lassen sich die in §§ 8 und 9 angegebenen Sätze auch folgendermaßen aussprechen.

Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse, multipliziert mit dem cosinus des der Kathete anliegenden Spitzwinkels. (Cosinus-Satz.)

Es ist also in Fig. 5

$$a = c \,.\, \cos B \quad \text{und} \quad b = c \,.\, \cos A.$$

Die Hypotenuse ist gleich der Kathete, dividiert durch den cosinus des der Kathete anliegenden Spitzwinkels.

Es ist also in Fig. 5

$$c = \frac{a}{\cos B} \quad \text{oder} \quad c = \frac{b}{\cos A}$$

Die unbekannte Kathete ist gleich der bekannten Kathete, multipliziert mit dem cotangens des der ersteren anliegenden Spitzwinkels. (Cotangens-Satz.)

Es ist also in Fig. 5

$$a = b \,.\, \text{cotg}\, B \qquad \text{und} \qquad b = a \,.\, \text{cotg}\, A$$

Anmerkung. Da jederzeit, wenn der eine Spitzwinkel des rechtwinkligen Dreieckes gegeben ist, der zweite Winkel sehr rasch (durch Subtraktion des ersteren von 90^0) zu finden ist, so würden die in § 8 und § 9 angeführten Sätze zur trigonometrischen Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes vollständig genügen. Doch ergibt die Mitverwendung der im § 10 zusammengestellten Sätze in den meisten Fällen rechnerische Vorteile.

Übungsbeispiele.

Man löse folgende rechtwinklige Dreiecke auf:

1. $c = 125\ m$, $\sphericalangle B = 38^0$
2. $a = 25{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle B = 63^0 30'$
3. $a = 22{\cdot}66\ m$, $c = 44\ m$
4. $a = 175\ dm$, $b = 70{\cdot}7\ dm$
5. $c = 53{\cdot}85\ cm$, $\sphericalangle A = 31^0 20'$
6. $a = 73{\cdot}28\ dm$, $\sphericalangle A = 39^0 10'$
7. $a = 15{\cdot}85\ m$, $c = 37{\cdot}24\ m$
8. $a = 525\ cm$, $b = 426{\cdot}25\ cm$

9. *α*) Welchen Steigungswinkel besitzt die Gütsch-Drahtseilbahn bei Luzern, deren Steigung $\left(\frac{h}{b} \text{ in Fig. 6}\right)$ 52 % beträgt? $\left(\frac{h}{b} = \frac{52}{100}\right)$

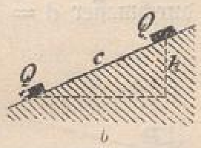

Fig. 6.

β) Man gebe die Steigungswinkel folgender Bahnen aus den beigefügten „Steigungen“ an:

Schafbergbahn (25 %), Goldau—Rigi (21·2 %),
Brennerbahn (2·5 %), Arlbergbahn (3·2 %).

10. Wie viel Prozent beträgt die größte Steigung (h : b) auf der i. J. 1889 eröffneten Pilatus-Zahnradbahn, wenn der größte Steigungswinkel $\alpha = 25^0\, 38{\cdot}5'$ ist?

11. Wie viele Pferdekräfte Hubarbeit leistet die Berglokomotive der Vitznau-Rigi-Zahnradbahn, wenn sie einen Zug vom Gesamtgewichte $Q = 20500\ kg$ längs einer Steigung von $12\frac{1}{2}^0$ mit einer Geschwindigkeit $c = 1{\cdot}55\ m$ aufwärts befördert?

Anleitung: Die geleistete Arbeit = Gewicht × „vertikale Hubhöhe“ (Fig. 6).

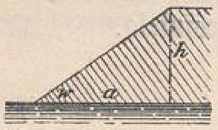

Fig. 7.

12. Wie groß ist die Anlage (a in Fig. 7) eines Dammes von der Höhe $h = 4 \cdot 75$ *m* und dem Böschungswinkel $w = 33^{0}30'$?

