Die trigonometrische Auflösung des Dreieckes und der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren

Hartl, Hans

Wien, 1907

Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Dreieckes.

7. 60° und 120° $d_2 = 23{\cdot}85\ cm$

8. *a)* 106° 38′ *d)* 82° 06′ *g)* 87° 06′
b) 99° 08′ *e)* 80° 37′ *h)* 70° 14′
c) 120° 50′ *f)* 75° 31′ *i)* 79° 29′

Flächenformeln.

§ 19. I. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes

wird gefunden, indem man die Maßzahlen der beiden Katheten multipliziert und das erhaltene Produkt durch 2 dividiert.

$$F = \frac{a.b}{2} \quad \ldots .\ (\text{Fig. } 42.)$$

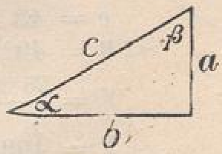

Fig. 42.

Ist nun das Dreieck nicht durch seine beiden Katheten, sondern in anderer Weise bestimmt, so ermittele man zunächst die Katheten und berechne sodann aus diesen den Flächeninhalt.

Beispiele. Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Stücke bestimmten rechtwinkligen Dreiecke:

1. $c = \mathbf{18{\cdot}7}\ m$
$a = \mathbf{8{\cdot}8}\ m$
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$b = 16{\cdot}5\ m$
$F = \frac{16{\cdot}5 \times 8{\cdot}8}{2}$
$F = \mathbf{72{\cdot}6}\ m^2$

2. $c = \mathbf{45}\ cm$
$\sphericalangle A = \mathbf{38^0}$
$a = c \sin A$
$b = c \cos A$
$a = 27{\cdot}71\ cm$
$b = 35{\cdot}46\ cm$
$F = \mathbf{491{\cdot}3}\ cm^2$

3. $a = \mathbf{12{\cdot}5}\ dm$
$\sphericalangle B = \mathbf{54^0\ 30'}$
$b = a \operatorname{tg} B$
$b = 17{\cdot}524\ dm$
$F = \frac{17{\cdot}524 \times 12{\cdot}5}{2}$
$F = \mathbf{109{\cdot}525}\ dm^2$

§ 20. II. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Dreieckes

kann gefunden werden, indem man das Produkt aus zwei Seiten und dem sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels bildet und durch 2 dividiert.

NB. Ist der Winkel größer als 90°, so hat man statt seines sinus den sinus des Nebenwinkels zu nehmen.

Nach der angegebenen Regel muß

in Fig. 43 . . $F = \frac{a\,c \sin B}{2}$ und in Fig. 44 . . $F = \frac{a\,c \sin \beta}{2}$ sein.

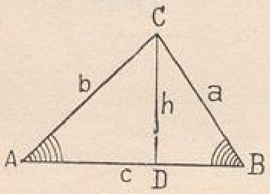

Fig. 43.

Beweis. Bekanntlich ist

$$F = \frac{c.h}{2} \dots (1)$$

Nun ist aber

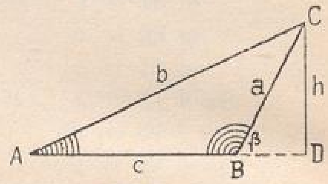

Fig. 44.

$h = a \sin B$ $\qquad$ $h = a \sin \beta$

Setzt man den Wert von h in die Formel (1) ein, so erhält man:

$$\mathbf{F = \frac{a\,c \sin B}{2}} \qquad \mathbf{F = \frac{a\,c \sin \beta}{2}}$$

Beispiele. Man berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes aus folgenden Angaben:

1. $\mathbf{a = 25}\ m$
   $\mathbf{c = 48}\ m$
   $\sphericalangle \mathbf{B = 43^0}$
   $F = \frac{25 \times 48 \times 0{\cdot}682}{2}$
   $\mathbf{F = 409{\cdot}2}\ m^2$

