Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Das schiefwinklige Dreieck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76715

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 15. Entsprechend den vier Kongruenzsätzen haben wir vier Hauptfälle der Dreiecksbestimmung ins Auge zu fassen.

Ein schiefwinkliges Dreieck kann nämlich bestimmt sein:

1. Durch eine Seite und zwei Winkel, (deren Lage gegen die gegebene Seite gleichfalls bestimmt sein muß.)
2. Durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.
3. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.
4. Durch die drei Seiten.

§ 16. In den beiden ersten Fällen genügt zur Auflösung des Dreieckes der

Sinussatz: Die Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

NB. Kommt ein stumpfer Winkel vor, so nehme man statt seines sinus den sinus seines Nebenwinkels. (Siehe nachstehende Ableitung.)

Z. B. in Fig. 31a

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}$$

und in Fig. 31b.

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

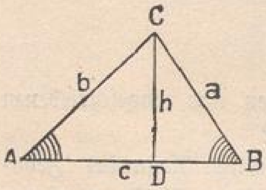

Fig. 31a.

Beweis.

Ziehen wir

$$CD \perp AB,$$

so folgt aus den Dreiecken

ADC und BDC:

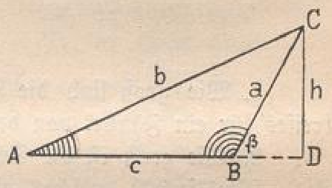

Fig. 31b.

$h = b \sin A$ | $h = b \sin A$
$h = a \sin B$ | $h = a \sin \beta$

woraus sich durch Gleichstellung der beiden für h gefundenen Werte ergibt:

$b \sin A = a \sin B$ | $b \sin A = a \sin \beta$

Aus diesen Gleichungen können wir Proportionen bilden, wenn wir die Faktoren des linksstehenden Produktes zu inneren, die Faktoren des rechtsstehenden Produktes zu äußeren Gliedern machen. Dadurch erhalten wir:

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B} \qquad \mathbf{a : b = \sin A : \sin \beta}$$

Damit ist der Sinussatz bewiesen.

Wendet man denselben auf je zwei andere Seiten an, so ergibt sich:

$$\mathbf{a : c = \sin A : \sin C} \quad \text{und} \quad \mathbf{b : c = \sin B : \sin C}$$

Durch Zusammenfassung dieser Proportionen erhält man

$$\mathbf{a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C},$$

worin statt des sinus eines etwaigen stumpfen Winkels stets der sinus seines Nebenwinkels zu nehmen ist.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 53 \cdot 25\ m$
$\sphericalangle B = 74^0 30'$
$\sphericalangle C = 50^0$

Auflösung:

$180^0 - (B + C) = \sphericalangle A = 55^0 30'$

$b : a = \sin B : \sin A$

$c : a = \sin C : \sin A$

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{53 \cdot 25}{0 \cdot 8241} . 0 \cdot 9636$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \sin C = \frac{53 \cdot 25}{0 \cdot 8241} . 0 \cdot 7660$$

$\mathbf{b = 62 \cdot 263}\ m$

$\mathbf{c = 49 \cdot 496}\ m$

2. $a = 48 \cdot 5\ m$
$b = 61 \cdot 2\ m$
$\sphericalangle B = 75^0 30'$

Auflösung:

$a : b = \sin A : \sin B$

$$\sin A = \frac{a . \sin B}{b} = \frac{48 \cdot 5 \times 0 \cdot 9682}{61 \cdot 2}$$

$\sin A = 0 \cdot 7673$

$\sphericalangle A = \mathbf{50^0 7'}$

$\sphericalangle C = \mathbf{54^0 23'}$

$c : b = \sin C : \sin B$

$$c = \frac{b . \sin C}{\sin B} = \frac{61 \cdot 2 \times 0 \cdot 8129}{0 \cdot 9682}$$

$\mathbf{c = 51 \cdot 384}\ m$

Anmerkung. Kennt man von einem Dreiecke eine Seite und die Winkel, so kann man, wie aus den Formeln für b und c in der vorstehenden Auflösung zu Beispiel 1 ersichtlich ist, die fehlenden Seiten nach folgender leicht zu merkenden Regel berechnen:

Die gesuchte Seite wird gefunden, indem man die bekannte Seite durch den sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividiert und mit dem sinus des der gesuchten Seite gegenüberliegenden Winkels multipliziert.