13. Die beiden Seitenwände eines Grabens sind unter demselben Böschungswinkel $\alpha = 42^{0}$ gegen die Horizontale geneigt. Die beiden Böschungslinien AC und BD messen je $3 \cdot 75$ *m*, die Grabensohle AB hat eine Breite von $4 \cdot 25$ *m*. Man berechne die Tiefe und die obere Breite des Grabens (Fig. 8).

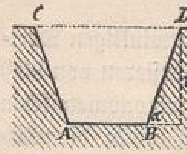

Fig. 8.

14. *a)* Ein Graben (Fig. 9) hat eine Grabensohle von der Breite $b = 5 \cdot 25$ *m*, eine Tiefe $t = 3 \cdot 25$ *m*, und seine beiden Seitenwände besitzen die Böschungswinkel $w_1 = 65\frac{1}{2}^{0}$ und $w_2 = 47^{0}$. Wie groß ist die obere Breite AB des Grabens?

b) Dasselbe Beispiel ist für die Angaben

$\sphericalangle\ w_1 = 37^{0}$ $\quad b = 4 \cdot 45$ *m*

$\sphericalangle\ w_2 = 79^{0}40'$ $\quad t = 2 \cdot 35$ *m*

zu lösen.

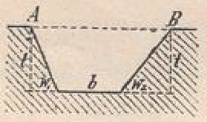

Fig. 9.

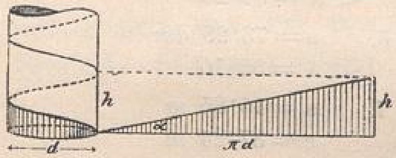

Fig. 10.

15. *a)* Welche Ganghöhe h muß eine Schraube (Fig. 10) vom Spindeldurchmesser $d = 75 \cdot 5$ *mm* besitzen, wenn ihr Steigungswinkel α 4^{0} betragen soll?

b) Dieselbe Aufgabe ist für $d = 157$ *mm* und $\sphericalangle\ \alpha = 5\frac{1}{2}^{0}$ zu lösen.

c) Wie groß ist der Steigungswinkel einer Schraube, welche bei einem Spindeldurchmesser $d = 115$ *mm* die Ganghöhe $h = 24$ *mm* besitzt?

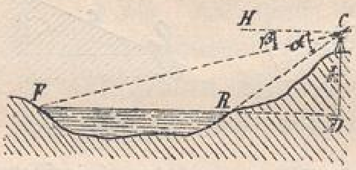

Fig. 11 *a*.

16. Von der Pfänderspitze C (Fig. 11 a), deren Höhe h über den Bodenseespiegel 662 *m* beträgt, erscheint das Rheinspitz F (Rheinmündung) unter dem Tiefenwinkel $\beta = 2^{0}20'$ und der in derselben Vertikalebene liegende Uferpunkt bei Bregenz (R) unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 14^{0}9'$. Man berechne daraus die gegenseitige Entfernung x der beiden Uferpunkte.

Anleitung: Man berechne aus den Dreiecken CDR und CDF die Strecken DR und DF und dann $x = DF - DR$.

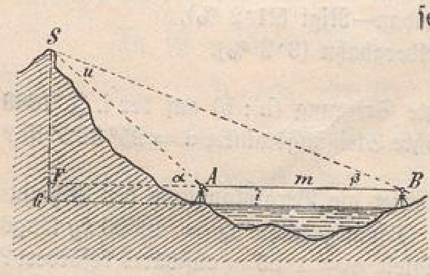

Fig. 11 *b*.

17. Die Spitze S des Schafberges (Fig. 11 *b*) erscheint von zwei mit S in derselben Vertikalebene liegenden Uferpunkten A (bei Scharfling) und B (bei Bichl) des Mondsees unter den Höhenwinkeln $\alpha = 23^{0}26'$ und $\beta = 15^{0}10'$.

Wie hoch liegt S über dem Spiegel des Mondsees, wenn die Entfernung $AB = 1795 \cdot 13\ m$ und die Instrumentenhöhe $i = 1 \cdot 7\ m$ ist?