2. $\mathbf{b = 32{\cdot}4}\ cm$
   $\mathbf{c = 54{\cdot}2}\ cm$
   $\sphericalangle \mathbf{A = 40^0\,10'}$
   $F = \frac{32{\cdot}4 \times 54{\cdot}2 \times 0{\cdot}645}{2}$
   $\mathbf{F = 566{\cdot}34}\ cm^2$

3. $\mathbf{a = 7{\cdot}8}\ m$
   $\mathbf{b = 3{\cdot}5}\ m$
   $\sphericalangle \mathbf{C = 110^0}$
   $F = \frac{a\,b \sin 70^0}{2}$
   $F = \frac{7{\cdot}8 \times 3{\cdot}5 \times 0{\cdot}9397}{2}$
   $\mathbf{F = 12\,827}\ m^2$

Kennt man von einem Dreiecke bloß eine Seite und die Winkel, so berechne man zunächst (nach dem Sinussatze) noch eine Seite und dann nach obenstehender Regel den Flächeninhalt.

Beispiel. Man berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes aus folgenden Angaben:

$\mathbf{a = 84{\cdot}5}\ cm$
$\sphericalangle \mathbf{B = 72^0}$
$\sphericalangle \mathbf{C = 55^0}$

Ausführung. Es ist $\sphericalangle A = 53^0$

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{84{\cdot}5 \times 0{\cdot}9511}{0{\cdot}7986}$$

$$\mathbf{b = 100{\cdot}64}\ cm$$

Nun ist $F = \frac{a\,b \sin C}{2} = \frac{84{\cdot}5 \times 100{\cdot}64 \times 0{\cdot}8192}{2}$

$$\mathbf{F = 3483}\ cm^2$$

Übungsbeispiele.

Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Angaben bestimmten rechtwinkligen Dreiecke:

1. $c = 8{\cdot}65\ m$, $b = 6{\cdot}92\ m$
2. $a = 40\ cm$, $\sphericalangle B = 45^0$
3. $a = 25{\cdot}5\ m$, $\sphericalangle A = 32^0\,30'$
4. $b = 4{\cdot}85\ m$, $\sphericalangle A = 51^0\,20'$
5. $c = 92{\cdot}5\ cm$, $\sphericalangle A = 26^0\,45'$
6. $c = 13{\cdot}54\ m$, $\sphericalangle A = 61^0\,30'$

Man berechne die Flächeninhalte der durch folgende Stücke bestimmten schiefwinkligen Dreiecke:

7. $a = 75\ cm$, $b = 42\ cm$, $\sphericalangle C = 30^0$
8. $a = 112\ cm$, $c = 165\ cm$, $\sphericalangle B = 80^1/_2{}^0$
9. $b = 5{\cdot}37\ m$, $c = 3{\cdot}89\ m$, $\sphericalangle A = 65^0\,15'$
10. $a = 12{\cdot}85\ m$, $b = 20{\cdot}25\ m$, $\sphericalangle C = 101^0\,30'$
11. $a = 244\ cm$, $\sphericalangle A = 56^0$, $\sphericalangle B = 42^0$
12. $c = 17{\cdot}55\ m$, $\sphericalangle A = 100^0$, $\sphericalangle B = 38^0$

Resultate.

1. $17{\cdot}9574\ m^2$
2. $800\ cm^2$
3. $510{\cdot}35\ m^2$
4. $14{\cdot}698\ m^2$
5. $1719{\cdot}59\ cm^2$
6. $38{\cdot}44\ m^2$
7. $787{\cdot}5\ cm^2$
8. $9113{\cdot}4\ cm^2$
9. $9{\cdot}4848\ cm^2$
10. $127{\cdot}49\ m^2$
11. $23792\ cm^2$
12. $139{\cdot}55\ m^2$

§ 21. Durch Anwendung des in § 20 angegebenen Flächensatzes gelangt man leicht zu folgenden Regeln:

Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes wird gefunden, wenn man das halbe Quadrat des Schenkels mit dem sinus des Winkels an der Spitze multipliziert.

Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes wird gefunden, wenn man das Produkt zweier zusammenstoßender Seiten mit dem sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels multipliziert.