Bei Anwendung dieser Regel erspart man das Anschreiben der Proportionen und hat bei Berechnung beider unbekannten Seiten die Division nur einmal auszuführen. (Siehe obige Formeln für b und c in Beispiel 1.)

Übungsbeispiele:

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $c = 250\ m$, $\sphericalangle A = 72^0$, $\sphericalangle C = 65^0$
2. $b = 5 \cdot 49\ m$, $\sphericalangle A = 72^0 25'$, $\sphericalangle B = 49^0 45'$
3. $a = 45 \cdot 64\ cm$, $\sphericalangle C = 29^0 30'$, $\sphericalangle A = 103^0 30'$
4. $a = 35\ m$, $b = 75\ m$, $\sphericalangle B = 80^0$
5. $a = 23 \cdot 25\ m$, $c = 35 \cdot 88\ m$, $\sphericalangle C = 81^0 30'$
6. $b = 45 \cdot 5\ m$, $c = 69 \cdot 6\ m$, $\sphericalangle C = 96^0 30'$

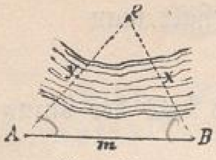

Fig. 32 a.

7. Man bestimme die Entfernungen AC und BC (Fig. 32a) eines unzugänglichen Punktes C aus den mittels Meßlatte und Winkelmeßinstrumenten gefundenen Abmessungen:

a) m = 125 *m*	*b)* m = 356·7 *m*	*c)* m = 225·5 *m*
$\sphericalangle$ A = 52°	$\sphericalangle$ A = 37° 20′	$\sphericalangle$ A = 100°
$\sphericalangle$ B = 71°	$\sphericalangle$ B = 61° 30′	$\sphericalangle$ B = 35°

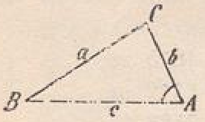

Fig. 32 b.

8. Man berechne die durch direkte Messung nicht zu ermittelnde Entfernung c der beiden Punkte A und B (Fig. 32b) aus folgenden Abmessungen:

a) a = 130 *m*	*b)* a = 512 *m*	*c)* a = 240 *m*
b = 105 *m*	b = 350 *m*	b = 221 *m*
$\sphericalangle$ A = 65° 30′	$\sphericalangle$ A = 98°	$\sphericalangle$ A = 128° 9′

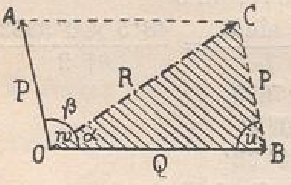

Fig. 33.

9. Eine Kraft R (Fig. 33) ist in zwei gegen R unter den Winkeln β und α geneigte Komponenten P und Q zu zerlegen. Wie groß sind P und Q, wenn:

a) R = 325 *kg*	*b)* R = 135 *kg*	*c)* R = 450 *kg*
$\sphericalangle \alpha$ = 62°	$\sphericalangle \alpha$ = 42° 30′	$\sphericalangle \alpha$ = 10° 53′
$\sphericalangle \beta$ = 49°	$\sphericalangle \beta$ = 26°	$\sphericalangle \beta$ = 81° 12′

ist?

10. Eine Kraft Q wirkt mit einer Kraft P = 75 *kg* unter einem Winkel w = 70° zusammen. Wie groß muß Q sein, damit die Resultierende 100 *kg* betrage?

Anleitung: In Fig. 33 ist $\sphericalangle$ u = 180° — w.

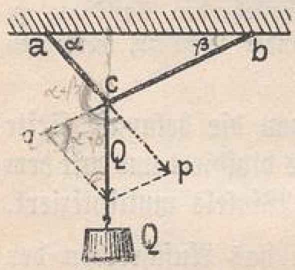

Fig. 34.