Anmerkung: Diese Aufgabe ist eine Umkehrung der Aufgabe 16.

18. *a)* Welche Winkel (α und β) schließt die Resultierende R zweier unter einem rechten Winkel zusammenwirkender Kräfte $P = 38\ kg$ und $Q = 53\ kg$ (Fig. 12) mit diesen Kräften ein, und wie groß ist die Resultierende?

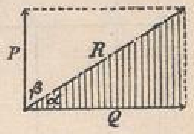

Fig. 12.

b) Eine Kraft $R = 235\ kg$ (Fig. 12) ist in zwei zu einander senkrechte Komponenten P und Q zu zerlegen, welche mit der Kraft R die Winkel $\alpha = 32^0$ und $\beta = 58^0$ einschließen. Wie groß sind diese Komponenten? ($\alpha + \beta = 90^0$).

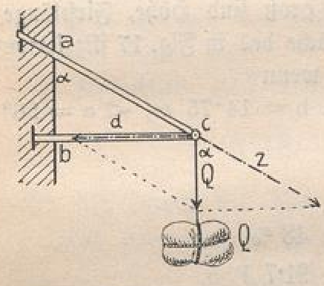

Fig. 13 *a.*

19. An der in Fig. 13 skizzierten Eisenkonstruktion (Aufzugs-Vorrichtung) hängt bei c vertikal die Last Q. Wie groß sind Zug- und Druckspannung (z und d) in den beiden Konstruktionsteilen a c und b c, wenn:

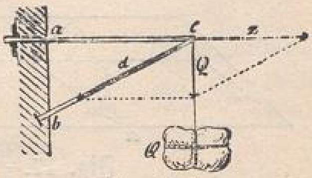

Fig. 13 *b.*

a)	$Q = 350\ kg$	*c)*	$Q = 865\ kg$
	$\sphericalangle\ \alpha = 62\frac{1}{2}^0$		$\sphericalangle\ \alpha = 57^0 40'$
b)	$Q = 1375\ kg$	*d)*	$Q = 825\ kg$
	$\sphericalangle\ \alpha = 40^0 30'$		$\sphericalangle\ \alpha = 62^0$ ist?

(α bedeutet den Neigungswinkel des schrägen Konstruktionsteiles gegen die Vertikale.)

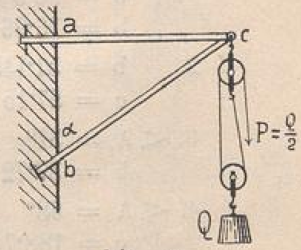

Fig. 13 *c.*

Wie stellen sich die Lösungen, wenn die Last Q nicht unmittelbar am Punkte c, sondern in der durch Fig. 13 c dargestellten Weise an einem Rollenzuge angehängt ist.

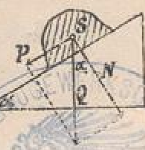

Fig. 14.

20. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 14) vom Neigungswinkel $\alpha = 25^0 45'$ liegt eine Last vom Gewichte $Q = 75 \cdot 25\ kg$.

Wie groß ist die Bewegungskomponente P?

Wie groß ist der die Reibung erzeugende Normaldruck N?

Wie groß ist die Reibung R, wenn der Reibungskoëffizient $f = 0 \cdot 45$ ist? ($R = N \cdot f$)

Anmerkung: In dem rechtwinkligen Kräfte-Dreiecke ist $\sphericalangle\ (Q, N) = \sphericalangle\ \alpha$

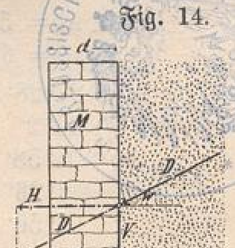

Fig. 15.