11. Wie groß sind die Zugspannungen p und q in den beiden Seilstücken ac und bc (Fig. 34), wenn bei c die vertikale Belastung Q wirkt und die beiden Seilstücke mit der Horizontalen die Winkel α und β einschließen?

a) Q = 245 *kg*	*b)* Q = 875 *kg*	*c)* Q = 1275 *kg*
$\sphericalangle \alpha$ = 37°	$\sphericalangle \alpha$ = 42½°	$\sphericalangle \alpha$ = 36° 15′
$\sphericalangle \beta$ = 18°	$\sphericalangle \beta$ = 25½°	$\sphericalangle \beta$ = 24° 20′

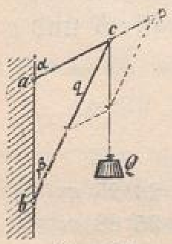

Fig. 35.

12. An dem Punkte c einer Aufzugsvorrichtung (Fig. 35) wirkt vertikal nach abwärts die Last Q. Wie groß sind die Beanspruchungen p und q der beiden Konstruktionsteile ac und bc, wenn diese mit der Vertikalen die Winkel α und β einschließen?

a) Q = 2375 *kg*	*b)* Q = 2750 *kg*	*c)* Q = 1950 *kg*
$\sphericalangle \alpha$ = 81°	$\sphericalangle \alpha$ = 48°	$\sphericalangle \alpha$ = 53° 30′
$\sphericalangle \beta$ = 36°	$\sphericalangle \beta$ = 33°	$\sphericalangle \beta$ = 28° 30′

13. Wie groß sind die Drücke s_1 und s_2 in den Streben eines einfachen Sprengwerkes (siehe Fig. 23), wenn diese Streben unter den ungleichen Winkeln α = 48½° und β = 34¾° gegen die Horizontale geneigt sind und wenn der vertikale Druck q = 3250 *kg* ist?

14. Um die gegenseitige Entfernung $AB = x$ zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 36) zu bestimmen, hat man den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt N und einen zweiten Punkt M festgelegt und sodann gemessen:

$MN = a = 975 \cdot 6\,m \quad \sphericalangle AMB = \beta = 58^0$
$\sphericalangle AMN = \alpha = 37^0 30' \quad \sphericalangle ANM = \gamma = 46^0 30'$

Wie groß ist die Entfernung x?

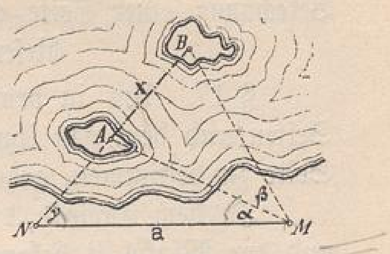

Fig. 36.

Anleitung. Man bestimme zuerst MA und dann x.

Resultate.

1. $a = 262 \cdot 36\,m$
   $b = 188 \cdot 12\,m$

2. $a = 6 \cdot 857\,m$
   $c = 6 \cdot 089\,m$

3. $b = 34 \cdot 328\,cm$
   $c = 23 \cdot 110\,cm$

4. $\sphericalangle A = 27^0 21 \cdot 5'$
   $\sphericalangle C = 72^0 38 \cdot 5$
   $c = 72 \cdot 69\,m$

5. $\sphericalangle A = 39^0 52'$
   $\sphericalangle B = 58^0 38'$
   $b = 30 \cdot 975\,m$

6. $\sphericalangle B = 40^0 30'$
   $\sphericalangle A = 43^0$
   $a = 47 \cdot 77\,m$

7. *a)* $AC = 140 \cdot 92\,m$
   $BC = 117 \cdot 44\,m$
   b) $AC = 317 \cdot 2\,m$
   $BC = 218 \cdot 9\,m$
   c) $AC = 182 \cdot 92\,m$
   $BC = 314 \cdot 06\,m$

8. *a)* $\sphericalangle B = 47^0 18'$
   $c = 131 \cdot 7\,m$
   b) $\sphericalangle B = 42^0 36'$
   $c = 328 \cdot 2\,m$
   c) $\sphericalangle B = 46^0 24'$
   $c = 29\,m$

9. *a)* $P = 307 \cdot 4\,kg$
   $Q = 262 \cdot 7\,kg$
   b) $P = 98 \cdot 027\,kg$
   $Q = 63 \cdot 611\,kg$
   c) $P = 85\,kg$
   $Q = 445\,kg$