21. Auf die Stützmauer M (Fig. 15), deren Höhe $h = 4\ m$ und deren Dicke $d = 1 \cdot 2\ m$ ist, wirkt in $\frac{1}{3}$ der

HÖXTER

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

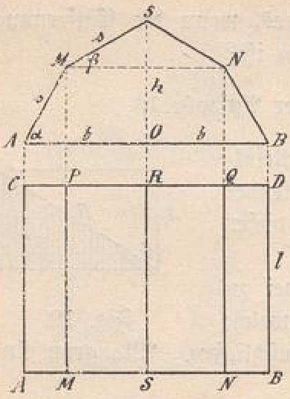

Fig. 16.

Höhe unter dem $\sphericalangle w = 33^0$ gegen den Horizont geneigt, der Erddruck $D = 4425\ kg$. Wie groß sind die beiden Drehmomente der Komponenten H und V bezüglich der Kante O.

(Anleitung : $H \cdot \frac{h}{3}$ und $- V \cdot d$.)

22. Das in Fig. 16 in zwei Projektionen dargestellte Mansarddach besitzt die Länge $l = 15\cdot25\ m$, die Breite $AB = 2b = 12\cdot5\ m$, und die Höhe h ist gleich der halben Breite. Wie groß ist die gesamte Dachfläche, wenn $AM = MS$, $\sphericalangle \alpha = 60^0$ und $\sphericalangle \beta = 30^0$ ist?

(Anleitung : $s \cos \alpha + s \cos \beta = AO = b$. Aus dieser Gleichung berechne man zunächst s.)

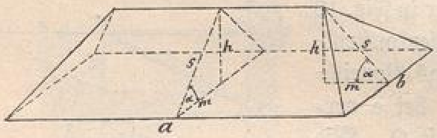

Fig. 17.

23. Wie groß sind Höhe, Firstlänge und Gesamtfläche des in Fig. 17 skizzierten Walmdaches, wenn $a = 25\cdot5\ m$, $b = 14\cdot75\ m$, $\sphericalangle \alpha = 26^0$ ist?

Resultate.

1. $a = 98\cdot5\ m$
   $b = 76\cdot96\ m$
2. $b = 51\cdot145\ m$
   $c = 57\cdot15\ m$
3. $\sphericalangle A = 31^0$
   $b = 37\cdot72\ m$
4. $\sphericalangle A = 68^0$
   $c = 188\cdot74\ dm$
5. $a = 28\cdot002\ cm$
   $b = 45\cdot999\ cm$
6. $b = 89\cdot958\ dm$
   $c = 116\cdot023\ dm$
7. $\sphericalangle A = 25^0 12'$
   $b = 33\cdot698\ m$
8. $\sphericalangle A = 50^0 55'$
   $c = 676\cdot25\ cm$
9. $\alpha)$ $27^0 28'$
   $\beta)$ $14^0 2'$
   $11^0 58'$
   $1^0 26'$
   $1^0 50'$
10. 48 %
11. 91·7 P. S.
12. $a = 7\cdot176\ m$
13. $t = 2\cdot508\ m$
    $CD = 9\cdot822\ m$
14. *a)* $9\cdot762\ m$
    b) $7\cdot997\ m$
15. *a)* $h = 16\cdot59\ mm$
    b) $h = 47\cdot49\ mm$
    c) $3^0 48'$
16. $13620\ m$
17. $1300\ m$
18. *a)* $\sphericalangle \alpha = 35^0 38'$
    $\sphericalangle \beta = 54^0 22'$
    $R = 65\cdot21\ kg$
    b) $P = 124\cdot527\ kg$
    $Q = 199\cdot304\ kg$
19. *a)* $d = 672\ kg$ *)
    $z = 758\ kg$
    b) $z = 1808\ kg$
    $d = 1174\ kg$

*) Legt man der Rechnung die Fig. 13 b zugrunde, so sind die Werte von z und d mit einander zu vertauschen.

19. *c)* $z = 1617\ kg$*)
$d = 1367\ kg$
d) $z = 1757\ kg$
$d = 1552\ kg$*)

20. $P = 32{\cdot}69\ kg$
$N = 67{\cdot}77\ kg$
$R = 30{\cdot}5\ kg$

21. $H.\frac{h}{3} = 4948\ mkg$
$V.d = -2892\ mkg$

22. $279{\cdot}1\ m^2$

23. $3{\cdot}596\ m$
$10{\cdot}75\ m$
$418{\cdot}47\ m^2$

§ 11. Das Rechteck

kann durch eine Diagonale in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt und auf diese zurückgeführt werden (Fig. 18).