10. $Q = 45 \cdot 28\,kg$

11. *a)* $p = 284\,kg$
   $q = 239\,kg$
   b) $p = 852\,kg$
   $q = 695\,kg$
   c) $p = 1334\,kg$
   $q = 1180\,kg$

12. *a)* $p = 1974\,kg$
   $q = 3317\,kg$
   b) $p = 5788\,kg$
   $q = 7896\,kg$
   c) $p = 2202\,kg$
   $q = 3709\,kg$

13. $s_1 = 2689\,kg$
   $s_2 = 2168\,kg$

14. $MA = 711 \cdot 6\,m$
   $AB = 980 \cdot 2\,m$
   $NA = 597 \cdot 2\,m$
   $MB = 1149\,m$

Berechnung einer Seite aus den beiden anderen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

§ 17. Um in dem dritten Bestimmungsfalle (§ 15) aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zunächst die dritte Seite zu bestimmen, gehen wir in folgender Weise vor.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 37 a, b) seien die Seiten a und c und der Winkel B bekannt, und die Seite b sei zu berechnen.

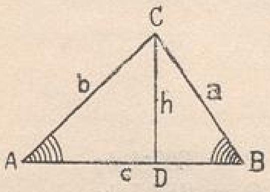

Fig. 37 a

Zieht man

$$CD \perp AB$$

und setzt

$$CD = h, \quad BD = m,$$

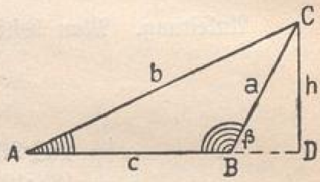

Fig. 37 b.

so ist im $\triangle ADC$ . . $b^2 = h^2 + AD^2$ . . . . (1)

und im $\triangle BDC$ . . $h^2 = a^2 - m^2$, ... (2)

woraus folgt: $b^2 = a^2 - m^2 + AD^2$ . . . . . (3)

In Fig. 37 a ist $AD = c - m$,

In Fig. 37 b ist $AD = c + m$,

daher nach Gleichung (3)

$b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$ | $b^2 = a^2 - m^2 + (c + m)^2$

woraus nach Ausführung der Quadrierung, nach welcher sich $-m^2$ gegen m^2 hebt, folgt:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2cm \ldots (4)$ | $b^2 = a^2 + c^2 + 2cm \ldots (4)'$

Nun ist im $\triangle BCD$ nach § 10:

$m = a \cos B$ | $m = a \cos \beta$

somit, wenn diese Werte von m in die Gleichungen (4) und (4)′ eingesetzt werden,

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B} \qquad \mathbf{b^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac \cos \beta}$$

Der in diesen beiden Gleichungen ausgedrückte Satz heißt der Carnot'sche Lehrsatz und läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Das Quadrat einer Dreiecksseite wird gefunden, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seiten addiert und um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus ihres eingeschlossenen Winkels vermindert, oder um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem cosinus des von ihnen gebildeten Außenwinkels vermehrt. Das Letztere wird angewendet, wenn der von den bekannten Seiten eingeschlossene Winkel größer ist als 90°.

Zieht man aus dem so bestimmten Werte die Quadratwurzel, so wird die Seite selbst gefunden.

Beispiele.

Folgende Dreiecke sind aufzulösen:

1. $a = 25\,m$
   $c = 36\,m$
   $\sphericalangle B = 68^0 30'$

Ausführung:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B}$$
$$a^2 = 625$$
$$c^2 = 1296$$
$$2\,ac\cos B = 659{\cdot}7$$
daher $b = \sqrt{1261{\cdot}3}$
$\mathbf{b = 35{\cdot}515}\ m$

2. $b = 42\,m$
   $c = 63\,m$
   $\sphericalangle A = 115^0$

Ausführung:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(180^0 - A)}$$
$$b^2 = 1764$$
$$c^2 = 3969$$
$$2\,b\,c\cos 65^0 = 2236{\cdot}39$$
daher $a = \sqrt{7969{\cdot}39}$
$\mathbf{a = 89{\cdot}271}\ m$

Die noch fehlenden zwei Winkel können nun nach dem Sinus-Satze berechnet werden.

Übungsbeispiele.

Es ist in folgenden Dreiecken die unbekannte Seite zu bestimmen:

1. $a = 24\,cm$, $b = 15\,cm$, $\sphericalangle C = 60^0$
2. $b = 7{\cdot}5\,cm$, $c = 3{\cdot}2\,cm$, $\sphericalangle A = 44^0 30'$
3. $a = 50{\cdot}2\,m$, $c = 42{\cdot}5\,m$, $\sphericalangle B = 72^0 25'$
4. $a = 6{\cdot}5\,m$, $b = 4{\cdot}5\,m$, $\sphericalangle C = 108^0$
5. $a = 6{\cdot}8\,m$, $c = 10{\cdot}4\,m$, $\sphericalangle B = 97^0 30'$
6. $b = 34{\cdot}5\,cm$, $c = 83{\cdot}4\,cm$, $\sphericalangle A = 103^0 10'$

7. Man bestimme die gegenseitige Entfernung x der durch ein Gebäude gedeckten Punkte A und B (Fig. 38) aus folgenden, durch direkte Abmessung gefundenen Angaben:

a) $a = 73\,m$, $b = 115\,m$, $\sphericalangle P = 46^0 20'$
b) $a = 253{\cdot}8\,m$, $b = 175{\cdot}5\,m$, $\sphericalangle P = 103^0 13'$

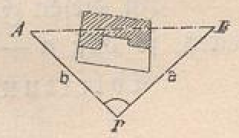

Fig. 38

8. Wie lang sind die Diagonalen d_1 und d_2 eines Parallelogrammes von den Seiten $a = 28\,cm$, $b = 17\,cm$, wenn der Spitzwinkel des Parallelogrammes $62^0 15'$ beträgt?

9. Zwei Kräfte P und Q (Fig. 39) wirken unter einem Winkel w auf einen Punkt O. Wie groß ist ihre Resultierende R, wenn:

a) $P = 13\,kg$, $Q = 19\,kg$, $\sphericalangle w = 50^0$
b) $P = 70\,kg$, $Q = 110\,kg$, $\sphericalangle w = 65^0$
c) $P = 290\,kg$, $Q = 510\,kg$, $\sphericalangle w = 100^0$
d) $P = 48{\cdot}5\,kg$, $Q = 69{\cdot}8\,kg$, $\sphericalangle w = 61^0 40'$ ist?

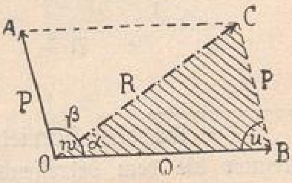

Fig. 39.

10. Zwei Kräfte P und Q wirken unter dem Winkel w zusammen. Wie groß ist ihre Resultierende R, und wie groß sind die Winkel α und β, welche die Resultierende mit den Kräften Q und P einschließt, wenn:

a) $P = 80$ *kg*, $Q = 50$ *kg*, $\sphericalangle w = 53^0$ *b)* $P = 125$ *kg*, $Q = 96$ *kg*, $\sphericalangle w = 65^0$ *c)* $P = 62{\cdot}5$ *kg*, $Q = 55$ *kg*, $\sphericalangle w = 72^0$ ist?

Resultate.

1. $c = 21$ *m*
2. $a = 5{\cdot}679$ *m*
3. $b = 55{\cdot}115$ *m*
4. $c = 8{\cdot}976$ *m*
5. $b = 13{\cdot}147$ *m*
6. $a = 97{\cdot}25$ *cm*
7. *a)* $x = 83{\cdot}43$ *m*
   b) $x = 339{\cdot}98$ *m*
8. $d_1 = 38{\cdot}94$ *cm*
   $d_2 = 25{\cdot}09$ *cm*
9. *a)* $R = 29{\cdot}112$ *kg*
   b) $R = 153{\cdot}32$ *kg*
   c) $R = 541{\cdot}14$ *kg*
   d) $R = 102{\cdot}16$ *kg*
10. *a)* $R \doteq 117$ *kg*, $\sphericalangle\alpha \doteq 33^0$, $\sphericalangle\beta \doteq 20^0$
    b) $R = 187{\cdot}04$ *kg*, $\sphericalangle\alpha = 37^0 17'$, $\sphericalangle\beta = 27^0 43'$
    c) $R = 95{\cdot}16$ *kg*, $\sphericalangle\alpha = 38^0 39'$, $\sphericalangle\beta = 33^0 21'$

Berechnung der Dreieckswinkel aus den drei Seiten.