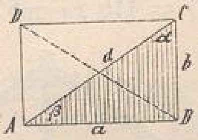

Fig. 18.

Beispiel: Welche Winkel β und α schließen die Diagonalen eines Rechteckes von den Seiten $a = 43{\cdot}2\ cm$, $b = 29{\cdot}5\ cm$ mit diesen Seiten ein?

Resultat: $\sphericalangle \beta = 34^0\ 19{\cdot}5'$ $\sphericalangle \alpha = 55^0\ 40{\cdot}5'$

§ 12. Das gleichschenklige Dreieck

läßt sich durch die zur Grundlinie gehörige Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen und auf diese zurückführen (Fig. 19).

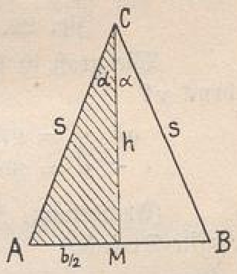

Fig. 19.

(Dabei ist zu beachten, daß die gedachte Höhe sowohl den Winkel an der Spitze als auch die Grundlinie halbiert.)

Beispiel: In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe $h = 25{\cdot}8\ cm$, der Winkel an der Spitze 43^0. Wie groß sind Basis und Schenkel?

Resultat: $b = 20{\cdot}324\ cm$, $s = 27{\cdot}73\ cm$.

§ 13. Der Rhombus

zerfällt durch die beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, auf welche er zurückgeführt werden kann (Fig. 20).

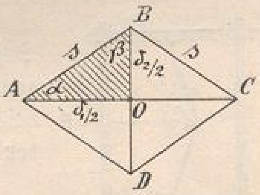

Fig. 20.

(Dabei ist zu beachten, daß die zu einander senkrechten Diagonalen sich selbst und die vier Rhombuswinkel halbieren.)

Beispiel: In einem Rhombus, dessen Spitzwinkel $61^0 20'$ beträgt, ist die kürzere Diagonale $d_2 = 4{\cdot}75\ m$. Man berechne die zweite Diagonale d_1 und die Rhombusseite s.

Resultat: $d_1 = 8{\cdot}010\ m$, $s = 4{\cdot}656\ m$.

---

*) Nach Fig. 13 c ist die bei c wirksame Belastung gleich $Q + P = \frac{3}{2}\ Q$. Somit werden auch die Komponenten d und z $1\frac{1}{2}$ mal so groß. Es sind daher die Resultate des Beispiels 19 mit $1\frac{1}{2}$ zu multiplizieren.

Übungsbeispiele.

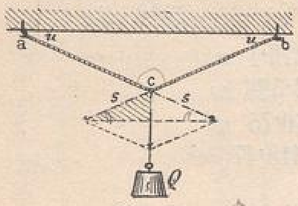

Fig. 21.

1. *a)* Wie groß sind die Seilspannungen s in den beiden gleich langen Seilstücken a c und b c (Fig. 21), wenn bei c die vertikale Belastung Q = 75·5 *kg* wirkt und $\sphericalangle$ u = 27° 15′ ist?

b) Welchen Durchmesser d müßte ein Hanfseil (in Fig. 21) haben, um bei einem Neigungswinkel u = 25° die Last Q = 325 *kg* zu tragen, wenn für 1 *cm*² Querschnitt 103 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

c) Wie groß ist der von den beiden Seilstücken gebildete Winkel, wenn Q = 110 *kg* und s = 75 *kg* ist?

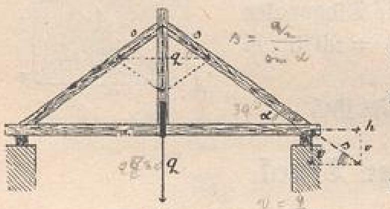

Fig. 22.