§ 18. Sind die drei Seiten a, b und c eines Dreieckes gegeben, so kann man die halben Dreieckswinkel nach folgenden Formeln finden:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\,{}^{*)}$$

In diesen Formeln bedeutet s den halben Umfang des Dreieckes, so daß $a + b + c = 2s$ ist.

Ableitung der Formeln. Macht man in Fig. 40

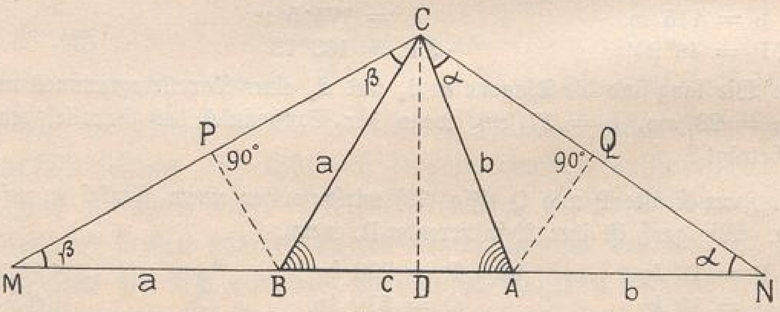

Fig. 40.

*) Um diese Formeln dem Gedächtnisse einzuprägen, merke man sich, daß im Nenner die dem betreffenden Winkel anliegenden Seiten stehen, während die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Zähler vorkommt.

$$BM = BC = a \qquad \text{und} \qquad AN = AC = b,$$

so sind die Dreiecke MBC und NAC gleichschenklig, und es ist als Außenwinkel

$$\sphericalangle B = 2\beta \qquad\qquad \sphericalangle A = 2\alpha,$$

also $\qquad \beta = \frac{B}{2} \qquad\qquad \alpha = \frac{A}{2}$

Ferner ist $MN = a + c + b = 2s$. Macht man nun $CD \perp AB$, so ist

$$MD + DN = MN$$

oder

$$MC \cos\beta + NC \cos\alpha = 2s \tag{1}$$

Nun ist aber (§ 12) $\quad MC = 2 \times MP = 2 \times a \cos\beta$

$$NC = 2 \times NQ = 2 \times b \cos\alpha$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) ein, so erhält man $2a\cos^2\beta + 2b\cos^2\alpha = 2s$*) oder $\quad a\cos^2\beta + b\cos^2\alpha = s \qquad$ (I)

Analog gelten auch, wenn $\gamma = \frac{C}{2}$ ist, die Gleichungen

$$b \cos^2\gamma + c \cos^2\beta = s \;\; \ldots\ldots \tag{II}$$
$$c \cos^2\alpha + a \cos^2\gamma = s \;\; \ldots\ldots \tag{III}$$

Multipliziert man die Gleichungen I, II und III bezw. mit c, — a und b, so erhält man

$$ac \cos^2\beta + bc \cos^2\alpha = cs$$
$$- ab \cos^2\gamma - ac \cos^2\beta = - as$$
$$bc \cos^2\alpha + a{\cdot}b \cos^2\gamma = bs.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich

$$2bc \cos^2\alpha = s\,(c - a + b)$$

Da nun $c - a + b = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$ ist, so erhält man weiter

$$2bc \cos^2\alpha = 2s\,(s - a)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{s\,(s-a)}{bc} \qquad\qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

und da $\sphericalangle\, \alpha = \frac{A}{2}$ ist, $\qquad\qquad \mathbf{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}}$

---

*) Statt $(\cos\beta)^2$ schreibt man $\cos^2\beta$.

In derselben Weise lassen sich aus den Gleichungen (I), (II) und (III), wenn man sie mit c, a und — b, beziehungsweise mit — c, a und b multipliziert und dann addiert, die angegebenen Formeln für $\cos\frac{B}{2}$ und $\cos\frac{C}{2}$ ableiten.

Beispiel. Wie groß sind die Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 25$ m, $b = 21$ m, $c = 30$ m?

Ausführung. Es ist der Umfang $u = 76$ m, daher $s = 38$ m und $s - a = 13$ m, $s - b = 17$ m, $s - c = 8$ m.

Somit ist

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 13}{21 \times 30}} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 17}{25 \times 30}} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{38 \times 8}{25 \times 21}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = 0{\cdot}8855 \qquad \cos\frac{B}{2} = 0{\cdot}9281 \qquad \cos\frac{C}{2} = 0{\cdot}76095$$

$$\sphericalangle\frac{A}{2} = 27^0\,42' \qquad \sphericalangle\frac{B}{2} = 21^0\,52' \qquad \sphericalangle\frac{C}{2} = 40^0\,27'$$

Bevor man die ganzen Winkel berechnet, überzeugt man sich, ob die Summe der halben Winkel 90^0 ergibt. In unserem Beispiele ist diese Summe $= 90^0\,01'$. Es ist also ein kleiner Fehler von $1'$ vorhanden, der sich aus der Ungenauigkeit des Tabellen-Rechnens erklärt. Größere Abweichungen würden auf einen Rechenfehler hinweisen.

Multipliziert man die obenstehenden Gleichungen mit 2, so erhält man:

$$\boldsymbol{\sphericalangle A = 55^0\,24' \qquad \sphericalangle B = 43^0\,44' \qquad \sphericalangle C = 80^0\,54'}$$

Zusatz. Auch den Carnotschen Lehrsatz kann man verwenden, um aus den Seiten eines Dreieckes dessen Winkel zu berechnen.

Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ergibt sich $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

daher $$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Ebenso muß $$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

und $$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$ sein.

In diesen Gleichungen spricht sich folgende Regel aus:

Der Cosinus eines Dreieckswinkels wird gefunden, wenn man von der Summe der Quadrate der beiden ihn einschließenden Seiten das Quadrat der gegenüberliegenden Seite subtrahiert und das Ganze durch das doppelte Produkt der ihn einschließenden Seiten dividiert.

Will man bei Anwendung dieser Regel das Auftreten negativer Cosinuswerte vermeiden, so berechne man zuerst die zwei Winkel, welche der größten Seite a n l i e g e n. Hierauf findet man den dritten Winkel, indem man die Summe der beiden bereits gefundenen von 180° subtrahiert.*)

Beispiel 1. Man berechne nach der vorstehenden Regel die drei Winkel eines Dreieckes von den Seiten $a = 41$ m $b = 52$ m $c = 15$ m.

$$\cos A = \frac{2704 + 225 - 1681}{2 \times 52 \times 15} = 0{\cdot}8000 \quad \ldots \quad \sphericalangle A = 36^0\, 52'$$

$$\cos C = \frac{1681 + 2704 - 225}{2 \times 41 \times 52} = 0{\cdot}9756 \quad \ldots \quad \sphericalangle C = 12^0\, 43'$$

$$180^0 - (A + C) \quad \ldots \quad \sphericalangle B = 130^0\, 25'$$

Beispiel 2. Wie groß ist in Fig. 39 der Winkel w, wenn $P = 65\,kg$ $Q = 85\,kg$ $R = 100\,kg$ ist?

1. Lösung.

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S(S-R)}{PQ}}$$

$$S = \frac{P+Q+R}{2} = 125$$

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{125 \times 25}{65 \times 85}} = 0{\cdot}7521$$

$$\frac{u}{2} = 41^0 14'$$

$$u = 82^0 28'$$

2. Lösung.

$$\cos u = \frac{P^2 + Q^2 - R^2}{2PQ}$$

$$\cos u = \frac{11450 - 10000}{2 \times 65 \times 85}$$

$$\cos u = \frac{1450}{11050}$$

$$\cos u = 0{\cdot}1312$$

$$u = 82^0 28'$$

$$\mathbf{w = 180^0 - u = 97^0\, 32'}$$

---

*) Führt die Regel zu einem negativen Cosinuswert, so suche man zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in der Tabelle den zugehörigen Winkel w. Diesen muß man noch von 180° subtrahieren, um den Dreieckswinkel zu erhalten.

z. B. $a = 75\,m$ $b = 43\,m$ $c = 90\,m$

$$\cos C = \frac{75^2 + 43^2 - 90^2}{2 \times 75 \times 43} = \frac{-626}{6450} = -0{\cdot}09705$$

$$w = 84^0\, 26' \qquad \sphericalangle C = 180^0 - w = 95^0\, 34'$$

Übungsbeispiele.