2. Auf die Hängesäule eines einfachen Hängewerks (Fig. 22) wirkt als Zug nach abwärts die Kraft $q = \frac{5}{8}$ der Gesamtbelastung Q.

Wie groß ist der Druck s in den Streben, wenn diese unter einem Winkel α gegen die Horizontale geneigt sind?

Wie groß ist ferner der Horizontalschub h im Hauptbalken und der Vertikaldruck v?

a) q = 2730 *kg*	*b)* q = 5685 *kg*	*c)* q = 3437·5 *kg*
$\sphericalangle \alpha = 39°$	$\sphericalangle \alpha = 38°$	$\sphericalangle \alpha = 37\frac{1}{2}°$

(Anmerkung: Man berücksichtige die Kongruenz der entstehenden rechtwinkligen Kräfte-Dreiecke.)

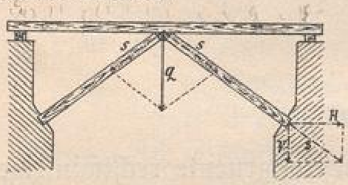

Fig. 23.

3. Wie groß ist der Strebendruck s in den Streben eines einfachen Sprengwerks (Fig. 23), wenn in der Mitte des Hauptbalkens der Druck q = 4200 *kg* vertikal abwärts wirkt und die beiden Streben unter dem Winkel *w* = 40° gegen den Horizont geneigt sind?

Wie groß sind der Horizontalschub H und der Vertikaldruck V gegen die Mauer?

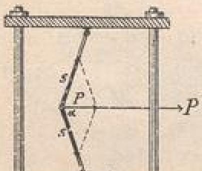

Fig. 24.

4. *a)* An einer einfachen Kniepresse (Fig. 24), deren Schenkel den Winkel 177° mit einander einschließen, wirkt horizontal die Kraft P = 25 *kg*. Wie groß ist der Druck s in den beiden Schenkeln, und wie groß sind der Horizontalschub h und der vertikale Preßdruck v?

b) Wie groß muß die Kraft P sein, wenn bei einer gegenseitigen Neigung der Schenkel von 176° ein Preßdruck (v) von 500 *kg* erzielt werden soll?

c) Unter welchem Winkel müssen sich die beiden Schenkel einstellen, wenn die horizontal wirkende Kraft P = 40 *kg* einen Preßdruck v = 600 *kg* hervorbringen soll?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

5. Von der Gesamtbelastung Q eines doppelten Hängewerkes (Fig. 25) wird auf jede Hängesäule die als Zug nach abwärts wirkende Kraft $q = \frac{11}{30}$ Q übertragen.

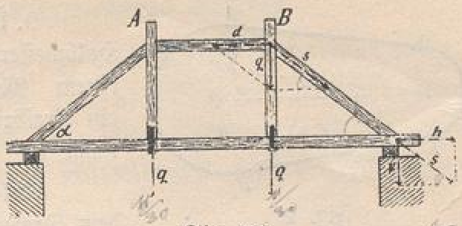

Fig. 25.

$s = \frac{q}{\sin\alpha}$ $d = q \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha$

Man berechne die Spannung s in den Streben und den Druck d im Spannriegel. Wie groß muß die Querschnittsfläche f des letzteren sein, wenn auf 1 *cm*² Querschnitt 75 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden und wenn

a) Q = 18700 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 40\frac{1}{2}^0$ *b)* Q = 6660 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 42^0$ ist?

6. *a)* Auf die Stütze s eines einfach armierten Trägers (Fig. 26) wird der vertikale Druck q = 2500 *kg* übertragen. Wie groß ist die Zugspannung z in den schmiedeeisernen Zugstangen, wenn $\sphericalangle\, \alpha = 18\frac{1}{2}^0$ ist?

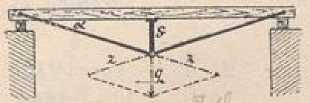

Fig. 26.