Man berechne die Winkel A und B folgender, durch ihre drei Seiten gegebenen Dreiecke:

1.	$a = 17\ m$ $b = 14\ m$ $c = 15\ m$	3.	$a = 22{\cdot}2\ m$ $b = 14{\cdot}9\ m$ $c = 22{\cdot}1\ m$	5.	$a = 20\ m$ $b = 28\ m$ $c = 15\ m$
2.	$a = 8{\cdot}2\ m$ $b = 6{\cdot}5\ m$ $c = 7{\cdot}3\ m$	4.	$a = 4{\cdot}1\ m$ $b = 1{\cdot}5\ m$ $c = 5{\cdot}2\ m$	6.	$a = 71{\cdot}2\ cm$ $b = 60{\cdot}1\ cm$ $c = 28{\cdot}9\ cm$

7. Von einem Parallelogramm sind die Seiten $a = 10{\cdot}5\ cm$, $b = 16{\cdot}8\ cm$ und die eine Diagonale $d_1 = 14{\cdot}7\ cm$ gegeben. Wie groß sind die Winkel des Parallelogrammes und wie lang ist die zweite Diagonale d_2?

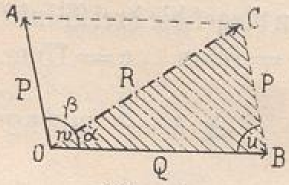

Fig. 41.

8. Zwei Kräfte P und Q wirken so zusammen, daß ihre Resultierende = R wird (Fig. 41). Welchen Winkel schließen die beiden Kräfte ein, wenn:

a)	$P = 70\ kg$ $Q = 80\ kg$ $R = 90\ kg$	*d)*	$P = 50\ kg$ $Q = 80\ kg$ $R = 100\ kg$	*g)*	$P = 235\ kg$ $Q = 175\ kg$ $R = 300\ kg$
b)	$P = 85\ kg$ $Q = 46\ kg$ $R = 90\ kg$	*e)*	$P = 13\ kg$ $Q = 25\ kg$ $R = 30\ kg$	*h)*	$P = 96{\cdot}6\ kg$ $Q = 73{\cdot}8\ kg$ $R = 140\ kg$
c)	$P = 75\ kg$ $Q = 115\ kg$ $R = 100\ kg$	*f)*	$P = 42\ kg$ $Q = 63\ kg$ $R = 84\ kg$	*i)*	$P = 358\ kg$ $Q = 215\ kg$ $R = 450\ kg$ ist?

Anleitung. Es ist $\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S-R)}{P\,Q}}$, worin $S = \frac{1}{2}(P + Q + R)$ ist.

Da nun $u + w = 180^\circ$ also $\frac{u}{2} + \frac{w}{2} = 90^\circ$ ist, so ist

nach § 4 $\cos\frac{u}{2} = \sin\frac{w}{2}$

daher $\sin\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S-R)}{P\,Q}}$

Resultate.

1.	$\sphericalangle A = 71^\circ 41'$ $\sphericalangle B = 51^\circ 26'$	4.	$\sphericalangle A = 36^\circ 52'$ $\sphericalangle B = 12^\circ 41'$
2.	$\sphericalangle A = 72^\circ 39'$ $\sphericalangle B = 49^\circ 9'$	5.	$\sphericalangle A = 43^\circ 32'$ $\sphericalangle B = 105^\circ 22'$
3.	$\sphericalangle A = 70^\circ 43'$ $\sphericalangle B = 39^\circ 19'$	6.	$\sphericalangle A = 100^\circ 19'$ $\sphericalangle B = 56^\circ 10'$