Welchen Durchmesser d müssen diese Zugstangen erhalten, wenn auf 1 *cm*² Querschnitt 700 *kg* zulässige Beanspruchung gerechnet werden?

b) Dieselbe Aufgabe ist für folgende Angaben zu lösen:

q = 1875 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 11^0\, 20'$.

7. Von der gleichmäßig verteilten Belastung Q eines doppelt armierten Trägers (Fig. 27) wird auf jede Stütze der vertikal abwärts wirkende Druck $q = \frac{11}{30}$ Q übertragen. Wie groß sind die Zugspannungen z_1 und z_2 in den Zugstangen für folgende Angaben:

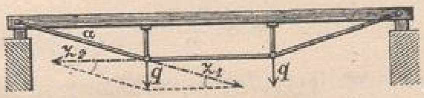

Fig. 27.

$z_1 = \frac{q}{\sin\alpha}$

$z_2 = q \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha$.

a) Q = 6750 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 12\frac{1}{2}^0$ *b)* Q = 8400 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 10^0$ *c)* Q = 9650 *kg* $\sphericalangle\, \alpha = 13^0\, 45'$

Wie groß müssen die Durchmesser der verwendeten Zugstangen genommen werden, wenn auf 1 *mm*² Querschnitt 7 *kg* zulässige Belastung gerechnet werden?

8. Zwei in ebenem Gelände führende geradlinige Bahnstrecken MA und NB (Fig. 28), welche mit einander den Winkel ω einschließen, sollen durch einen Kreisbogen vom Halbmesser R mit einander verbunden werden. Man berechne die „Tangentenlänge" PA und PB, und die Entfernung des Bogenscheitels S von dem Winkelpunkte P, wenn

a) $\omega = 102^0$ R = 325 *m* *b)* $\omega = 95^0\, 30'$ R = 285 *m* *c)* $\omega = 110^0\, 20'$ R = 375 *m* ist?

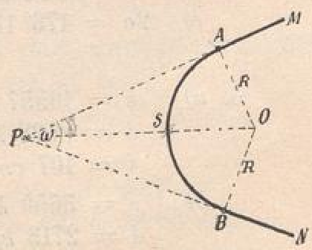

Fig. 28.

PA (PB) = $R \cdot \mathrm{cotg}\,\frac{\omega}{2}$

PS = $\frac{R}{\sin\frac{\omega}{2}} - R = 1$

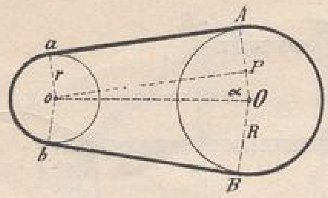

Fig. 29.

9. Über zwei Riemenscheiben (Fig. 29) von den Halbmessern R = 60 *cm* und r = 35 *cm* und einem Mittelpunktsabstand a = 180 *cm* wird ein Treibriemen gelegt. Man berechne die Riemenlänge L.

Anleitung: Man bestimme den Winkel α aus dem Dreiecke oPO.

Resultate.

1. *a)* s = 8244 *kg*
   b) d = 2·18 *cm*
   c) 85° 40′

2. *a)* s = 2169 *kg*
   h = 1685 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$
   b) s = 4617 *kg*
   h = 3638 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$
   c) s = 2823 *kg*
   h = 2240 *kg*
   $v = \frac{q}{2}$

3. s = 3267 *kg*
   $V = \frac{q}{2}$
   H = 2503 *kg*

4. *a)* s = 477 *kg*
   h = 12·5 *kg*
   v = 477 *kg*
   b) P = 34·9 *kg*
   c) 2α = 176° 11′

5. *a)* s = 10557 *kg*
   d = 8028 *kg*
   f = 107 *cm*²
   b) s = 3650 *kg*
   d = 2713 *kg*
   f = 36·2 *cm*²

6. *a)* z = 3939·5 *kg*
   d = 26·77 *mm*
   b) z = 4768·5 *kg*
   d = 29·45 *mm*

7. $z_1 = \frac{q}{\sin \alpha}$
   $z_2 = q \operatorname{cotg} \alpha$
   $d_1 = \sqrt{\frac{4 z_1}{7 \pi}}$
   $d_2 = \sqrt{\frac{4 z_2}{7 \pi}}$
   a) z_1 = 11437 *kg*
   z_2 = 11164 *kg*
   d_1 = 45·61 *mm*
   d_2 = 45·06 *mm*
   b) z_1 = 17732 *kg*
   z_2 = 17468 *kg*
   d_1 = 56·79 *mm*
   d_2 = 56·36 *mm*
   c) z_1 = 14887 *kg*
   z_2 = 14460 *kg*
   d_1 = 52·037*mm*
   d_2 = 51·285*mm*

8. *a)* PA = 263·2 *m*
   PS = 93·2 *m*
   b) PA = 258·9 *m*
   PS = 100 *m*
   c) PA = 261 *m*
   PS = 81·8 *m*

9. α = 82° 1′
   L = 662 *cm*

§ 14. Die regelmäßigen Vielecke lassen sich auf das gleichschenklige „Bestimmungsdreieck" AOB (Fig. 30) zurückführen, welches man erhält, wenn man die Endpunkte A und B einer Vielecksseite mit dem Mittelpunkte des Vieleckes verbindet.

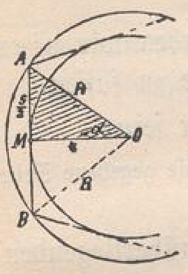

Fig. 30.

Ist die Seitenzahl des regelmäßigen Vieleckes n, bedeutet r den Halbmesser des eingeschriebenen, R den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises,

so ist im $\triangle$ O A M .... $\frac{s}{2} = R \sin \alpha$,

$$\text{daher } s = \mathbf{2\,R\,sin}\,\alpha$$

$$\text{und } \mathbf{R} = \frac{s}{\mathbf{2\,sin}\,\alpha}$$

Ferner ist $\frac{s}{2} = r \operatorname{tg} \alpha$ $\qquad$ daher $s = \mathbf{2\,r\,tg}\,\alpha$

$$\text{und } \mathbf{r} = \frac{s}{\mathbf{2\,tg}\,\alpha}$$

In allen diesen Formeln ist $\sphericalangle\, \alpha = \frac{\mathbf{180^0}}{\mathbf{n}}$

(Man beachte die Tabelle auf Seite 46.)

Übungsbeispiele.

1. Wie groß sind die Halbmesser des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises für ein Fünfeck von der Seitenlänge $s = 2{\cdot}53\ m$?

2. Wie groß ist die Seite s_9 (s_{10}), [s_{12}] eines regulären Neuneckes (Zehneckes), [Zwölfeckes], welches einem Kreise vom Halbmesser $R = 12{\cdot}5\ dm$ eingeschrieben ist?

3. Man berechne den Umfang des regulären Sechzigeckes, welches einem Kreise vom Durchmesser 1 *m* eingeschrieben (umschrieben) ist.

4. Wie groß wird der Durchmesser des Teilkreises für eine Kettenrolle mit 10 Zähnen, wenn die Kettenteilung 24 *mm* beträgt?

5. Wie groß ist der Teilkreisdurchmesser eines Stirnrades von 60 Zähnen bei 32 *mm* Teilung?

6. Wie groß sind die Durchmesser der Zahnräder eines Stirnrädervorgeleges mit 56 und 25 Zähnen und der gemeinsamen Teilung von 35 *mm*?

Resultate.

1. $r = 1{\cdot}74\ m$	$R = 2{\cdot}152\ m$	
2. $s_9 = 8{\cdot}55\ dm$	$s_{10} = 7{\cdot}725\ dm$	$s_{12} = 6{\cdot}47\ dm$
3. $u = 3{\cdot}1404\ m$	$U = 3{\cdot}1446\ m$	4. $d = 38{\cdot}83\ mm$
5. $611{\cdot}4\ mm$	6. $624{\cdot}2\ mm$ und $279{\cdot}2\ mm$	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN